FORHANDLINGER

i

Videnskabs-Selskabet

I CHRISTIANIA

Aar 1871.

Med 3 lithographerede Plader.

Christiania 1872.

Trykt hos Brøgger & Christie.

I Commission hos Boghandler J. Dybwad.

FORHANDLINGER

I

VIDENSKABS-SELSKABET

I CHRISTIANIA

AAR 1871.

MED 3 LITHOGRAPHEREDE PLADER.

Christiania 1872.

Trykt i Brøgger & Christie's Bogtrykkeri.

I Commission hos Jac. Dybwad.

Indhold.

Foredrag og Afhandlinger.

Nye Echinodermer fra den norske Kyst.

Af G. O. Sars.

(Foredraget i Mødet den 27de Januar 1871.)

A. Om en ny Art af Slægten Brisinga Asbj.

Den mærkværdige af Asbjørnsen opdagede Søstjerne, *Brisinga endecacnemos*, har hidtil staaet ganske isoleret som en gaadefuld besynderlig Dyreform ligesom løsrevet fra sin Forbindelse med sine øvrige Samslægtninger; som en Skabning, der ligesom ikke hører hjemme iblandt vor Jordperiodes Væsener, men heller synes at have passet til at færdes i et antediluviansk Hav befolket af de kjæmpemæssige Ichtyosaurer og andre barokke Former af forlængst uddøde Uhyrer; lige udmærket ved sin colossale Størrelse som sit besynderlige Udseende og mærkværdige Bygning, der ligesom synes at spotte alle Systematikernes Regler og Inddelingsprinciper; efter det ydre en Ophiuride, efter det indre en Asteride, uden med Sikkerhed at kunne henføres til nogen af disse Grupper. Forgjæves har man bestræbt sig for at tvinge denne besynderlige Dyreform ind under den ene eller anden af de tidligere opstillede Grupper; den har aldrig passet rigtigt ind nogetsteds, og overalt, hvor man har anvist den en Plads mellem de øvrige bekjendte Former, har den stukket grelt af mod disse ligesom en broget Lap paa et mørkt Klæde. For Tiden har man ogsaa opgivet disse Forsøg og har seet sig nødsaget til for den at oprette ikke blot en egen Slægt og Familie, men endog en egen mellem Ophiurider og Asterider staaende Orden, *Brisingastra*. Først ved en saadan Omgjærdning har det været muligt paa en nogenlunde tilfredsstillende Maade at faa denne aberrante Skabning indlemmet i vort System. Ikke mindre besynderlig var denne Forms indskrænkede Forekomst alene paa en eneste Localitet, nemlig i Bunden af den dybe ved høie Snefjelde og Gletscher ligesom fra den øvrige Kyst afstængte Hardangerfjord, der alene ved dette Sødyrs Forekomst her har vundet et Ry over hele den videnskabelige Verden, som vistnok ikke det ved dens naturskjønne Bredder levende naive Forkefærd har den mindste Anelse om. Af stor Interesse er derfor nu Opdagelsen af en bestemt forskjellig ny Art af denne mærkværdige Slægt fra et ganske andet Punkt af vor Kyst. Allerede i 1868 havde jeg ved Fiskeværet Skraaven i Lofoten optaget i Bundskraben fra det betydelige Dyb af henimod 300 Favne et ganske ungt Exemplar af en Brisinga, som jeg først ansaa for den før alene fra Hardangerfjorden bekjendte B. endecacnemos Asbj. Den nøiere Undersøgelse viste imidlertid enkelte mærkelige Afvigelser, hvoraf især en syntes afgjørende for dens Selvstændighed som en egen Art. Exemplaret havde nemlig kun 10 Arme, medens Armenes Tal hos den typiske Art altid er constant 11. Min Fader, hvis kyndige og øvede Pen jeg havde haabet skulde faa indført denne interessante Form i Systemet, erkjendte den ogsaa strax for en fra B. endecacnemos Asbj. skilt Art og kaldte den, i den rimelige Tro, at Armenes Tal hos nærværende Art var ligesaa constant som hos hin, *B. decacnemos.* Det følgende Aar undersøgte jeg naturligvis med største Omhyggelighed med min Bundskrabe den Localitet, hvor jeg havde fundet dette interessante Dyr, men forgjæves. Først Dagen før min Afreise kom jeg igjen indenfor disse mærkelige Dyrs Omraade paa en forskjellig Localitet, uden at det dog lykkedes mig at faa op mere end en enkelt Arm, men denne af et fuldvoxent Exemplar og en god Fod i Længde. Denne Arm viste nu strax paa en langt skarpere Maade end det unge Exemplar, jeg tidligere havde taget, bestemte specifiske Afvigelser fra den typiske Art. Formen af Armen og Sidepiggenes Tal og Anordning var vistnok omtrent ligedan hos begge. Derimod viste Armens dorsale Overflade et meget forskjelligt Udseende. Istedetfor de talrige med bestemte Mellemrum over den største Del af Armen sig strækkende bugtede Costæ fandtes her kun ved det allerinderste Parti af Armen nogle faa (10—12) med disse homologe Tverribber, der i høi Grad udmærkede sig ved en Rad af høie og stærke krandsformigt rundt dem sig strækkende divergerende Pigge, hvoraf intet Spor er at se hos den typiske Art. Mellem disse stærkt udviklede kalkagtige Costæ og over hele den øvrige Arm lige til dens yderste Spids fandtes endnu tæt sammen en stor Mængde Ribber af et ganske andet Udseende, nemlig i Form af jevnt tilrundede, ved sin smukke rødviolette Farve mod den øvrige Arm stærkt afstikkende Tvervulster, der ved nøiere Undersøgelse viste sig i Modsætning til hine ganske bløde og næsten udelukkende dannede af tætte Ansamlinger af Pedicellarier. Mellemrummet mellem disse Tvervulster var derimod aldeles nøgent og glat, kun beklædt af en blød Hud. Disse Characterer vare nu i Forbindelse med det abnorme Tal af Armene, som det tidligere erholdte Individ viste, aldeles afgjørende for, at der her forelaa en interessant ny Art af denne mærkværdige Slægt. Kun var Materialet endnu for lidet, til at der kunde foretages nogen i Detaillerne gaaende Undersøgelse. Paa min sidste Reise, 1870, var jeg endelig saa heldig at faa opsporet, hvor dette interessante Dyr egentlig holdt til. Omtrent 1 Mil lige i Syd for Fiskeværet Skraaven ud paa Vestfjorden, paa en meget blød og paa andre Sødyr temmelig fattig Lerbund i en Dybde af mellem 200 og 300 Favne, synes denne mærkelige Søstjerne at forekomme i temmelig betydelig Mængde, men som det synes kun paa et meget indskrænket Omraade. For at faa fat i den maatte jeg tage det nøiagtigste Med i Land, hvilket i en saa betydelig Afstand ikke er saa let, og desuden give den nøieste Agt paa Strømsætningen. Saa ofte det imidlertid lykkedes mig at lade Bundskraben fare hen over det Strøg af Havbunden, hvor jeg her først stødte paa den, var jeg næsten sikker paa ialfald at faa enkelte Dele (f. Ex. løsrevne Arme) af den op i Skrabenettet. Ved flittig, saa ofte Veiret tillod det, at undersøge denne Localitet — meget ofte maatte jeg dog paa Grund af den rivende Strøm, der ofte her i Vandskorpen og paa Dybet gaar i ganske modsatte Retninger, vende tilbage med ganske uforrettet Sag — er det lykkets mig at skaffe tilveie et ganske vakkert Materiale, saa at jeg haaber snart at kunne levere en fuldstændig anatomisk Beskrivelse af dette mærkelige Dyr. Undersøgelsen af mine Exemplarer gav nu til min Overraskelse det Resultat, at Armenes Tal hos nærværende Art ingenlunde, som hos den typiske Art, er constant, men varierer indenfor temmelig vide Grændser. Blandt de af mig tagne Exemplarer findes Individer med 9, 10, 11 og 12 Arme, og rimeligvis vil Armenes Tal, naar flere Individer blive fundne, befindes at være endnu mere variabelt. Benævnelsen *decacnemos* kan saaledes ikke bibeholdes, hvorfor jeg har været nødsaget til at give den et nyt Navn. Den af mig valgte Artsbetegnelse *coronata* er hentet fra en af de for nærværende Art mest iøinefaldende Characterer, nemlig de høie og stærke krandsformigt ordnede Pigge, hvormed de paa det indre Parti af Armene tilstedeværende virkelige Costæ ere besatte.

Næsten alle de af mig tagne Exemplarer havde paa denne Tid (Juli—August) Generationsorganerne stærkt udviklede og som Følge heraf det inderste Parti af Armene overordentlig stærkt opblæst. Ved Undersøgelsen af disse Organer stødte jeg nu paa et Forhold, der ganske afviger fra hvad vi kjende hos den typiske Art, B. endecacnemos. Efter Asbjørnsens Angivelser, hvilke jeg ved egne Undersøgelser kan bekræfte, findes der hos denne Art langs Armenes dorsale Side indtil i en temmelig betydelig Afstand fra deres Insertion en dobbelt Rad af talrige Genitalporer, hvoraf enhver danner Udmundingen for en eller flere smaa Blindsække, hvori Genitalprodukterne udvikles. Ganske anderledes er Forholdet hos nærværende Art. Her danne Generationsorganerne paa hver Side af Armens Axe en samlet Masse af uregelmæssigt, hos Hunnerne dichotomiskt forgrenede, hos Hannerne mere drueklaseformigt ordnede Blindsække, der lidt efter lidt forene sig til tykkere Stammer og tilsidst udmunde gjennem en kort og tyk fælles Udførselsgang, der er fast forbunden med Indersiden af Armens Hud paa Siden nærmere den ventrale Side og i forholdsvis ikke saa betydelig Afstand fra Armens Basis. I Overensstemmelse hermed findes ogsaa for hver Arm kun 2 symetriske til hver Side af Armens Basis liggende Generationsaabninger, et Forhold, der saaledes mere nærmer sig til det for Asteriderne normale. Idet jeg forøvrigt forbeholder mig i det nu under Arbeide værende Universitetsprogram nærmere at udvikle dette Punkt saavelsom de øvrige anatomiske Forhold, skal jeg blot her vedføie en kort Characteristik af Arten. Jeg skal kun endnu i Forbigaaende bemærke, at jeg skulde være meget tilbøielig til at antage, at den nylig af de engelske Naturforskere Wyville Thomson og Jeffreys paa de store Dybder i Atlanterhavet udenfor Skotlands og Irelands Kyster iagttagne Brisinga ikke som angivet er B. endecacnemos Asbj., men netop denne Art. Begge disse Arter synes nemlig i sin Levevis mærkeligt at adskille sig fra hinanden. B. endecacnemos er hidtil blot funden paa haard Bund (Klippebund) og synes fortrinsvis at ynde glatte og brat fra Land mod Dybet skraanende Fjeldsider i en Dybde af omkring halvtandet hundrede Favner; medens nærværende Art omvendt altid kun synes at leve i betydelig Afstand fra Land paa de store og jevne, af blød Ler bedækkede Vidder, der i større Dybder altid danne Havbunden. Den britiske Brisinga er nu funden netop under lignende Forholde, skjønt i endnu langt betydeligere Dybder, end jeg har fundet nærværende Art. Forhaabentlig vil den sikre Afgjørelse af dette Spørgsmaal ikke lade vente længe paa sig, da alle paa de britiske Expeditioner gjorte mærkelige Fund ere omhyggeligt opbevarede og conserverede.

Brisinga coronata G. O. Sars, nov. sp.

Discus circularis qvam in specie typica humilior et magis complanatus, facie aborali plana spinis numerosis brevibus, conicis obtecta, margine inter insertiones brachiorum eminentiam rotundatam, tuberculiformem præbente, spinis adoralibus brevibus in qvoqve spatio sulcis ambulacralibus interjecto circiter 12, interioribus 4—6 flabelli instar dispositis et intus vergentibus. Tessella madreporacea marginalis omnimo nuda et valde prominens. Membrana buccalis plana, non prominens, valde contractilis, nunc orificium medianum parvum circulare vel ellipticum, nunc aperturam maxime hiantem relinqvens. Brachia numero variantia a 9 ad 12, ad basin constricta, dein in speciminibus gravidis brevi spatio valde tumefacta, parte cetera apicem versus sensim angustata. Spinæ laterales in series 3 dispositæ, superiores valde elongatæ, ceteræ multo minores et scutis adambulacralibus inferne insertæ, inferiores minimæ et intus inter pedes suctorios vergentes. Superficies dorsalis brachiorum in tota longitudine usqve ad extremum apicem vallis transversis, angustis, æqvaliter convexis, subcylindricis, vermiformibus, flexuosis, mollibus, ex pedicellariis numerosissimis coacervatis formatis, dense obducta, in parte basali 4ta præterea costis transversis prædita circiter 12 fortibus, calcareis, elevatis, interdum irregulariter flexuosis vel in medio interruptis, spinis validis coronæ instar brachium circumdantibus armatis. Cutis brachiorum inter valla pedicellarifera omnino nuda. Organa genitalia (ovaria vel testes) in qvoqve brachio utrinqve congeriem communem valde ramosam formantia; qvare in qvoqve brachio duo solummodo adsunt pori genitales laterales symetrici. Color disci supine fulvo-rutilus eminentiis marginis interbrachialibus albidis. Brachia supine læte rubra, nunc magis rosea vel carnea, nunc aurantiaca vel latericea, vallis pedicellariferis et apice dilatato vaginarum spinarum lateralium vulgo saturatius coloratis, purpureis vel violaceis; pedes suctorii albidi apice fulvo. Diametros disci majorum pollicaris, interdum etiam paulo major (30 Mm.); longitudo brachiorum plus qvam pedalis (usqve ad 400 Mm.).

Habitat ad insulas Lofotenses in sinu Vestfjord procul a littore in prof. 200—300 orgyar. fundo argillaceo.

B. Om 3 nye Arter af Slægten Ophiacantha Müll. & Troschel.

Af Slægten *Ophiacantha* kjendte man tidligere med Sikkerhed kun en eneste nordisk Art, nemlig *O. spinulosa* Müll. & Troschel, der er meget almindelig overalt ved Lofoten og Finmarken mellem Nulliporer og Tubularier paa 20–30 F. D., ligesom ogsaa ved Grønland og Spitsbergen. Lütken har nemlig[1] vist, at den af Müller og Troschel opstillede Art *O. grönlandica* ligesom ogsaa den i „System der Asteriden“ af de nævnte Autores beskrevne *Ophiocoma arctica* aldeles ikke er artsforskjellig fra den almindelige Ophiacantha spinulosa, og jeg kan ogsaa ved Undersøgelsen af et i vort Museum opbevaret Exemplar af Ophiocoma arctica M. & T., ialfald for denne Forms Vedkommende, fuldkommen bekræfte dette. Hvad den af Ljungman[2] beskrevne *Ophiactis clavigera* angaar, saa har vistnok Lütken[3] yttret den Formening, at den er en virkelig Ophiacantha og identisk med den i Zoologia Danica af Abildgaard beskrevne og afbildede *Asterias tricolor*; men Sagen er dog langtfra at være sikkert afgjort. Lyman har saaledes senere[4] yttret en forskjellig Anskuelse og erkjender ikke Ljungman's Art som en virkelig Ophiacantha, skjønt den vistnok viser adskillig Tilnærmelse til denne Slægt. De exotiske Arter af denne Slægt ere ogsaa meget faa i Antal. Man kjender hidtil kun ialt 4 saadanne, nemlig 2 fra Middelhavet *O. setosa* M. & T. og *O. scabra* M. Sars, 1 fra det indiske Hav, *O. indica* Ljungman og 1 fra Vestindien *O. pentacrinus* Lütken, med hvilken *O. meridionalis* Lyman efter al Sandsynlighed er identisk. Destomere overraskende var det mig derfor paa min sidste Reise at finde ikke mindre end 3 nye herhen hørende Arter, der alle allerede i det Ydre vise saa bestemte Forskjelligheder fra den typiske Art, at det ikke synes rimeligt, at de hidtil have været blot overseede eller forvexlede med den almindelige Art. Ved at gjennemgaa de talrige paa vort Museum opbevarede, til forskjellige Tider og paa forskjellige Localiteter samlede Specimina af O. spinulosa finder jeg ogsaa, at alle disse i Virkeligheden høre til den typiske Art, uden at vise nogensomhelst Overgang til de 3 nye nedenfor i Korthed characteriserede Arter.

[1] Additamenta ad historiam Ophiuridarum I. pg. 66.

[2] Öfversigt af Vetensk.-Akademiens Förhandl. f. 1864. pg. 365, Tab. 15. Fig. 4.

[3] Additamenta ad historiam Ophiuridarum III. pg. 32.

[4] Contributions to the fauna of the Gulf Stream at great depths. Bulletin of the Museum of comparative Zoology 1869, pg. 353.

1. *Ophiacantha abyssicola* G. O. Sars nov. sp.

Discus in junioribus supine planus, pentagonus, in adultibus subcircularis et sat tumidus, supra insertiones brachiorum sæpius fornicatus et acutimarginatus, superficie aborali baculis confertis in spicula 4 longa et tenuia exeuntibus obtecta, adorali sqvamis magnis imbricatis nullis vero baculis instructa. Brachia 5 longa et tenuia, moniliformia, diametrum disci 5ies vel 6ies superantia, spinis tenuibus latitudinem brachii circiter æqvantibus. Scuta oralia parva, subqvadrangularia, parum latiora qvam longiora, ex parte in spatia interbrachialia producta, extremitate aborali latiore et rotundato-exserta, adorali acute producta; unum eorum (madreporaceum) ceteris majus extus latius rotundatum intus obtuse angulatum. Scuta adoralia anguste sublinearia, leviter arcuata, intus contingentia et sat producta. Papillæ orales præter infradentalem ternæ, raro qvaternæ, ambulacrales singulæ, parvæ. Scutella brachiorum dorsalia fere contingentia vel breviter modo sejuncta, campanulato-trigona, margine aborali subtruncato, lateralibus flexuosis, subsigmoideis, extremitate adorali obtuse rotundata; 1mum ceteris dissimile, trapezoideum, intus et extus ad lineam rectam truncatum, marginibus lateralibus non flexuosis; 2dum etiam interdum ceteris diversum et intervallo longiore a 1mo sejunctum, breviter triangulare, intus acute productum, lateribus subconcavis. Scutella ventralia intervallo longo a se disjuncta, late subqvadrangularia, multo (fere duplo) latiora qvam longiora, margine aborali recto vel in medio etiam leviter concavo, adorali in medio breviter producto; 1mum ceteris multo majus, extremitate adorali magis exserta. Spinæ brachiales septenæ inferiora versus sensim longitudine decrescentes, in articulo 2do seriem fere continuam formantes, in ceteris medio interruptæ. — Color uniformiter pallide ferrugineus, brachiis interdum fasciis obscurioribus transversis indistincte ornatis. — Diametros disci vulgo 7 Mm., longitudo brachiorum 38 Mm.; sed ad magnitudinem multo majorem excrescere potest tumqve baculis disci multo humilioribus et fere evanidis papillisqve oralibus ad unam vel alteram rimam oris qvaternis insignis.

Habitat rara ad insulas Lofotenses in prof. 120–300 orgyar. fundo argillaceo, ad Bodø vero sat freqvens inter ramificationes Lopheliæ proliferæ in prof. 80—100 orgyarum.

Af denne i sin almindelige Habitus nærmest med den middelhavske O. scabra M. Sars overensstemmende Art havde jeg allerede for flere Aar siden taget nogle ganske smaa Exemplarer ved Lofoten paa det betydelige Dyb af 300 Favne, men ansaa dem da, ligesom min Fader, kun for Unger af O. spinulosa. Paa min sidste Reise fandt jeg imidlertid fuldvoxne med stærkt udviklede Generationsorganer forsynede Exemplarer, og disse viste da strax flere bestemte Forskjelligheder fra den typiske Art. Endnu havde jeg nogen Tvivl, om den maaske kunde være alene en eiendommelig Dybvandsvarietet af O. spinulosa; men min Tvivl i saa Henseende maatte forsvinde ved at træffe begge Former sammen ved Bodø mellem Lophelia prolifera i en Dybde af 80—100 Favne. De faa Exemplarer, jeg her fandt af den virkelige O. spinulosa, stemmede i alt Væsentligt fuldkommen overens med den paa grundt Vand forekommende Form, alene med den Forskjel, at Armpiggene vare noget længere og tyndere og den hele Kropsform noget mindre robust. — Fra O. spinulosa kjendes nærværende Art allerede ved første Øiekast ved sine betydeligt længere og tyndere Arme, der ere 5—6 Gange saa lange som Skivens Diameter, medens de hos O. spinulosa ialmindelighed kun er omtrent 3 Gange saa lange. Mundskjoldenes og Armpladernes Form frembyder desuden meget distincte Characterer. Især er Armrygpladerne af en meget eiendommelig Form, og det er alene herved let at kjende Arten i enhver Alder. Skivens Beklædning er ogsaa characteristisk; de eiendommelige vifteformigt i 4 lange og tynde Spidser udgaaende Pigge, hvormed den øvre Side af Skiven selv hos meget store Exemplarer er beklædt, ere meget ulige samme hos den voxne O. spinulosa, hvorimod de mere svare til hvad man finder hos ganske smaa Unger af denne Art; ligesaa frembyder den i Regelen ganske ubevæbnede med store tydelige Skjæl belagte nedre Side af Skiven et godt Kjendemærke fra de øvrige bekjendte Arter. — I Regelen er den omtrent af samme Størrelse som O. spinulosa; men 1 eneste af mine Exemplarer, der blev taget ved Lofoten paa over 300 Favnes Dyb, er dog betydelig større, idet det har en Skivediameter af 13 Mm. og en Armlængde af omtrent 70 Mm. Dette Exemplar, hvis Skive er særdeles stærkt opsvulmet af de indenfor liggende Generationsorganer, er ogsaa udmærket derved, at Piggene paa Rygsiden af Skiven ere meget færre i Antal og saa lave, at de have mere Udseende af runde Smaaskiver eller Skjæl, samt ved Tilstedeværelsen af en overtallig Mundpapille paa 2 eller 3 Steder. Forøvrigt stemmer dette Exemplar saavel i sin almindelige Habitus som i alle Detailler paa det nøieste overens med de øvrige. Den Omstændighed, at de største Individer findes paa det største Dyb, synes at tyde paa, at nærværende Art, i Modsætning til O. spinulosa, er en ægte Dybvandsform, hvilket endnu bestyrkes derved, at jeg aldrig har fundet den høiere op end 80 Favne (ved Bodø). O. spinulosa gaar vel ogsaa af og til ned til større Dybder, ja jeg har fundet et Par Exemplarer af denne Art lige ned til 300 Favnes Dyb, men disse Individer ere altid smaa og vise et tydeligt forkrøblet Udseende, hvorimod denne Art i en Dybde af 20—30 Favne opnaar sin største og kraftigste Udvikling.

2. *Ophiacantha spectabilis* G. O. Sars, nov. sp.

Discus pentagonus vel subcircularis, in adultibus inter brachia rotundato-productus, facie aborali sat convexa, spinis asperis sat elevatis, anguste conicis, adorali spinis similibus sed minoribus et rarioribus obtecta, sqvamis nullis conspicuis. Brachia 5 sat robusta diametrum disci qvater vel qvinqvies superantia spinis validis, rigidis, in omnes directiones radiantibus et brachium ipsum fere omnino abscondentibus ornata. Scuta oralia rotundato-trigona, longiora qvam latiora, in spatia interbrachialia prolongata, extremitate adorali latiore, margine æqvaliter arcuato, aborali coarctata et obtuse rotundata tuberculisqve nonnullis scabris marginata; unum eorum (madreporaceum) ceteris valde dissimile, ellipticum, superficie glabra et sat convexa. Scuta adoralia oralibus multo minora, breviter trigona partem adoralem scutorum oralium amplectantia, intus contingentia non vero os versus producta. Papillæ orales numerosæ, in juniores qvaternæ, in adultibus usqve ad octonæ præter infradentalem; ambulacrales singulæ, latæ, sqvamæformes, 4 interiores tamen sæpius duplices, altera alteram obtegente. Scutella brachiorum dorsalia in maxima brachii parte se tangentia, breviter trigona, latiora qvam longiora, margine aborali sat arcuato, lateralibus subrectis, extremitate adorali acuta; ventralia etiam fere contingentia, subqvadrangularia, vix latiora qvam longiora, margine aborali æqvaliter arcuato, adorali subtruncato vel in medio brevissime exserto, lateralibus concavis; 1mum et forma et magnitudine ceteris simile. Spinæ brachiales octonæ, superiores fere æqvales et latitudine brachii longiores, subtilissime asperæ, complanatæ, apice obtuso. Color uniformiter fulvus vel castaneus nullas maculas vel fascias obscuriores ostendens. Diametros disci 15 Mm.; longitudo brachiorum 60—70 Mm.

Habitat non infreqvens ad Bodø in prof. 80—100 orgyar. inter ramificationes Lopheliæ proliferæ.

Denne pragtfulde Art er ikke alene en Kjæmpe blandt sine Samslægtninger, men idethele en af vore største Ophiurider, da den opnaar en Diameter af over $^1/_2$ Fod fra den ene Armspids til den anden. I enkelte af sine Detailler adskiller den sig saameget fra hvad man har betragtet som typisk for denne Slægt, at jeg endog en Tid virkelig var i Tvivl, om den var en virkelig Ophiacantha. Navnlig gjælder dette det usædvanligt store Antal Mundpapiller, der kan stige indtil 8 paa hver Side af Mundspalterne, foruden den uparrede i Midten. Det normale Tal synes at være 6, men ofte findes hos et og samme Individ et forskjelligt Antal ved de forskjellige Mundvige. Idethele synes Mundpapillernes Tal at tiltage med Alderen; hos de mindste Exemplarer fandtes der saaledes kun 4 paa hver Side. Fremdeles er Tilstedeværelsen af 2 eller rettere en dobbelt Fodpapille paa de 2 inderste, i Skiven optagne Armled et i denne Slægtsgruppe ganske ukjendt Forhold. Den stærkt sammentrykte Form af Armpiggene er ogsaa en for nærværende Art aldeles eiendommelig Character. Imidlertid stemmer den saavel ved disse Pigges characteristiske ru Overflade som ved andre væsentlige Characterer ligesom ogsaa i sin hele ydre Habitus saa nøie overens med de øvrige Arter, at jeg ikke har fundet nogen tilstrækkelig Grund til at adskille den generiskt fra disse.

Jeg har kun truffet denne anselige Art paa en eneste Localitet, nemlig ved Bodø, hvor den findes ikke saa ganske sjeldent mellem de her i Mængde paa 80—100 Favnes Dyb forekommende Coraller (Lophelia prolifera). Den sidder som oftest med sine lange piggede Arme saa tæt fastklamret til disse Corallers indviklede Forgreninger, at man har den største Møie med at faa den ubeskadiget løs, saa meget mere som Armene ere i høieste Grad fragile. Ofte kaster den, naar man berører den, ved en frivillig Kraftanstrængelse større eller mindre Stykker af Armene fra sig, ja Armene brækkes endog undertiden samtidigt paa forskjellige Steder, saa at selv enkelte Armled blive løste fra sin Forbindelse med hinanden. Faa af mine Exemplarer har det derfor lykkets mig at faa conserveret ganske hele. De fleste mangle paa en eller flere Arme et større eller mindre Stykke, og af mange Exemplarer er alene Skiven med Begyndelsen af Armene i Behold.

3. *Ophiacantha anomala* G. O. Sars, nov. sp.

Discus hexagonus inter insertiones brachiorum leviter emarginatus, supra easdem productus et bilobus sæpe etiam gibbositatem dorsalem perspicuam ostendens. Brachia sex diametrum disci triplo vel qvadruplo superantia, spinis sat validis latitudinem brachii superantibus ornata. Superficies disci cute lævi obducta, in medio supine baculis asperis sparsis, brevibus et crassis, fere tuberculiformibus, versus margines evanidis armata, subtus fere omnino nuda vel nodulis minimis et rarissimis prædita. Scuta oralia minima in spatia interbrachialia producta, forma fere eadem ac in O. spectabili sed omnino lævia; scutum madreporaceum forma vero diversa, rotundato-trigonum, extremitate aborali sat producta et obtuse rotundata, adorali multo latiore et subtruncata. Scuta adoralia fere ut in O. spectabili. Papillæ orales qvaternæ, ambulacrales singulæ, parvæ. Scutella brachiorum dorsalia longe sejuncta, irregulariter qvadrangularia, latiora qvam longiora, extremitate et aborali et adorali acute producta, illa tamen minus qvam hæc; 1mum ceteris dissimile, irregulariter ovatum, intus sqvamulis majusculis circiter 6 circumdatum; 2dum intus truncatum et 1mum tangens. Scutella ventralia sat angusta subcontingentia longiora qvam latiora, margine aborali valde arcuato adorali medio paulo exserto, lateralibus concavis. Spinæ brachiales teretes, non complanatæ, septenæ vel octonæ, dorsales valde elongatæ lateralibus fere duplo longiores, inferiores breves et lineæ medianæ approximatæ. Species hæc vivipara; pulli sat magni, ut adultæ sexradiati, disco omnino circulari et brachiis brevispinosis diametrum disci modo sesqvi superantibus insignes. Color adultarum uniformiter fusco-flavescens; pulli pallidiores. Diametros disci majorum 11 Mm., longitudo brachiorum 35—40 Mm.; diametros disci pulli nuper ex matrice exclusi 2 Mm.; longitudo brachiorum $3^1/_4$ Mm.

Habitat rara in sinu Saltenfjord prope Bodø in prof. 150—200 orgyar.

Det første Exemplar af nærværende i flere Henseender mærkelige Ophiuride, jeg fik op, ansaa jeg i Begyndelsen kun for en tilfældig, skjønt i denne Dyregruppe vistnok høist sjeldent forekommende 6armet Monstrøsitet, som jeg nærmest henførte til foregaaende Art, hvem den i sin almindelige Habitus og Farve mest ligner. Ved imidlertid en anden Dag at undersøge samme Lokalitet, fandt jeg atter 2 fuldkommen lignende, ligeledes 6armede Individer, et større og et mindre, saa at jeg herved begyndte at nære Tvivl om, at jeg her blot havde tilfældige Monstrøsiteter for mig. Det største af disse Exemplarer satte jeg for sig selv i et Glas med friskt Søvand til nøiere Undersøgelse, medens jeg fortsatte mine Skrabeoperationer. Hvor stor var imidlertid ikke min Overraskelse ved at opdage ved min Tilbagekomst fra Excursionen, at der i Glasset nu fandtes ikke 1, men 3 Individer, hvoraf rigtignok de 2 vare bitte smaa, men dog tydeligt overensstemmende med det voxne Exemplar og som dette forsynede med

6 tydeligt udviklede Arme. Jeg kom herved til Vished om, at her ikke blot forelaa en ganske eiendommelig ny Art, men at denne Art ogsaa frembød en særdeles mærkelig Character ved at være levendefødende, noget der hidtil kun har været kjendt hos en eneste Ophiuride, nemlig *Amphipholis elegans* (Leach). Ved nylig at undersøge mine Spiritusexemplarer noget nøiere, fandt jeg ogsaa ganske rigtigt hos det ene Exemplar Spidserne af de 2 Arme af endnu en Unge at stikke frem af en af Genitalspalterne. Vel lykkedes det mig ikke at faa denne hel udpræpareret; men jeg tvivler ingenlunde om, at ogsaa denne var 6armet, og at dette anomale Tal, der kun er bekjendt hos nogle tropiske Arter af Slægten Ophiactis, er constant for nærværende Art. Ogsaa kunde jeg nu forklare mig de paafaldende Gibbositeter, som Skiven hos de 2 største af mine Exemplarer dannede over en eller flere af Armenes Insertion. Disse skyldes nemlig tydeligt nok den ved Ungernes Udvikling foranledigede stærke Udspænding af den indenfor liggende Klækkehule. De nys udkrøbne Unger ere ogsaa i Forhold til Moderen af en ganske usædvanlig Størrelse, idet de holde i Gjennemsnit fra den ene Armspids til den anden over 8 Mm. — Den nøiere Detailundersøgelse af de voxne Exemplarer viste nu ogsaa, som jeg havde ventet, flere eiendommelige Characterer, som endmere bekræfte denne Forms Gyldighed som selvstændig Art. Fra foregaaende Art, hvem den mest ligner, skiller den sig saaledes ved en ganske forskjellig Bevæbning af Skiven. Istedetfor de tætte og høie coniske Pigge, som characterisere Skiven hos O. spectabilis, findes her kun i Midten af dens øvre Side nogle temmelig sparsomt fordelte lave og tykke, næsten knudeformige Fremstaaenheder, der neppe engang kunne erholde Navn af Pigge; mod Randen af Skiven tabe disse rue Knuder sig ganske, saaledes at det marginale Parti af samme ligesom den nedre Side bliver næsten ganske nøgen. Characteristisk er endvidere det korte Indsnit i Skivens Rand over Armenes Insertion, hvorved denne her viser sig ligesom delt i 2 afrundede Lober. Ogsaa er Armrygpladerne saavel ved sin Form som vide Adskillelse fra hinanden meget ulige samme hos O. spectabilis, lige-

som ogsaa Armpiggene vise den for de øvrige Arter normale trinde Form.

Man kunde maaske her snarere end med foregaaende Art tænke paa en generisk Adskillelse, da nærværende Form utvivlsomt er den mest anomale af alle Slægtens Arter. Imidlertid viser den gjennem foregaaende Art saa tydelige Overgange til de mere normale Arter, at der ikke synes mig at være nogen tilstrækkelig Opfordring hertil. Det bliver dog ved disse Arter nødvendigt at modificere de for Slægten Ophiacantha opstillede Charcterer noget, ligesom det ogsaa synes at fremgaa af foregaaende Arts Bygning, at enkelte af de Characterer, der have været anvendte ikke blot som Slægtscharacterer, men selv som Kjendemærker for større Afdelinger (f. Ex. Mundpapillernes Tal), i Grunden tør være af mindre Betydning i systematisk Henseende, end man tidligere har antaget, da de, som man ser, variere ikke blot hos samme Art, men selv vise sig ulige hos et og samme Individ.

C. Om Slægten Ophiopeltis Düb. & Koren og en ny herhen hørende Art: Ophiopeltis borealis G. O. Sars.

Düben og Koren characteriserede[1] sin Slægt *Ophiopeltis*, hvoraf man hidtil kun kjendte en eneste Art, *O. securigera* D. & K., væsentlig derved, at Skiven, med Undtagelse af de smale lineære Radialskjolde, er beklædt med en ganske nøgen Hud uden Skjæl eller andre Overfladedannelser. Allerede min Fader viste imidlertid[2], at denne Character ikke var ganske adæqvat, idet Skiven vel paa friske eller spirituøse Exemplarer ser aldeles nøgen ud, men dog ved Tørring viser overmaade tynde taglagte mikroskopiske Smaaskjæl. Til den eiendommeligt formede øxeformige

[1] Zoologiska Bidrag; Kgl. Vetenskaps-Akademiens Handlingar f. 1844, pag. 236.
[2] Oversigt over Norges Echinodermer, pag. 14.

Armpig finde vi ogsaa et fuldstændigt Homologon i den ligeledes fra de øvrige Armpigge afvigende mellemste Armpig hos *Amphiura filiformis* (Müll.), hvilken Art ogsaa stemmer overens med Ophiopeltis derved, at den mangler Fodpapiller. Min Fader har derfor udtalt den Anskuelse, at enten Slægten Ophiopeltis maa udgaa af Systemet og dens eneste Art O. securigera forenes med Amphiurerne, eller faa et videre Omfang, saa at den foruden den typiske Art ogsaa kan optage Amphiura filiformis (Müller). Denne sidste Anskuelse synes at vinde Bekræftelse ved den nedenfor beskrevne nye Art, der i enkelte Henseender synes at formidle Overgangen mellem disse 2 Former.

Ophiopeltis borealis G. O. Sars nov. sp.

Discus in junioribus pentagonus inter insertiones brachiorum leviter emarginatus, in adultibus sæpe forma plus minusve irregulari et inter insertiones brachiorum vario modo rotundato-productus, supine sqvamis minutis imbricatis etiam in speciminibus viventibus vel in spiritu vini conservatis distinctis obtectus. Scuta radialia qvam in specie typica multo breviora et latiora, dimidiam radii disci longitudinem minime asseqventia, elongato-subtriangularia, extus contingentia intus divergentia et cuneolo sqvamarum majorum disjuncta. Brachia valde flexibilia, non vero longitudine insveta insignia, diametrum disci septies vel sexies modo superantia. Scuta oralia rotundata, paulo latiora qvam longiora, extremitate aborali fere plana; scutum madreporaceum ceteris multo majus sed forma eadem. Scuta adoralia oralibus majora subtriangularia intus non contingentia. Papillæ orales binæ vel ternæ, qvarum par internum maximum, ceteræ multo minores et sæpe indistinctæ, tubercula modo minima formantes; ambulacrales nullæ. Scutella brachiorum dorsalia fere contingentia, rotundato-trigona, latiora qvam longiora, margine aborali rotundato-truncato, adorali obtuse angulato, lateribus muticis; ventralia contingentia, pentagona, longiora qvam latiora, margine aborali æqvaliter arcuato, adorali medio acute producto, lateralibus subrectis. Spinæ brachiales in articulis prioribus (4—7) utrinqve qvaternæ, in ceteris ternæ, omnes cute molli indutæ; spina 2da ab imo utrinqve enumerata ut in specie typica ceteris valde dissimilis, horizontaliter porrecta, complanata, securiformis, apice paulo dilatato, minus tamen qvam in O. securigera, et in dentes plures acuminatos, qvorum utrinqve interior lateraliter porrecta ceteris multo major, diviso. Spinæ ceteræ crassæ, subcylindricæ, longitudine fere eadem et dimidiam circiter brachii latitudinem æqvantes. Color disci fusco-coeruleus, brachiorum carneus. Diametros disci majorum 6 Mm.; longitudo brachiorum 40 Mm.

Habitat rara ad insulas Lofotenses in prof. 80—300 orgyar. fundo argillaceo, adqve Bodø prof. 80 - 100 orgyar.

Skjøndt i sin almindelige Bygning, Farve og Habitus meget lig O. securigera D. & K., er denne Art dog let kjendelig allerede ved første Øiekast ved sine langt kortere Arme, der kun ere 6—7 Gange saa lange som Skivens Diameter, medens de hos den typiske Art er 13—15 Gange saa lange, altsaa forholdsvis over dobbelt saa lange som hos nærværende Art. Ligeledes adskiller den sig strax ved de selv paa friske Exemplarer meget tydelige taglagte Smaaskjæl, hvormed Skivens Hud oventil er belagt, ligesom ogsaa ved en temmelig forskjellig Form af Radialskjoldene. Ved alle disse Characterer slutter den sig nærmere til Amphiurerne eller rettere til Arten *Amphiura filiformis* (Müller), der maaske, som ovenfor antydet, rettest burde skilles fra de øvrige Arter og henføres til nærværende Slægt, hvis Characterer da maatte undergaa en betydelig Modification.

Nærværende Art forekommer baade ved Bodø og Lofoten paa 80—120 Favnes Lerbund, paa begge Steder, som det synes, meget sparsomt. Et eneste ganske ungt Exemplar, paa hvilket den øxeformige Armpig endnu ikke har erholdt sin characteristiske stærke Udvikling, havde jeg allerede for længere Tid siden taget ved Lofoten paa det betydelige Dyb af 300 Favne. Den er opført blandt de af min Fader opregnede Dybvandsdyr som Amphiura nov. sp.?

D. Om Ophioglypha gracilis n. sp. og dens Forhold til Ophiocten Krøyeri Lütken og Ophiura abyssicola Forbes.

I den af min Fader givne Fortegnelse af Dybvandsdyr[1] er opført en Ophiuride under Benævnelsen *Ophiura abyssicola* Forbes. Ved den nøiere Undersøgelse, som jeg nylig har foretaget af denne Ophiuride, har det imidlertid vist sig, at den i et Par Punkter adskiller sig saa bestemt fra Forbes's Art, at en Identification af begge ikke godt synes mig at kunne ske. En Tid var jeg mere tilbøielig til at henføre vor Art til *Ophiocten Krøyeri* Lütken (eller, som den ifølge Prioritetens Love vel bør hede, *O. sericeum* Forbes), med hvem den i Virkeligheden synes at vise mange Overensstemmelser, men har efter en nøie Sammenligning med et i vort Museum opbevaret Exemplar af denne Art fra Grønland ogsaa maattet opgive denne Antagelse. Jeg er derimod nu kommet til det Resultat, at den her omhandlede Ophiuride tilhører en hidtil ubeskreven ny Art, der er af stor Interesse som dannende en tydelig Overgang mellem Slægterne Ophioglypha og Ophiocten. Nedenfor meddeles en udførlig Characteristik af Arten, hvortil jeg derpaa skal knytte nogle yderligere Bemærkninger.

Ophioglypha gracilis G. O. Sars, nov. sp.

Discus circularis supine planus inferne convexus, facie aborali et adorali margine acuto disjunctis. Superficies aboralis sqvamulis inæqvalibus, rotundatis, subimbricatis, nonnullis multo majoribus minoribus circumdatis et in rosæ formam dispositis, adoralis sqvamulis imbricatis subæqvalibus obtecta. Scuta radialia nuda, longe sejuncta, intus divergentia, forma semiovata, vix duplo longiora qvam latiora, margine interno recto, externo arcuato. Incisuræ ad insertiones brachiorum omnino obsoletæ, margine disci fere integro, vel indistincte modo ad basin brachiorum inflexo,

[1] Fortsatte Bemærkninger over det dyriske Livs Udbredning i Havets Dybder (Videnskabsselskabets Forhandlinger for 1868).

papillis utrinqve ad latera brachiorum 4—5 in medio intervallo longo interruptis et in seriem utrinqve obliqve infra vergentem dispositis ornatæ. Rimæ genitales etiam papilliferæ, papillis vero minoribus sed simul cum illis seriem continuam formantibus. Brachia longissima et tenuissima diametrum disci qvinqvies vel sexies superantia, extremitate fere filiformi. Scuta oralia magna et lævissima, paulo latiora qvam longiora, pentagona, margine aborali fere ad lineam rectam truncato, lateralibus parallelis, adorali angulum obtusum formante. Scuta adoralia angusta basin oralium non omnino amplectantia. Papillæ orales qvinæ vel senæ, ambulacrales singulæ. Pori ambulacrales intimi a rimis oris disjuncti. Scutella brachiorum dorsalia lata subqvadrangularia, margine postico minime dentato et medio obtuse angulato, ad basin brachiorum subcarinata, duo priora minuta, intimo non margine disci tecto supine in medio serie transversa brevi papillarum vel aculeorum brevium medio non interrupta armato. Scutella ventralia parva longe sejuncta, duplo latiora qvam longiora, margine aborali æqvaliter arcuato, adorali subrecto vel in medio breviter exserto; intimum ceteris multo majus, pentagonum, extus latius et obtuse angulatum, medio leviter constrictum, intus anguste truncatum, papillis brevibus ad latera pororum ambulacralium intimorum instructum. Spinæ brachiales utrinqve ternæ, ad basin brachii sat longæ et ad latera porrectæ, superioribus in articulis prioribus latitudinem brachii æqvantibus, extremitatem versus vero brachio appressæ et cito longitudine decrescentes, ita ut jam in articulo 6to dimidia parte breviores sint. Color supine atro-purpureus, nunc dilutior, nunc saturatior, disco maculis rotundatis sæpe colore saturatissimo ornato, scutis radialibus et facie ventrali albidis. Diametros disci majorum 9 Mm.; longitudo brachiorum 40—50 Mm.

Habitat sat freqvens ad insulas Lofotenses in prof. 200—300 orgyarum; ad Bodø prof. 150 orgyar. copiosissime; nec non in sinu Christianiensi ad Drøbak prof. 100—120 orgyarum.

Som man af ovenstaaende Beskrivelse vil have seet, viser denne Ophiuride stor Overensstemmelse med *Ophiocten Krøyeri*

Lütken. Saavel den almindelige Habitus (Skivens eiendommelige Form og de lange og spinkle Arme) som de fleste finere Detailler saasom Mundskjoldene, Mund- og Fodpapillerne, Armenes Plader og Forholdet af det inderste Par Ambulacralporer er næsten fuldkommen ligedan hos begge Former. Desuagtet kan nærværende Art ikke henføres til Sl. Ophiocten, saaledes som denne Slægt af Lütken er characteriseret, men maa betragtes som en ligesaa ægte Ophioglypha (Ophiura) som f. Ex. O. affinis Lütken, til hvilken Art den nøie slutter sig. Forholdet ved Armenes Insertion synes vistnok ved første Øiekast temmelig forskjelligt fra det for Sl. Ophioglypha normale, men viser sig ved nøiere Undersøgelse endnu mere forskjelligt fra samme hos Ophiocten. Af noget Indsnit i Skiven ved Armenes Insertion findes her saagodtsom ikke det mindste Spor, idet Skivens Rand paa dette Sted kun danner en neppe mærkelig jevn Indbugtning. Desuagtet udgaa ikke Armene som hos Ophiocten alene fra Skivens Bugside, men ligesaavel fra Rygsiden som hos de øvrige Ophioglypher. Skiveranden hvælver sig nemlig ikke som hos hin Slægt her ud over Armens Basis; men den inderste lille Armrygplade ligger fuldkommen i Høide med samme. Af Papiller findes her kun paa hver Side 4—5 adskilte i Midten ved et vidt Mellemrum. Disse Papiller danne en skraat nedadstigende Rad til hver Side af Armens Basis og fortsættes umiddelbart af en Rad betydelig finere Papiller, der i en større eller mindre Udstrækning kante Genitalspalterne. I Midtlinien bemærkes endnu oventil en isoleret Gruppe af tæt sammentrængte, i en enkelt kort vinkelformigt bøiet Rad ordnede Papiller eller smaa Pigge, der ved nøiere Undersøgelse sees at være fæstede til den lille inderste Armrygplade, uden imidlertid at naa dennes Sidekanter; ved den bagre Rand af samme Armrygplade er undertiden (hos store Exemplarer) ogsaa til hvert af de ydre Sidehjørner fæstet 2 tæt sammen staaende noget længere, divergerende Smaapigge. Dette er nu ganske forskjelligt fra hvad Tilfældet er hos Ophiocten Krøyeri, hos hvem, saavel efter Lütkens Angivelse som efter mine egne Undersøgelser af det paa vort Museum opbevarede Exemplar, den svage, men dog ganske tydelige Indbugtning af Skivens Rand over Armenes Insertion er kantet med en continuerlig (ikke i Midten afbrudt) horizontal Rad af Papiller, ligesom den ydre Rand af de 3 første Armrygplader viser lignende continuerlige Rader af Smaapigge. — Ogsaa fra *Ophiura abyssicola* Forbes [1], med hvem vor Art i sin ydre Habitus har stor Lighed, adskiller den sig i denne Henseende meget bestemt, og da Forbes synes at lægge særlig Vægt paa dette Forhold og i sin korte Diagnose specielt udhæver dette (sqvamis pectinatis ad radiorum origines binis 5—9 dentatis), maa man ogsaa antage, at hans Figurer, hvad dette Punkt betræffer, ere correcte. Saavel hans Fig. 11 som den stærkere forstørrede Fig. 9 vise nu et ganske tydeligt, skjøndt kort, vinkelformigt Indsnit ved Armenes Basis, og dette Indsnit er i næsten sin hele Længde kantet med Papiller, der kun i Midten ved et meget smalt Mellemrum ere afbrudte; udenfor disse Papillerækker og parallelt med disse findes en anden ligeledes i Midten (men her ved et betydeligt større Mellemrum) afbrudt Papillerække, henhørende til selve Armen og forestillende det andet Par af de af Forbes i hans Diagnose omtalte "sqvamæ pectinatæ". Som man vil se, er dette Forhold ganske og aldeles forskjelligt fra samme hos nærværende Art, medens det temmelig nøie svarer til Forholdet hos *O. affinis* Lütken. — Skivens Rygside viser hos vor Art ligesom hos Ophiocten Krøyeri et vist Antal større runde mørkere Pletter rosetformigt ordnede omkring et fælles Midtpunkt. Disse Pletter, der egentlig synes at forestille større Skjæl, omgives altid og adskilles fra hinanden, ligesom hos Ophiura abyssicola Forb. og O. affinis Lütken, af talrige meget smaa taglagte Skjæl. Nogen egen Overfladedannelse i Form af flade Korn, saaledes som Lütken skildrer det hos sin Ophiocten Krøyeri, har jeg derimod ikke kunnet adskille. Visnok ere Skjællene paa Rygsiden mindre skarpt begrændsede end paa Bugsiden og vise sig undertiden især paa friske Exemplarer ligesom udviskede eller skjulte af et Slags ydre Belæg; men nøiagtig det samme Forhold har jeg ogsaa fundet hos O.

[1] Linnean Transactions Vol. 19, pg. 146. Tab. 13, Fig. 8—14.

affinis Lütken, der idethele er den af alle Slægtens Arter, der kommer vor Art nærmest. Om Slægten Ophiocten, hvormed nærværende Art, skjønt en virkelig Ophioglypha, viser saa mange Overensstemmelser, vil herefter kunne bestaa, bliver vel et stort Spørgsmaal. Lütken selv har med sit sædvanlige klare Blik paapeget denne Slægts nøie Forvandtskab med Slægten Ophioglypha og har ogsaa[1] erklæret den som i Grunden "en abnorm Underafdeling eller et Slags Sideudvikling fra Slægten Ophiura (Ophioglypha)."

E. Om 2 nye Echinider.

De betydelige Formforandringer, som de egentlige Echinider undergaa under sin Væxt og det hermed i Forbindelse staaende forandrede Forhold af de enkelte Plader, hvoraf Echinidernes Skal er sammensat, fremdeles den ikke ubetydelige individuelle Foranderlighed, som er iagttaget hos visse Arter, gjør det meget vanskeligt for de herhen hørende Former at opstille sikre og præcise Artsmærker. Et nøiere alsidigt Studium af disse Dyr vilde derfor vistnok være i høi Grad ønskeligt, og det vil vist heller ikke slaa feil, at man ved et saadant Studium vilde kunne opnaa en sikrere Basis ved Arternes Bestemmelse, end vi for Tiden ere i Besiddelse af. Vistnok har Düben og Koren i sin udmærkede Afhandling: "Øfversigt af Skandinaviens Echinodermer" offret denne Dyregruppe en særlig Opmærksomhed og har baade gjort opmærksom paa Upaalideligheden af enkelte tidligere anvendte Mærker og udhævet saadanne Characterer, der maa ansees for mere constante og følgelig bedre anvendelige ved Artsdistinctionen; men om end disse væsentlig ydre Kjendemærker ville være tilstrækkelige til at adskille de da kjendte Arter fra hinanden, kan det dog tænkes muligt, at de ikke i ethvert Tilfælde, hvor det gjælder at adskille en Art fra en anden, vil kunne slaa til. Ved at undersøge en Del paa min sidste Reise samlede Echinider har jeg stærkt følt denne Mangel i vor Kund-

[1] Additamenta ad historiam Ophiuridarum I, pg. 52.

skab om Echiniderne og Nødvendigheden af et fornyet Studium af denne eiendommelige Dyregruppes Organisation. Desværre kan jeg ikke nu levere noget forøget Bidrag hertil, da jeg fordetmeste kun er i Besiddelse af tørrede Specimina, men haaber paa min forestaaende Reise til Finmarken at faa Anledning hertil. Foreløbig vil jeg kun, saa godt jeg kan, efter tidligere anvendte Characterer forsøge at characterisere 2 Former, som jeg anser for nye, forbeholdende mig senere at supplere, hvad der yderligere kan anføres for disse Formers Gyldighed som selvstændige Arter.

1. *Echinus depressus* G. O. Sars, nov. sp.

Testa valde depressa, facie adorali plana, apice paulo producto, pallide flavescens, apice et fasciis 20 verticalibus, partem medianam tessellarum ambulacralium et interambulacralium occupantibus, colore paulo saturatiore, fusco-virescentibus, in facie adorali vero evanidis ornata. Pororum ambulacralium paria terna. Tubercula in superiore parte valde inæqvalia, primaria ceteris multo majora et valde prominentia, in areis interambulacralibus semper series duas continuas formantia, in areis ambulacralibus vero sæpe in una vel altera tessella deficientia et secundariis substituta. Tessellæ interambulacrales ambulacralibus plus duplo latiores et præter tuberculum magnum primarium secundaria 5—6 multo minora tuberculaqve numerosa alia minima nodiformia imprimis circa tuberculum primarium conferta præbentes. Tubercula faciei adoralis crebriora et minus inæqvalia, duobus tribusve cujusqve tessellæ interambulacralis subæqvalibus et primariis faciei superioris vix minoribus. Tessella madreporacea genitalibus et forma et magnitudine simillima, spatio modo parvo mediano irregulari poroso; pori genitales ab extremitate exteriore tessellarum remoti fere mediani; tessellæ intergenitales parvæ et angustæ vix latiores qvam longiores. Spinæ numerosæ præsertim in facie adorali, tenuissimæ, inæqvales, primariæ longissimæ, versus faciem inferiorem dimidium testæ diametrum subæqvantes, cylindricæ, capitulo crasso et spina ipsa fere duplo latiore, ad basin fusco-virescentes apice rubro, secundariæ pallide flavescentes.

Diametros testæ 65 Mm.; altitudo 33 Mm.; spinarum majorum ongitudo 30 Mm.

Habitat rarus in sinu Saltenfjord prope Bodø in prof. 150—200 orgyar. fundo argillaceo.

De eneste Arter, hvormed nærværende Form maaske vilde kunne forvexles, ere *E. Flemingii* Forbes og *E. norvegicus* Düb. & Koren, og jeg skal derfor i Korthed paapege de Forskjelligheder, den viser fra disse to Arter. Ligestore Exemplarer af *Echinus Flemingii* ere af en total forskjellig Form, idet Skallen allerede i denne Størrelse har antaget den for denne Art characteristiske høie Form. I Skallens blege Grundfarve stemme vel begge Arter overens, og ligesom hos E. Flemingii findes her ogsaa 20 fra Apex udstraalende verticale stærkere farvede Baand, der indtage Midten af hvert Sæt Ambulacral- og Interambulacralplader; men disse Baands Farve er meget forskjellig. Hos E. Flemingii ere de nemlig altid smukt røde, medens de hos nærværende Art ere smudsigt gulbrune eller olivenfarvede. De primære Tuberklers Form og Anordning stemmer vel temmelig nøie overens hos begge Arter; derimod ere de secundære og endnu mere de bitte smaa knudeformige Tuberklers Tal her meget større. Madreporpladen er hos E. Flemingii tydeligt fremstaaende, i Størsteparten af sin Udstrækning porøs og ogsaa noget større end Genitalpladerne, noget, der, som af Diagnosen vil sees, ikke er Tilfældet hos vor Art. Ogsaa er Intergenitalpladerne hos E. Flemingii betydeligt større og bredere, ligesom Genitalporerne hos nærværende Art ere rykkede usædvanligt langt fra Genitalpladernes ydre Ender, saa at de komme omtrent til at ligge i Centrum af samme. Piggene ere hos E. Flemingii i Overensstemmelse med Tuberklernes ringere Tal langt færre og de primære langt grovere og tykkere med Capitulum ikke synderligt bredere end selve Piggen, der er jevnt afsmalnende mod Enden eller af conisk Form. Endelig er disse primære Pigges Farve meget ulige hos begge Arter. Hos E. Flemingii ere de altid ved Basis røde og ud mod Spidsen gulagtige eller grønagtige; hos E. depressus indtager derimod den røde Farve omvendt Spidsen, medens Basis er grønagtig farvet. — Fra *E. norvegicus* Düb. & Koren adskiller nærværende Art sig først og fremst ved sin langt betydeligere Størrelse. Selv de kjæmpemæssige Individer af denne i Regelen pygmæiske Art, som af Prof. Rasch bleve tagne paa den mærkelige langt ud i Havet udenfor Søndmøres Kyster beliggende Grund, Havbroen kaldet, og som af Düben og Koren l. c. ere nærmere omtalte, ere dog betydeligt mindre end nærværende Art og vise ogsaa en forholdsvis mindre nedtrykt Form af Skallen. Ligeledes adskille disse Individer sig fra nærværende Art ved langt færre Pigge, og som Følge deraf ogsaa færre Tuberkler, paa den øvre Side af Skallen. De primære Tuberkelrader ere her ikke blot afbrudte paa Ambulacralpladerne, men ogsaa paa Interambulacralpladerne, hvilket ligesaalidt er Tilfældet hos nærværende Art som hos E. Flemingii eller overhovedet nogen af vore øvrige Echinus'er. Endelig er saavel Piggenes Form som Farve forskjellig hos begge Arter.

Kun 3 Individer af nærværende Art, alle af ens Størrelse, toges i Saltenfjorden ved Bodø paa 150—200 Favnes Dyb, haard Lerbund. Jeg har imidlertid tidligere tilfældigvis i Dynd, fra de store Dybder ved Lofoten fundet enkelte usædvanlig store Echinuspigge, som ved nøiere Undersøgelse vise sig fuldstændigt at stemme overens med Piggene hos nærværende Art, der saaledes ganske sikkert ogsaa lever i Vestfjorden.

2. *Toxopneustes pallidus* G. O. Sars, nov. sp.

Testa depressa, pallide flavescens, medio arearum et ambulacralium et interambulacralium paulo saturatius colorato. Pororum ambulacralium paria *sena*. Tubercula et in superiore et in inferiore parte valde inæqvalia, primaria ceteris multo majora et series 20 continuas ab apice usqve ad aperturam testæ inferiorem distinctas formantia. Tessellæ interambulacralia præter tuberculum primarium secundaria 4—6 et inter ea tubercula numerosa alia ad ordines duos vel plures pertinentia præbent. Inter tubercula primaria arearum ambulacralium series duplex tuberculorum secundariorum regulariter alternantium ab apice usqve ad aperturam inferiorem testæ distincta. Tessella madreporacea regulariter triangularis et parum prominens. Spinæ numerosæ breves, pallide virescentes apice plerumqve ochraceo vel carneo, primariæ ceteris parum longiores sed multo crassiores, conicæ costis longitudinalibus modo 18. Pedicellariæ numerosissimæ imprimis in superiore parte structura multo robustiore qvam in T. Drøbachiensi. Diametros testæ majorum 60 Mm., altitudo 32 Mm.; spinarum majorum longitudo 10 Mm.

Habitat non infreqvens ad insulas Lofotenses adqve Bodø in prof. 30—40 orgyarum.

Ambulacralporernes Tal, som altid har været anseet som en særdeles vigtig og constant Character, synes strax skarpt at adskille nærværende Art fra den typiske Art, T. drøbachiensis (Müller). Her findes nemlig constant hos alle de af mig undersøgte Individer, selv hos de allermindste, 6 Par i hver Rad, medens alle Forfattere ere enige i at tilskrive T. drøbachiensis kun 5 Par Porer. Jeg maa dog bemærke, at jeg en sjelden Gang ogsaa hos T. drøbachiensis eller hos Exemplarer, som jeg ialfald foreløbig henfører til denne Art, har fundet 6 Par Porer i en eller flere Rader. Dette synes imidlertid at høre til Undtagelserne; 5 Par Porer synes for denne Art at være det normale, ligesom 6 Par hos nærværende Art. Omvendt har jeg hos denne sidste en og anden Gang i en Rad fundet ikke mindre end 7 Par Porer. Til denne Character kommer imidlertid endnu en Del andre, der synes at godtgjøre nærværende Forms Gyldighed som en selvstændig Art. Skallens Farve, der af Düben og Koren er anseet som en af de mest constante og lettest opfattelige Characterer til Arternes Adskillelse, er her ganske og aldeles forskjellig fra samme hos den typiske Art. Hos T. drøbachiensis er denne altid, hvorledes end Piggernes Farve er, dyb mørkeviolet og inpregnerer stærkt det Vand, hvori den skylles, naar man vil have Skallen decorticeret. Hos nærværende Art er den derimod ganske lys og bleg som hos Echinus norvegicus og meddeler knapt nogen Farve til det Vand, hvori den skylles. Fremdeles ere de primære Tuberkler her altid betydeligt større end de secundære og danne, ligesom hos *Echinus virens* Düb. & Koren, 20 regelmæssige verticale Rader, der selv paa den nedre Side lige indtil Skallens mediane Aabning ere fuldkommen distincte. Madreporpladen, der hos T. drøbachiensis er særdeles stærkt ophøiet eller convex og af uregelmæssig tilrundet Form, er her kun lidet udviklet og af regelmæssig trekantet Form. Endelig ere de primære Pigge baade hvad Form og Farve angaar forskjellige og kun forsynede med 18 Længderibber, medens disses Tal hos T. drøbachiensis er meget betydeligere. Paa et Par af mine tørrede Exemplarer vare endnu de større Pedicellariers kalkagtige Capitulum i Behold. De ere tilstede her i et ganske overordentligt Antal, især paa den øvre Side, og vise et fra samme hos T. drøbachiensis temmelig afvigende Udseende, idet de 3 Kjæver eller Tænger ere langt kortere og plumpere.

Nærværende Art forekommer ikke saa ganske sjeldent ved Lofoten og Bodø, men aldrig før i en Dybde af 20—30 Favne; medens T. drøbachiensis som bekjendt er en ægte littoral Form, der endog ofte ved laveste Fjære lades ganske tør. Sammen med nærværende Art forekommer imidlertid ogsaa forskjellige Former af hvad jeg indtil videre vil antage for T. drøbachiensis, ja jeg har endog truffet smaa Exemplarer lige ned til 300 Favnes Dyb. Imidlertid vil jeg foreløbig bemærke, at jeg har troet at finde flere constante Uligheder hos enkelte af disse Dybvandsformer fra den littorale Form, saa at det maaske tør hænde, at her endnu er skjult en 3die Art af Slægten. Dette vil jeg imidlertid først med Sikkerhed kunne afgjøre ved de fornyede Undersøgelser, jeg paa min forestaaende Reise agter at anstille over vore Echinider.

Tillæg.

Som Tillæg til denne Afhandling vil jeg her endnu meddele Diagnoser af 4 andre, allerede af min Fader adskilte nye norske Echinodermer[1], som udførligt ville blive beskrevne og afbildede

[1] Jeg tror ved denne Leilighed at burde bemærke, at den af min Fader (Vid.-

i det nu under Arbeide værende 3die Hefte af Fauna littoralis Norvegiæ, og hvoraf de 3 allerede tidligere af min Fader har været nævnt, men ikke nøiere characteriserede. Diagnoserne ere alle ordret gjengivne efter min Faders efterladte Manuskripter.

1. *Goniaster hispidus* M. Sars, nov. sp.

Corpus pentagonum, dorso convexo, ventre plano, radio disci ad eundem brachiorum (in individuo unico observato, verosimile juvenili, 11 Mm. magno) ut 1 : $1^1/_5$, sinubus inter brachia apice obtuse rotundata perparum excavatis. Dorsum totum, etiam scuta marginalia superiora et pars dorsalis scutorum marginalium inferiorum, spinulis minutis cylindricis obtusis dense tectum. Scuta dorsalia marginalibus minora, rotundata, numerosa; scuta ventralia dorsalibus majora, pauca, polygonalia, spinulis minutis subulatis subseriatis minus dense tecta. Spinæ ad sulcos ambulacrales 3—4 seriatæ, subulatæ, interiores majores, exteriores minores. Tessella madreporiformis centro disci paulo vicinior qvam margini. Color pallide roseus.

Habitat ad insulas Lofoten (Skraaven) profunditate 200—300 orgyarum.

2. *Pteraster multipes* M. Sars, nov. sp.

Om arktiske Dyreformer i Christianiafjorden: Vid.-Selsk. Forhandl. f. 1865, pag. 200.

Discus tumidiusculus, brachia breviora, radio disci (in tripollicari) ad eundem brachiorum ut 1: $1^1/_2$. Paxilli dorsales velut P. pulvilli, sed majores, in centro apicis aciculis coronati, acicula mediana ceteris longior multoqve validior. Tessella madreporiformis costis ornata radiantibus, utrinqve dense obliqve striatis. Tentacula respirationis iis P. pulvilli similia, sed majora, cylindrica apice truncato, lobulis obsita rotundatis, ad apicem crebrioribus inferneqve rarioribus, in verticillis 4—5 dispositis. Pedes suctorii in sulcis

Selsk. Forh. f. 1867, pg. 19) kortelig som en ny Art, *Thyonidium scabrum*, omtalte Holothuride af ham senere er bleven erkjendt kun for en Unge af *Holothuria intestinalis* Ascanius.

ambulacralibus latis magni, numerosissimi (circiter 150 in qvoqve radio), qvadriseriales. Pinnæ transversales pedes suctorios numero æqvantes, alternatim longiores pauloqve breviores, spinis 5 munitæ, exterioribus longioribus; margine libero lobulis ornato incrassatis carnosis, supra spinas longe prominentibus, lingulatis seu sublanceolatis, irregulariter sinuosis vel plicatis. Pinna transversalis intima cum eadem de sulco ambulacrali vicino margine laterali connata itaqve angulum oralem formans. Spinæ marginales velut in P. militari et P. pulvillo sat longæ. — Color dorsi sordide fusco-flavus, margine cinereo-albido, ventris flavido-albus lineis parallelis aurantiacis a pinnis transversalibus ad marginem disci brachiorumqve currentibus; pedes suctorii læte violacei apice albo. Diametros tripollicaris.

Habitat rarissimus in freto Drøbachiensi, profunditate 60 orgyar.[1]

3. *Oligotrochus vitreus* M. Sars, nov. gen. et spec. e Holothuridarum apneumonum et apodum ordine.

L. c. pg. 200.

Charact. gener. Corpus crassiusculum seu haud multo elongatum, teres, subcylindricum aut subfusiforme, cute tenui, glaberrima, præter corpuscula perpauca minutissima calcarea, rotiformia, multiradiata, singula (non acervatim accumulata), sparsa, non petiolata, sed cuti immersa, laminis calcareis destitutum. Discus oralis paulo inclinatus. Tentacula 12, in partem eorum basalem qvasi in vaginam retractilia, non autem in corpus abscondenda, brevissima, elongato-conica, utrinqve digitata. Musculi corporis longitudinales 5 gracillimi, duo dorsales (bivium) magis approximati qvam ceteri fere æqvidistantes (trivium). Intestinum ansam duplicem componens. Os anticum, subventrale; anus posticus, circularis, haud lobatus. Vesica Poliana unica; tubercula madreporiformia 1—3. Tubi genitales ramosi, breves, crassi fasciculos

[1] Foruden det eneste af min Fader ved Drøbak fundne Exemplar, der ligger til Grund for ovenstaaende Diagnose, er senere endnu 2 andre Exemplarer af samme mærkværdige Art tagne paa 2 vidt adskilte Lokaliteter ved vor Kyst, det ene i Hardangerfjorden af Asbjørnsen, det andet ved Bodø af mig selv.

duos componentes. Annulus calcareus pharyngeus bene evolutus, humilis, e laminis ut videtur 10 constans, intime connatis, fere æqve latis, ventralibus altioribus, dorsalibus humilioribus, margine anteriore cuspidibus 12 triangularibus ornato.

Charact. spec. Corpus antice parum, postice magis angustatum, paulo curvatum, dorso convexiore, prorsus hyalinum, subrigidum, 50 Mm. longum, medio 12—13 Mm. crassum. Tentacula utrinqve digitis 4, raro 5, parvis, basin versus brevioribus. Corpuscula calcarea rotiformia solum modo prope extremitates corporis sita, minutissima, oculo nudo inconspicua, subconcava seu subcupuliformia, multiradiata, dentata; annulo rotæ e particulis æqvalibus (17—24) composito, unaqvaqve dente magno elongato-conico introrsum verso munita; radiis qvam illis paucioribus (10—16), cylindricis, subarcuatis, in umbonem medium convergentibus.

Habitat haud freqvens in sinu Christianiensi ad Drøbak et Vallø in profunditate limosa 50—200 orgyarum, nec non ad Skraaven, insulam Lofotensem, usqve ad 300 orgyas.

4. *Stichopus natans* M. Sars, nov. sp.

Holothuria natans, M. Sars, Om Echinodermer og Coelenterater fundne ved Lofoten; Vid.-Selsk. Forhandl. f. 1867, pg. 20.

Corpus elongatum, undiqve pallide carneum, subpellucidum, dorso convexo papillis ambulacralibus rarioribus elongato-conicis obtecto, seriem externam utrinqve longitudinalem formantibus, aliis minoribus subsparsis aut series duas interiores irregulares formantibus; margine circumcirca dorsum a ventre separante (margine dorso-ventrali) applanato, fere membranaceo subacuto et serie continua pedum ambulacralium breviorum conicorum ornato; ventre plano pedibus ambulacralibus numerosis tenuioribus, cylindricis, apice truncatis, in serie laterali utrinqve dispositis, medio pedibus destituto. Os inferum tentaculis 20 cylindricis, apice peltato-divisis, carneis circumdatum; anus subdorsalis. — Corpuscula calcarea cutis tenera, disco crucis instar formato, cujus apices dilatati et foraminibus 3—5 perforati rarissime trabeculis arcuatis inter se conjuncti sunt et ita, velut in Holothuria tremula, laminam subcircularem angulatam formantes. E medio crucis surgit corona verticalis qvadrangularis seu e ramis 4 (rarius 3 aut 2) constans trabeculis transversalibus 3—5 junctis, altissima (altitudine diametrum laminæ æqvante aut fere duplo superante), in superficie cutis valde prominens (elevata), angusta, non spinulosa. Corpuscula calcarea C formia (ut in aliis speciebus hujus generis) nulla. In cute pedum tentaculorumqve aciculæ calcareæ, densissime accumulatæ, transversales, longæ, cylindricæ, utrinqve angustatæ, curvatæ, tuberculis minutis conicis obsitæ. — Longitudo 5pollicaris.

Habitat ad insulas Lofoten, profunditate 250—300 orgyarum, nec non ad Manger et in sinu Hardangerfjord prof. 200—300 orgyarum.

Bidrag til Californiens Amphipodefauna.

Af **Axel Boeck.**

(Foredraget i Mødet den 10de Marts 1871).

Professor Esmark, der i længere Tid har opholdt sig i Californien, især i St. Francisco, for at samle Naturalier for vor zoologiske Samling, sendte mig for en kort Tid siden i et Blikrør en liden Samling af Amphipoder, som han havde fundet der ved Strandbredden. Han ledsagede den med et Brev, hvori han bad mig at bestemme Arterne og beskrive de blandt dem, der maatte være nye for Videnskaben. Da St. Francisco ligger paa en Kyststrækning, der beskylles af det stille Ocean og paa en langt sydligere Breddegrad end Christiania, nemlig mellem den 37te og 38te ^{0}, saa vilde en forøget Kundskab til Strandfaunan paa dette Sted være af megen Interesse for Dyrgeographien. Man maatte vente der at finde Former, som meget afvige fra dem, som vi kjende fra vore Kyster. Det var derfor med en vis Spending, at jeg aabnede Blikrøret og adskilte de indlagte Arter. Der fandtes i det Hele syv forskjellige Former af Amphipoder, der alle paa en enkelt Undtagelse nær, stemmede saa meget overens med de her ved Kysten levende, at jeg ved den første Gjennemmønstring ansaa dem for identiske. Dog ved nøiere Undersøgelse fandt jeg, at de alle vare specifik forskjellige fra vore Arter, men dog af et saa overensstemmende Præg, at Beskrivelse uden nøiagtige Tegninger ikke vilde være tilstrækkelig. Flere af Arterne maa jeg anse for at være nye, medens to stemme i det Væsentlige overens med to af William Stimpson beskrevne, saaat jeg maa formene, at de ere de samme som de af ham allerede opstillede, skjønt hans Beskrivelser ikke ere saa udførlige som ønskelig kunde være, og svare ikke heller i alle Punkter til de af mig undersøgte Exemplarer.

Allerede for henved tyve Aar siden har Amphipoderne ved Californien og de nærliggende Lande fundet sine Bearbeidere. Professor Dana har i *Proceedings of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia, vol. VII. pag. 175—177*, i en Afhandling under Titel af *Catalogue and Descriptions of Crustacea, collected by Dr. John Leconte*, beskrevet tre nye Arter, nemlig: Allorchestes angustus, Orchestia Californiensis og O. Pickeringii. Akademikeren Statsraad Brandt i St. Petersburg har i det samme Aar i *Bulletin physico-mathém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, IX. pag. 311*, beskrevet Megallorchestia Californiana fra Bogeda Bugten ikke langt fra St. Francisco og afbildet den paa Pl. 1, fig. 1—6. I Aaret 1856 beskriver Professor W. Stimpson i *Proceedings of the California Acad. of Natural Sciences, vol. 1, pag. 87—90*, nogle Crustaceer fra Californien, hvoraf følgende ere Amphipoder: Caprella Californica, Corophium spinicorne, Orchestia Traskiana og Allorchestes seminuda, samt desuden Mæra confervicola fra Puget Sound. I Aaret 1857 beskriver han i *Journal of the Boston Society of natural History, vol. VI*, de samme og tilføier følgende nye: Ericthonius rapax, Allorchestes plumosus og Phoxus grandis, alle fra St. Francisco, og desuden Corophium salmonis fra Puget Sound. Fra dette Sted, hvis Beliggenhed jeg ikke har kunnet finde paa noget Landkort over Californien, men som maa ligge i dette Land eller ganske nær derved, har Professor James Dana beskrevet, i *Crustacea of the united States Exploring Expedition 1853*, følgende Arter: Orchestia scabripes, O. Pugettensis, Allorchestes Pugettensis og Iphimedia Pugettensis. Langt nordenfor Californien ved de forhenværende Russiske Besiddelser, Atcha og Unlaschka, og det noget sydligere liggende Sitka, omtrent under 57° nordlig Bredde, blev der af Hr. Wosnessenski fanget Amphipoder, som ere beskrevne af Akademikeren Brandt i *Middendorffs Reise in den aüssersten Norden und Osten Sibiriens, B 11. Zoologie 1851.* Disse ere: Gammarus Sitchensis og G. Atchensis. Paa denne Strækning af det stille Havs Kyst fra Californiens søndre Ende til Atlaska er der af de anførte Forfattere i det Hele beskrevet 20 Arter, henhørende til 9 forskjellige Slægter; thi Stimpson har senere henført den af ham i Aaret 1856 beskrevne Mæra confervicola til Slægten Gammarus Fabr., hvorved hiin første Slægt falder bort. Disse Slægter findes alle paa een Undtagelse nær, nemlig Megallorchestia Brandt, der er synonym med Orchestoidea Nicolet, ved Norges Kyster. Af de af mig undersøgte 7 Arter fra St. Francisco henhøre de to til Slægten Caprella Lam., en til Slægten Cerapus Say (Ericthonius Milne-Edwards), en til Podocerus Leach, en til Amphithoë Leach, en til Paramphithoë Bruzel. og endelig en til Metopa Boeck. Saaledes bliver nu Antallet af Slægterne forøget med fire og Arternes Antal med fem nye; thi den ene Art Caprella maa jeg ansee for identisk med C. californica Stimpson, og den til Slægten Cerapus henhørende Art identisk med den af ham opstillede Ericthonius rapax. Fra den anden Side af det stille Hav, fra russisk Asien, fra Japan og China ere Amphipodeformerne blevne undersøgte af Brandt, de Haan og Stimpson, af hvilke især den sidste har beskrevet mange Arter. Af disse er der imidlertid ikke nogen, der tilhører en Slægt, hvoraf Arter ikke ere fundne ved den norske Kyst. Disse Kjendsgjerninger henvise til, at Amphipoderne maaske meget mere end de andre Ordener af Crustaceerne og maaske mere end de fleste andre lavere, i Søen levende Dyreformer, ere over den hele nordlige Jordhalvdeel af et meget eensartet Præg. Heller ikke Amphipoderne fra den sydlige Halvkugle synes meget at afvige fra den nordliges, naar man undtager Hyperiderne, der i de sydlige varmere Have optræde i en stor Rigdom og ofte i meget eventyrlige Former. Der er heller ikke fra Sydamerika, det indiske Hav og Kysterne af Nyholland beskrevet mange fra vore forskjellige Slægter, og kun Dana's Slægt Clydonia og Icelius have et mere afvigende Præg. Heller ikke blandt de Amphipoder, jeg har havt Anledning til at see fra Vestindien og Sydafrica, findes der mange Former, der meget afvige fra vore; der er vistnok enkelte, der generisk maa skilles fra vore Slægter, men disse ere ikke af noget særegent Præg, og de fleste Arter maa henregnes til Slægter, der ere repræsenterede ved vore Kyster. Saaledes synes det for Øieblikket, som om Amphipoderne endog i alle Jordens Have have en større Overeensstemmelse med hinanden, end Tilfældet er inden nogen anden Orden af Crustaceerne, som er kjendt og bearbeidet med nogen større Fuldstændighed. Paa den anden Side kan man ikke med Professor Krøyer antage, at Norden og især de nordligste Have skulle være Centralpunktet for denne Orden, idet den der skulde optræde ikke alene med den største Rigdom af Individer og det af betydeligere Størrelse end paa sydligere Breddegrader, men ogsaa med en meget større Formrigdom. Jeg har tvertimod fundet, at Middelhavet efter det Antal Arter, som er mig bekjendt gjennem Litteraturen og efter egen Undersøgelse, er rigere end Norges Kyst, som dog nu for Øieblikket kan opvise et større Antal af beskrevne Arter end noget andet Land og næsten tre Gange saa mange som Grønland.

Gen. I. Caprella. Lamarck. 1801.

Spence-Bate anfører ikke i *Catalogue of the specimens of Amphipodous crustacea in the Collection of the British Museum, 1862*, blandt Charactererne for Slægten, at Mandiblerne mangle Palper. Dette er dog et af de vigtigste Kjendetegn, hvorved den skiller sig fra Slægten Ægina Kroyer, som han med Uret har stillet som Synonym til Caprella. Krøyer har dog allerede i *Naturhistorisk Tidsskrift, 1 R. IV B., S. 490*, fuldkommen udredet Slægterne af Familien Caprellina og fastsat deres Characterer, saa at Intet for Øieblikket kan tilføies. Saaledes er den af mig i *Crustacea amphipoda borealia et arctica, 1870*, opstillede Characteristik fuldkommen overeensstemmende med Krøyers.

Til denne Slægt henhører to af de af Prof. Esmark fundne Arter, hvoraf den ene allerede er kjendt, den anden er ny. Disse ere Caprella californica Stimpson og Caprella verrucosa, n. s.

Caprella californica. Stimpson 1866.

Caprella californica. Stimpson. Proc. Californ. Acad. Nat. Sci. 1, 89. 1866.

Caprella californica. Stimpson. Crustacea and Echinodermata of the Pacific shores of North-America, pag. 73. Journ. Bost. Soc. Nat. Hist vol. IV. 1857.

Dyrets Længde er hos ♂ fra Hovedet til Halen 16mm, hos ♀ 13—14mm. Legemet er ligesom hos C. linearis Lin. (C. lobata Müll.) meget forskjelligt hos ♂ og ♀. Hos den første er det særdeles forlænget, Hovedet er ovenpaa væbnet med et stærkt fortil krummet Horn. Første og andet Legemsled ere omtrent lige lange, det sidste noget fortykket mod den bagre Ende, hvor andet Fodpar er fæstet. De to følgende Led ere meget korte, lige lange, og tilsammen saa lange eller ubetydelig længere end andet Led; det femte Led er længere end det foregaaende, men kortere end de to næst foregaaende og meget længere end de to sidste Led tilsammen. Hos den yngre ♂ ere derimod første og andet Legemsled kortere, dog længere end det 3die Led. Hos ♀ er det første Led temmelig kort, meget kortere end andet Led, som er tykkest i den forreste Deel, hvor første Fodpar er fæstet; tredie og fjerde Led tilsammen ere meget længere end de andre Led og forsynede med en stor Rugepose. De tre bagre Led ere hos ♀ undertiden forsynede med Torne, som ikke fandtes paa noget voxent Exemplar af ♂, men kun paa et yngre. De øvre Følere ere hos ♂ særdeles forlængede og naae, naar de bøies bagover, til femte Legemsled. Deres første Skaftled er mere end en Trediedeel kortere, men meget tykkere end andet og omtrent saa langt som det meget tynde tredie Led. Svøben er længere end Skaftets tredie Led og dannes af 16 Led hos ♂ og af 10 hos ♀. De nedre Følere ere hos ♂ meget kortere end de øvre og naae frem til noget over Midten af de øvre Føleres andet Skaftled; deres tredie og fjerde Led ere omtrent lige lange, og Svøben, hvis 2det Led neppe er en Fjerdedeel af første Leds Længde, er ubetydelig længere end sidste Skaftled. Følerne ere i den nedre Rand forsynede med lange Børstebundter. Hos ♀ ere derimod Følerne, især de øvre, meget kortere end hos ♂ og naae ikke, naar de bøies bagover, til femte Led af Legemet; andet Skaftled er ikke meget længere end første, og tredie er meget kortere. Hos den yngre ♂ er ogsaa tredie Skaftled kortere end første. De nedre Følere ere hos ♀ i Forhold til ♂ meget længere og naae frem foran det øvre tredie Skaftled. Første Fodpar er eens hos begge Kjøn og ligner fuldkommen det samme hos C. linearis. Andet Fodpar er hos ♂ særdeles forlænget. Det første Led er næsten saa langt som det Legemsled, hvortil det er fæstet, og forlænger sig nedad i det forreste Hjørne til en stærk Torn. Haanden er saa stor som første Led, bliver bredere udad og er næsten kølleformig og afrundet i den ydre Ende; den øvre Halvdeel af den bagre Rand er væbnet med 3 Tænder, de to øverste smale, medens den tredie er bred triangulær. Kloen, der udspringer fra Enden af den bagre Rand, er meget stærk samt væbnet med en lille Tand i den øvre Deel af den bagre Rand. Hos den yngre ♂ er Fodparrets første Led kortere end det andet Legemsled og kortere end Haanden, som ikke er saa smal. Hos ♀ er dette Fodpar meget kort; første Led er meget kortere end andet Legemsled, og meget kortere end den ovale Haand, der kun er væbnet i den bagre, længere Rand med to smaa Tænder. Aandeblærerne ere af en forlænget oval Form. De tre bagre Fodpar tiltage efterhaanden i Længde og ere kortere, og Ledene ere meget bredere end hos C. linearis. Det, der er fæstet paa femte Legemsled, er det korteste; dets første Led er kun lidt længere end bredt, og den nedre, bagre Vinkel er udtrukket til en Torn; fjerde Led er omtrent saa langt som bredt. Haanden er noget kortere end de foregaaende Led tilsammen og er noget mere end dobbelt saa lang som bred. Griberanden er forsynet med Børster. Paa det sidste Fodpar ere Ledene meget længere og smalere.

Denne Art er taget i flere Exemplarer i Nærheden af St. Francisco.

Jeg er ikke i Tvivl om, at denne er den samme som Stimpsons Art. da de begge ere tagne paa samme Sted. Alligevel er der meget af hans Beskrivelse, som ikke passer; saaledes findes ikke paa Esmarks Exemplarer de skarpe Tuberkler paa hver Side af de gjællebærende Segmenter; heller ikke stemmer hans Beskrivelse af andet Fodpars Haand overeens med den paa de beskrevne Exemplarer.

Caprella verrucosa, A. Boeck. nov. sp.

Af denne Art fandtes kun to Exemplarer; det ene — ♂ — maalte 8^{mm}, det andet 5^{mm}. Legemet er af en meget stærk robust Bygning, overalt dækket med meget smaa Tuberkler, der have et glanduløst Udseende. Hovedet er væbnet med et noget fortil krummet spidst Horn. Første Legemsled er meget kort og er i Enden af den øvre Rand forsynet med en stærk, i Enden afrundet Knude. Andet Led er omtrent en Trediedeel længere end første og bliver bredere mod den bagre Ende, hvor andet Fodpar er fæstet; paa Midten og Enden af den øvre Rand er det forsynet med to meget store Knuder, og en lignende dækker Udspringet for andet Fodpar. De to følgende Led ere indbyrdes omtrent lige lange og saa lange som andet Led; de ere paa Ryggen væbnede med tre stærke Knuder, en ved Ledets Begyndelse, en paa Midten og en i Ledets Ende, samt med en meget bred Knude over Udspringet af Aandeblærerne. Femte Legemsled er længere end de to efterfølgende, men kortere end de to foregaaende Led, og er paa Ryggen væbnet med 2—3 Par Knuder, ligesom de to følgende Led ere væbnede med to Par. De øvre Følere ere korte, idet de bøies tilbage; de naae ikke ned til Enden af andet Legemsled; deres første Skaftled er omtrent dobbelt saa langt som tykt, det andet er længere og smalere, og det tredie er meget kortere end det første, knapt halvt saa langt som andet, samt ved Roden smalt og bredere mod Enden. Svøben dannes af 7—8 Led, hvoraf det første er langt, de andre bredere end lange. De nedre Følere ere ikke meget kortere end de øvre og naae fremfor disses Skaft; fjerde Skaftled er omtrent saa langt som femte, der er længere end Svøben, hvis andet Led er meget lidet. Første Fodpar er lidet, og Haanden er ægformig. Andet Fodpar er meget stærkt; dets første Led er ikke dobbelt saa langt som bredt, Haanden er næsten dobbelt saa lang som dette, fortil med en meget stærk convex Rand; den bagre Rand er dybt indskaaret, og denne Indskjæring er opad begrændset af en særdeles stærk Tand og nedad af en mindre Tand. Kloen er meget stærk, saugtakket i den bagre Rand. Aandeblærerne ere næsten runde. Det femte

Fodpar er særdeles bredt og kort; første, tredie og fjerde Led ere bredere end lange, idet de nedad og bagtil udvide sig meget. Haanden er omtrent dobbelt saa lang som bred.

Det mindre Exemplar — ♀ — viser den samme Bevæbning af Leddene, men dets første Led er meget kortere; andet Led er meget kortere end tredie; andet Fodpar er fæstet til dets forreste tykkere Deel. Andet Fodpars Haand er ægformig og ikke væbnet med saa stærke Tænder som hos ♂, men kun med meget svage og meget smaa Torne.

Denne Form er saa eiendommelig ved sine korte Følere og sit med store Vorter besatte Legeme, der er fiint overstrøet af særdeles smaae Korn, og endelig ved den ringe Forskjel i Legemets Bygning hos ♂ og ♀, saa at den ikke kan forvexles med nogen anden beskreven Art.

Gen. II. Cerapus. Say. 1817.

Denne Slægt skiller sig fra de to nærmest staaende Slægter Podocerus Leach og Janassa Boeck, især ved at sidste Par Springfødder ere eengrenede, Haleappendixet er forsynet med 2 med krumme Torne væbnede Forhøininger, og de øvre Følere mangle Bisvøbe. Say opstillede denne Slægt paa Arten Cerapus tubularis, som senere ikke synes at være gjenfunden. Paa Arten C. difformis opstillede Milne-Edwards i 1830 Slægten Erichthonius, der er synonym med Cerapus, og da han fandt, at Templetons Cerapus abditus skilte sig i Følernes Bygning fra Cerapus tubularis Say, opstillede han den første under Slægtsnavnet Cerapodina, hvilket dog kun er grundet paa en Misforstaaelse. Krøyer henførte den af ham som ny anseede Art, Leachi, til Slægten Podocerus, men den er fuldstændig overeensstemmende med Cerapus difformis, og endelig gav Dana i 1853 Slægtsnavnet Pyctilus til Former, der nu maa henføres til Cerapus. Stimpson har fundet en Art, som han opstiller under Navn af Erichthonius rapax. Denne, som Prof. Esmark har gjenfundet, skal jeg her nærmere beskrive.

Cerapus rapax. *Stimpson 1857.*

Erichthonius rapax, Stimpson. Crust. and Echinoderm. of the Pacific shores of N. America, pag. 75. 1857.

Dyrets Længde hos ♂ er 9mm, hos ♀ 7mm. Legemet er hos ♂ nedtrykt, dog forlænget. Den første Epimer er meget liden, den anden er den største af alle og nedad afrundet, femte er meget forlænget og udtrukket i Enderne. Hovedets Sidevinkel er tilspidset. De øvre Følere naae omtrent til fjerde Legemsring; det første Skaftled er kortere end Hovedet, det er ligesaa langt, men tykkere end tredie, og noget kortere end andet. Svøben er meget kortere end Skaftet og dannes af 12 Led. De nedre Følere ere lidt længere end de øvre; deres tredie Skaftled er forlænget, det fjerde er saa langt som femte og saa langt som de øvre Føleres andet Skaftled. Svøben er omtrent saa lang som sidste Skaftled og dannes af 7—8 Led. Det første Fodpar ligner aldeles det tilsvarende hos C. difformis. Andet Fodpar er særdeles stort; fjerde Led er omtrent dobbelt saa langt som bredt og udskyder i den nedre bagre Vinkel en lang, bred, tandformig Forlængelse, der ikke naaer fuldt frem til Enden af femte Led; denne er paa den indre Kant væbnet med en stærk Bitand; femte Led er ogsaa omtrent dobbelt saa langt som bredt, men meget smalere og kortere end det foregaaende Led og er væbnet paa den bagre Rand med 3 smaa Knuder. Tredie og fjerde Fodpars første Led er bredt pæreformigt; tredie Led er meget kort og bredt og længere end fjerde Led, som igjen er kortere end femte. Femte Fodpars første Led er i den bagre Rand ret, og den nedre bagre Vinkel er noget udtrukket og tilrundet; tredie Led er lidet udvidet, længere end fjerde og saa langt som femte Led, men dog bredere. Kloen er i den convexe Rand væbnet med en lille Biklo. De to følgende Fodpar tiltage efterhaanden stærkt i Længde. Den nedre, bagre Vinkel paa 7de Fodpars første Led er tilrundet; tredie Led er nedad kun lidet udvidet og er længere end fjerde, men kortere end femte Led. Første Par Springfødders Grene naae længst bagud; dettes og andet Pars Grene ere i den øvre

Rand væbnede med en tæt Rad af fine Torne og flere større stærkere mellem dem, samt to til tre meget stærke i Enden af hver Green. Sidste Par Springfødders Grene ere meget krumme og i Enden væbnede med 2 Kløer. Halevedhænget er forsynet med 2 Forhøininger, hver væbnet med mange krumme Torne.

Hos ♀ er de øvre Føleres Svøbe 10ledet og de nedre 9ledet. Andet Fodpars Haand dannes af femte Led, er bred, ægdannet. Fjerde og femte Fodpars første Led er i Forhold meget bredere; deres tredie Led kortere. Springfødderne ere ogsaa kortere.

Denne Art er fundet i 2 Exemplarer, en ♂ og en ♀ ved St. Francisco; den afviger meget lidet fra C. Hunteri ved vor Kyst.

Gen. III. Podocerus. Leach. 1813.

Denne Slægt blev opstillet af Leach i 1813, og med denne maa ogsaa hans Slægt *Jassa,* som ikke i nogen Henseende skiller sig fra *Podocerus*, falde sammen; ligeledes *Ischyocerus* Kr., og *Crathophium* Dana, samt *Dercothoë* Dana. Den danner sammen med *Janassa* Boeck og *Cerapus* Say, en engere Subfamilie *Podocerinæ.* Arterne af Slægten *Podocerus* findes udbredte i alle Have og vise et meget overeensstemmende Præg.

Til denne Slægt hører følgende Art fra Californien:

Podocerus californicus. A. Boeck. nov. sp.

Denne Art er funden i 2 Exemplarer, begge Hunner. Det ene Individ var 7, det andet 5^{mm}. Legemet er kun lidet sammentrykt, med særdeles bred, rund Ryg. Epimererne smaae, dog høiere end brede, nedad afrundede. Hovedet er fortil ikke væbnet med noget Pandehorn, og dets Sidevinkler danne stærkt afrundede Lappe, hvorpaa de ovale, sorte Øine have sin Plads. De øvre Følere ere omtrent saa lange som Hovedet og de 3—4 første Legemsled. Skaftets første Led er omtrent dobbelt saa langt som tykt, det andet er meget længere og smalere end første og omtrent af samme Størrelse som tredie. Svøben er lidt kortere end Skaftets sidste Led, hvoraf det første er det længste. Bisvøben dannes af et enkelt tyndt Led. De nedre Følere ere meget længere og tykkere end de øvre. Deres tredie Skaftled er ikke længere end tykt; det fjerde Led er omtrent saa langt som femte. Svøben er kortere end det sidste Skaftled og dannes af 3 Led, hvoraf det første er meget længere end de følgende to tilsammen. Begge Følere, dog meest de nedre, ere i den nedre Rand forsynede med talrige Bundter af lange cilierede Børster. Første Fodpar er meget mindre end andet, dets Carpus er triangulær; Haanden meget større end den og ægdannet. Andet Fodpar er hos det største Exemplar lidt mere forlænget end hos det mindre og ægdannet, samt i den bagre Rand dybt indbugtet. Denne Bugt er begrændset af en øvre bredere og en nedre smalere Tand; desuden findes ovenfor den øvre Tand nogle stærke Torne der, hvor den møder Kloens Spids. Tredie og fjerde Fodpar ere meget brede; deres første Led er neppe dobbelt saa langt som bredt og udtrukket nedad i en rund Lap; tredie Led er meget udvidet bagtil og udtrukket i det nedre forreste Hjørne til Enden af det fjerde Led, der neppe er saa langt som bredt; det femte Led bliver nedad smalere. Kloen er kortere end sidste Led og svagt krummet. Det syvende Fodpars første Led er ikke meget udvidet, og dets nedre bagre tilrundede Hjørne er kun lidt udvidet. Tredie Led er ikke meget stærkt udvidet og længere end det fjerde, men kortere end det femte Led. De to første Par Springfødders ydre Green er kortere end den indre, begge ere i den øvre Rand og i Enden væbnede med stærke Torne. Den ydre Green af sidste Par Springfødder er omtrent halvt saa lang som Grundledet; den bliver smalere mod Enden og er i Spidsen bøiet til en Hage, indenfor hvilken findes flere meget smaa Tænder og en noget større. Den indre Green er lidt kortere og smalere end den ydre, der er ret og i Enden væbnet med en kort Torn.

Gen. IV. Amphithoë. Leach. 1813.

Denne Slægts typiske Art er Cancer Gammarus rubicatus, Mont.

Under dette Slægtsnavn indbefattede Milne-Edwards alle de Former, som lignede Gammarus, men manglede Bisvøbe paa de øvre Følere. Dana udskilte først de virkelige Arter af Amphithoë, idet han gav Slægten følgende Diagnose: Epimeræ magnæ; 5tæ 4tis non breviores, bilobatæ; lobo posteriore minimo vel fere obsoleto. Styli caudales postici biramei; ramis perbrevibus, uno (externo) sæpe subconico, apice bi-ungviculato; ungvibus recurvatis, altero lamellato, apice sæpius paulo ciliato et non spinuloso.

I dette Omfang er Slægten optaget ogsaa af Sp.-Bate; men han udsondrer fra denne Slægten *Sunamphithoë,* der alene skiller sig fra hiin ved, at Haleappendixet ender i stærke Hager. I *Crustacea amphipoda borealia et arctica, 1870*, ere disse to Slægter, som have faaet en forandret Characteristik, sat i en egen Subfamilie, *Amphithoinæ,* fordi den i Munddelene væsentlig skiller sig fra den nærstaaende Subfamilie *Podocerinæ,* hvortil disse Slægter forhen have været regnede.

I det ydre skiller denne Slægt sig strax fra andre lignende Former, ved at 5te Sideplade er større end 4de og forlænger sig bagud i en Lap; det 5te Fodpar vender derfor ikke nedad, men bagover, og tjener væsentlig til at skyde Dyret op af det Huus, som det selv danner. De øvre Føleres tredie Skaftled er kort, og det sidste Par Springfødders Grene ere meget smaae, samt den ydre Green forsynet med to stærke Kløer. De tre bagre Fodpar ere ikke indrettede til at gribe med og ikke subcheliorme, medens dette er Tilfældet hos den anden Slægt, Sunamphithoë. Til denne Slægt, hvoraf Arter findes i alle Have, hører den følgende fra Californien:

Amphithoë Stimpsoni. A. Boeck. nov. sp.

Dyrets Længde er 13^{mm} fra Panden til Halevedhængets Ende. Legemet er høit, dog ikke meget sammentrykt, med rund Ryg, ligner meget A. litorea. Panden er uden Pandehorn, Hovedets Sidevinkler ere afrundede, Øinene ovale, sorte. De øvre Følere naae, naar de bøies bagover, til Postabdomens første Led. Skaftets første Led er næsten saa langt som Hovedet og længere og tykkere end det andet Led, som er mere end dobbelt saa langt som tredie. Svøben er næsten dobbelt saa lang som Skaftet og dannes af 32 Led. De nedre Følere ere meget kortere end de øvre; Skaftets tredie Led er omtrent saa langt som tykt, og fjerde Led er lidt længere end femte, der er omtrent saa langt, men tyndere, end de øvre Føleres første Skaftled. Svøben, der næsten er saa lang som Skaftets to sidste Led tilsammen, dannes af 16 Led. Første Fodpars fjerde Led er lidt kortere end Haanden, der er næsten fiirkantet, med skraa afskaaret Griberand. Det andet Fodpar er større end det første, men dets Carpus er meget kortere og forlænger sig i en lille i Enden afrundet Hæl. Haanden er meget stor, næsten fiirkantet, med en kun svag, skraa afskaaret Griberand. Det tredie og fjerde Fodpars første Led er meget but; det tredie Led er ikke stærkt udvidet nedad og neppe længere end fjerde, der er kort og bredt i den øvre Deel, men kortere end femte Led. De to følgende Fodpar tiltage efterhaanden i Længde. Det syvende Fodpars første Led er ikke meget bredt og bliver smalere nedad; dets tredie Led er nedad neppe udvidet, er længere end det fjerde, men ubetydelig kortere end det femte. Det sidste Par Springfødders ydre Green er væbnet med 2 stærke Kløer, den indre med en grov liden Tand og nogle grove Børster.

Professor Esmark har af denne Art sendt kun eet Exemplar fra St. Francisco:

Gen. V. Paramphithoë. Bruzelius. 1859.

Bruzelius opstillede denne Slægt i *Skandinaviens Amphipoda gammarina 1859, p. 68,* og henførte hertil de skandinaviske Arter Amphithoë panopla Kr., A. pulchella Kr., A. compressa Lillj., A. tridentata Bruz., A. bicuspis Kr., P. elegans Bruz. (Atylus bispinosus Spence-Bate), A. læviuscula Kr. og A. norvegica Rathke, desuden Acanthosoma hystrix Owen. I det følgende Aar adskilte jeg Arten P. compressa fra disse under Slægtsnavnet Epidesura og endvidere Arterne P. elegans, P. læviuscula, P. bicuspis og P. tridentata under Slægtsnavnet Amphithopsis, hvortil de 2 nye, A. glaber og A. longicaudata bleve regnede. I Slægten Paramphithoë blev saaledes staaende igjen A. panopla og A. pulchella. Spence-Bate, hvem Forfatterens Afhandling har været ubekjendt, anvendte derimod i *Catalogue of the specimens of Amphipodous Crustacea, 1862*, Slægtsnavnet Paramphithoë istedetfor Owens Acanthosoma og henfører hertil kun A. hystrix og P. panopla samt opstiller en ny Slægt Pleustes, som saaledes blev synonym med Paramphithoë. P. pulchella og P. bicuspis henfører han til Pherusa, P. compressa (Epidesura compressa, Boeck) til Atylus og endelig P. læviuscula og P. Norvegica til Calliope. I *Crustacea amphipoda borealia et arctica, 1870*, henfører jeg til Slægten Paramphithoë, foruden de to ældre Arter A. pulchella Kr. og A. panopla Kr., ogsaa P. media Goës, P. bicuspis Kr., P. parva Boeck og P. glabra Boeck (P. exigua Goës), hvilken sidste jeg før henførte til Slægten Amphithopsis.

Paramphitoë Bairdi. A. Boeck. nov. sp.

Dyrets Længde er i udstrakt Tilstand fra Hovedet til Halevedhængets Ende 7mm. Legemet er sammentrykt, høit med rund Ryg. De fire første Epimerer ere store samt i den nedre Kant afrundede med nogle svage Spor af 2 a 3 Tænder i det afrundede nedre bagre Hjørne. Den nedre, bagre Vinkel paa det 3die Postabdominalled er næsten ret. Hovedet er fortil noget udtrukket, men danner intet egentligt Pandehorn; dets Sidevinkler ere stærkt afrundede, og Øinene ere middelmaadig store, ovale, sorte. De øvre Følere naae, naa de bøies bagover, omtrent til Postabdomens tredie Led. Skaftet er kort; dets første Led er omtrent saa langt som Hovedet, det andet er neppe halvt saa langt som det foregaaende Led og meget tyndere; det tredie er særdeles kort. Svøben er næsten 3 Gange saa lang som Skaftet og dannes af 40—45 Led. De nedre Følere ere meget kortere end de øvre; deres tredie Skaftled er kortere end tykt; det fjerde er lidt kortere, men tykkere end det femte. Svøben er meget længere end Skaftet og dannes af henved 24 Led. Kindbakkernes tredie

Palpeled er meget længere end det andet og bliver mod Enden smalt. Det andet Kjæbepars Plader ere smaae. Kjæbeføddernes ydre Plade naaer ikke frem til Midten af Palpens andet Led og er væbnet med tynde Torne i den nedre Rand. Palpens tredie Led bliver mod Enden smalere, og dens fjerde Led er langt, kloformigt. Det første og andet Fodpar er næsten af den samme Form, men andet Fodpars Haand er lidt længere end det førstes. Begge Fodpars fjerde Led er meget kort, triangulært, og dets nedre bagre Vinkel er kun ubetydeligt udtrukket og tilrundet. Haanden er meget stor, næsten ægformig; Kloen lang, lidet krummet. Det tredie og fjerde Fodpars tredie Led er ikke meget udvidet og er længere end fjerde, men lidt kortere end femte Led. De tre bagre Fodpars første Led er bagtil meget bredt, udvidet og kun noget saugtakket; det tredie Led er stærkt forlænget i det nedre, bagre Hjørne. Springfødderne ere forlængede; den ydre Green paa alle tre Par er kortere end den indre, og begge ere væbnede med stærke Torne i den øvre Rand og i Enden. Det tredie Par Springfødders Skaftled er meget kort, neppe Halvdelen af den kortere, ydre Greens Længde, der omtrent er en Fjerdedeel kortere end den indre. Halevedhænget er ægformigt.

Gen. VI. Metopa. A. Boeck. 1870.

Professor Dana opstillede i 1852 Slægten *Stenothoë*, hvormed Costas Slægt *Probolium*, opstillet 1853, og Spence-Bates *Montagua* ere Synonymer. Fra Slægten *Stenothoë* adskilte jeg i *Crustacea amphipoda borealia et arctica 1870* Slægten *Metopa*, som væsentlig adskiller sig fra *Stenothoë* derved, at Kindbakkernes Palpe er meget kort, 3ledet; men det 3die Led er næsten rudimentært og meget vanskeligt at see, medens Palpen mangler fuldstændig hos Slægten *Stenothoë*. Desuden er 1ste Kjæbepars Palpe 1ledet, medens den hos *Stenothoë* er 2ledet. Forøvrigt stemme begge Slægter overeens.

Til denne Slægt Metopa høre flere af de ved Norges Kyster forekommende Arter og desuden den nedenfor beskrevne fra Californien.

Metopa Esmarki. A. Boeck. nov. sp.

Dyrets Længde er hos ♂ 5^{mm}, hos ♀ 4^{mm}. Legemet er af den sædvanlige Form, meget høit, men dog med rund Ryg. Den første Epimer er aldeles skjult af den anden, der er større, og den fjerde er særdeles stor, forlænget og afrundet bagtil. De øvre Følere ere hos ♂ meget kortere end de nedre og naae kun noget længere frem end til Enden af de nedres Skaftled. Deres første Skaftled er noget længere end Hovedet samt meget længere og tykkere end det andet; det tredie Led er særdeles kort. Svøben dannes af 10 Led og er noget kortere end Skaftet. De nedre Føleres tredie Skaftled er mere end dobbelt saa langt som tykt; det fjerde er omtrent dobbelt saa langt, men tyndere end det foregaaende; det femte er omtrent saa langt som det fjerde. Svøben er særdeles kort, neppe længere end Halvdelen af det sidste Skaftled. Kjæbeføddernes 3 første Palpeled ere omtrent lige lange, det fjerde er kort, lidt krummet. Det første Fodpar er hos ♂ smalt; dets tredie Led gaaer i den nedre, bagre Vinkel ud til en i Enden afrundet Forlængelse; 4de Led er kun lidt udvidet og længere end den ovale Haand. Det andet Fodpar er hos ♂ meget stærkt; Haanden udsender fra den øvre Deel af den bagre concave Rand en stærk tandformig Forlængelse og fra den nedre Deel en meget mindre Tand. Det tredie og fjerde Fodpars 3die Led er kort og nedad ikke meget udvidet, samt forlænget; deres 4de og 5te Led ere næsten lige lange. Det femte og sjette Fodpars 1ste Led er bagtil ikke udvidet, medens det syvende Par er særdeles stærkt og bagtil halvkredsformig afrundet, saa at det er næsten bredere end høit. Det 3die Led er paa det femte Fodpar ikke meget udvidet, medens det paa sjette og syvende er særdeles udvidet og udtrukket i det nedre bagre Hjørne til Enden af det følgende Led, som er lidt kortere end det 5te Led. Det sidste Par Springfødders Green er kortere end Skaftet, der i den øvre Rand er væbnet med 6 Torne.

Følerne hos ♀ ere i Forhold kortere end hos ♂, og de øvre Følere naae omtrent til Enden af de nedres Skaft; Svøben dannes af 11 Led. De nedre Føleres Svøbe er i Forhold lidt længere og dannes af 6 Led, hvoraf det 1ste er meget langt. Det andet Fodpar er meget mindre; dets Haand er næsten ægformig og har i den øvre Deel af den bagre Rand en ikke meget stor, tandformig Forlængelse; den har ogsaa i den nedre Deel 5—6 Tænder, der nedad blive mindre.

Af de erholdte Exemplarer ere tvende ♂ og et ♀.

Caprella californica. Stimpson.

Caput cornu plus minusve elongato, antice curvato instructum. Segmenta trunci tria anteriora tuberculis interdum armata. Vesiculæ branchiales fere lineares. Pedes trium parium posteriorum breves, non lati; articulo 1mo, 3tio et 4to vix longioribus qvam latis; manu elongata, ovata. Mas. Antennæ superiores sat elongatæ; articulo pedunculi 3tio longitudinem articuli 1mi æqvanti. Segmentum trunci 1mum et 2dum sat elongata. Pedes 2di paris prælongati, parti posteriori segmenti 1mi trunci affixi; articulo 1mo elongato; manu sat elongata, antice latiore, in margine posteriore dentibus tribus armata. Femina. Antennæ superiores breves; articulo pedunculi 3tio breviore qvam 1mo. Segmentum trunci 1mum et 2dum brevia. Pedes 2di paris parti anteriori segmenti trunci 2di affixi; articulo 1mo brevissimo; manu ovata.

Caprella verrucosa. n. s.

Corpus breve crassumqve, a tuberculis minimis obtectum. Cornu capitis antice curvatum. Segmentum trunci 1mum in medio margine posteriore tuberculo uno valido armatum. Segmentum trunci 2dum tuberculis duobus, altero in medio altero in margine posteriore, et tuberculis singulis in utraqve parte prope ad basin pedum 2di paris armatum; segmentum 3tium et 4tum tuberculis ternis, in margine anteriore, in medio et in margine posteriore, tuberculis geminis binis vel ternis in utroque latere armata. Antennæ superiores brevissimæ; articulo pedunculi 3tio breviore qvam 1mo. Vesiculæ branchiales circulares. Pedes trium parium ultimorum breves et latissimi; articulo 3tio et 4to multo brevioribus qvam longis; manu ovata. Pedis 2di paris breves; manu maris in parte superiori marginis posterioris calce brevi et in parte inferiore marginis ejusdem tuberculo valido armata; manu feminæ ovata.

Cerapus rapax. Stimpson.

Antennæ superiores articulo pedunculi 1mo paulo breviore qvam capite et articulo pedunculi 2do; hoc ferme eadem longitudine ac articulo pedunculi 3tio. Pedes 2di paris apud marem articulo 4to fere duplo longiore qvam lato, in angulo inferiore posteriore in calcem longam acutam producto; calce ad finem articuli 5ti non porrecta, in margine interiore dente uno valido armata; articulo 5to duplo longiore qvam lato, in margine posteriore tuberculis tribus parvis armato. Pedes 3tii et 4ti paris articulo 1mo pyriformi; ungve breviore qvam articulo 5to. Pedes 5ti paris articulo 1mo in angulo inferiore posteriore producto et rotundato. Pedes saltatorii ultimi paris postice dentibus duobus armati.

Podocerus californicus. n. s.

Angulus capitis lateralis rotundatus. Antennæ superiores articuli 1mo parum breviore sed multo crassiore qvam articulo 2do; hoc longitudinem articuli pedunculi 3tii æqvanti; flagello breviore qvam articulo pedunculi 3tio, 5articulato. Antennæ inferiores articulo pedunculi 4to et 5to longitudine æqvalibus; flagello breviore qvam articulo pedunculi 5to, 3articulato. Pedes 2di paris manu ovata, in margine posteriore dentibus duobus latissimis et in summo margine eodem spinis duabus validis armata. Pedes 3tii et 4ti paris articulo 1mo in angulo anteriore inferiore producto et rotundato. Pedes saltatorii ultimi paris ramo exteriore curvato, in margine superiore dentibus duobus validis et inter illis dentibus minoribus armato.

Amphithoë Stimpsoni. n. s.

Oculi rotundi, nigri. Antennæ superiores flagello 35-articulato. Antennæ inferiores articulo pedunculi 4to multo longiore qvam 5to; flagello longitudinem articuli 4ti et 5ti junctorum æqvanti, 16-articulato. Pedes 1mi paris manu ovata, longitudinem carpi ferme æqvanti. Pedes 2di paris manu fere rectangulari, in acie obliqve truncata. Pedes saltatorii ultimi paris ramo exteriore postice ungvibus duobus armato, dimidiam longitudinem pedunculi ferme æqvanti.

Paramphithoë Bairdi. n. s.

Dorsum neqve carinatum neqve spinosum. Segmentum postabdominis 3tium in angulo inferiore posteriore nec productum nec acutum. Angulus capitis lateralis rotundatus. Antennæ superiores articulo pedunculi 1mo longiore qvam articulis duobus seqventibus junctis; flagello ter longiore qvam pedunculo, 40—45-articulato. Antennæ inferiores articulo pedunculi 4to et 5to longitudine ferme æqvalibus; flagello parum longiore qvam pedunculo, 20—25-articulato. Pedes 1mi paris manu ovata. Pedes 2di paris manu majore qvam eadem 1mi paris, extrorsum latiore, in acie obliqve truncata. Pedes saltatorii 1mi et 2di paris ramo exteriore breviore qvam interiore. Pedes saltatorii ultimi paris ramo exteriore duplo longiore qvam pedunculo, qvarta parte breviore qvam ramo interiore. Appendix caudalis ovata.

Metopa Esmarki. n. s.

Epimerum 4tum sat altum et latum. Antennæ superiores inferioribus apud marem multo, apud feminam paulo breviores; articulo pedunculi 1mo eadem longitudine ac capite; articulis pedunculi duobus seqventibus magnitudine gradatim valde decrescentibus; articulo pedunculi 3tio parum longiore et crassiore qvam segmentis flagelli. Antennæ inferiores apud marem multo magis elongatæ et robustæ qvam apud feminam; articulo pedunculi 3tio plus duplo longiore qvam latiore, apud marem ad extremum articulum pedunculi 1mum antennarum superiorum porrecto, apud feminam breviore; articulo pedunculi 4to longiore; flagello breviore qvam articulo 5to. Pedes 1mi paris articulo 3tio in angulo inferiore posteriore producto et rotundato; manu ovali, breviore qvam carpo. Pedes

2di paris permagni, apud marem majores; manu ovata, in summo margine ejusdem in calcem longam producta, in infima parte dentibus 2—3 armata; manu apud feminam in summo margine posteriore dente uno valido, in infimo margine eodem dentibus qvinqve minoribus armata. Articulus 1mus pedum 5ti et 6ti paris non, pedum 7mi paris valde dilatatus, fere eadem longitudine ac latitudine; articulus 3tius postice perdilatatus et in angulo inferiore posteriore ad finem articuli 4ti productus; articulus 4tus 5to brevior.

Explicatio tabulae.

Fig. 1 Caprella californica. Stimpson.
- 2 Cerapus rapax. Stimpson.
- 3 Paramphithoë Bairdi. n. s.
- 4 Caprella verrucosa. n. s.
- 5 Amphithoë Stimpsoni. n. s.
- 6 Podocerus californicus. n. s.
- 7 Metopa Esmarki. n. s.

a, antennæ superiores.
b, antennæ inferiores.
d, mandibulæ.
h, maxillipedes.
i, pedes primi paris.
k, pedes secundi paris.
l, pedes tertii et qvarti paris.
m, pedes qvinti paris.
n, pedes septimi paris.
q, pedes saltatorii tertii paris.
r, appendix caudalis.

Supplement til „Norges Fugle og deres geographiske Udbredelse i Landet."[1] (1868—70).

Af **Robert Collett.**

(Fremlagt i Videnskabs-Selskabet d. 10de Marts 1871 af Professor Rasch.)

Blandt de Kildeskrifter til Oplysning om Norges Ornithologie, der i den ovenfor nævnte Afhandling ere opregnede, ere følgende udeladte:

Leem, Beskrivelse over Finmarkens Lapper, med Noter af Biskop Gunnerus, (Kbhvn. 1767).

Zetterstedt, Resa genom Sveriges och Norriges Lapmarker, (2. Del, Lund 1822).

Sommerfelt, (Søren) Chr., Bidrag til den norske Ornithologie (Mag. f. Naturv. 2. B. p. 69—71. Chria 1823).

Sundevall, Anteckningar till Scandinaviens Ornithologie (Vet. Ak. Handl. f. 1840. p. 31. Stockh. 1842).

Malm, Ornithologiska Bidrag till Scandinavisk Fauna (Krøyers Naturh. Tidsskr. 2. R. 1. B. p. 180. Kbhvn. 1844—45).

Rasch, Bidrag til Norges Rovdyr- og Rovfuglestatistik (Forh. i Vidensk. Selsk. i Chria Aar 1861 p. 209—226. Chria. 1862, samt 1868 p. 1—16. Chria 1869).

Senere ere udkomne følgende Afhandlinger, der vedrøre Landets ornithologiske Fauna:

Malmgren, Anteckningar till Finlands och Skandinaviska Halföns Anseridae (Notiser ur Sällsk. pro fauna & flora fennica förh. X. 1869, p. 389—401. Helsingfors 1869).

Bahr, Supplement til Stavanger Omegns Fugle (Indbydelsesskrift til den off. Examen i Stav. lærde og Realskole 1870. Stav. 1870).

Heuglin, Die Vogelfauna im hohen Norden, ornithologische

[1] Den nævnte Afhandling er indført i dette Tidsskrifts Aargang for 1868. p. 116—193. og til dennes Nummere svare de her anførte Tal.

Notizen aus Finmarken u. Spitsbergen, Sept. u. Oct. 1870 (Peterm. geogr. Mitth. f. 1871, 17. B. p. 57—67. Gotha 1871).

Collett, Ornithologiske Bemærkninger til Norges Fauna (Nyt Mag. f. Naturv. 18. B. p. 162—224. Chria 1871).

Af skriftlige Meddelelser har Forfatteren modtaget nøiagtige Optegnelser for Aarene 1869 og 1870 fra Omegnen af Bergen af Grosserer Friele.

1. *Turdus viscivorus, Lin.* Er endnu ikke fundet rugende i Landets vestlige Dele, hvor den dog i de seneste Aar er bemærket sporadisk om Høsten, saasom i Søndfjord, ved Bergen og ved Christianssand.

11. *Lusciola suecica, Lin.* Ruger paa alle Landets sydlige Højfjelde, og blev i Gudbrandsdalsfjeldene funden i Juni 1870 af Cand. Landmark lige ned paa Neverfjeld ved Lillehammer. Sin største Udbredelse i de sydøstlige Egne har den i Saliceterne paa Dovre, medens den paa Filefjeld og de øvrige Dele af Langfjeldene findes i ringere Antal.

25. *Lanius Collurio, Lin.* Langs Vestkysten synes den alene at forekomme sparsomt i de sydligste Dele, hvor den er funden i Hardanger af Sommerfelt, samt i Ryfylke, paa det sidste Sted rugende (Bahr, Suppl. l. c. p. 5). Ved Bergen vides den aldrig observeret.

42. *Motacilla alba, Lin.* β *Yarrellii, Gould.* Et enkelt Ind. af denne Form, der har vist sig sporadisk i Landets sydlige Dele, blev i 1868 bem. ved Bergen af Gross. Friele: saavel i 1867, som 1868, saaes ved Christiania et lignende, stedse paa samme Sted, og har muligens begge Gange været samme Individ.

44. *Anthus obscurus, Penn. rupestris, Nilss.* Overvintrer regelmæssig flokkevis langs de sydlige og vestlige Kyster, idetmindste op til 62° N. B. I Bergen, hvor de herunder jevnlig bemærkes, søge de sin Føde i Gaderne.

48. *Corydalla Richardi, Vieill.* Et Ind., det 2det her fra Norge, blev af Cand. Landmark skudt ved Christiania i Oct. 1869 og afgivet til Univ. Mus. (cfr. Nyt Mag. f. Naturv. 18. B. p. 171).

52. *Emberiza shoeniclus, Lin.* Ruger ligesom *E. hortulana* kun sparsomt i Landets vestlige Dele, og er her sjelden selv under Træktiderne; omkring Bergen er den dog funden om Sommeren af Friele.

53. *Plectrophanes lapponica, Lin.* Fandtes af Forf. i Juni 1870 i ikke ringe Antal rugende i Krattene af *Betula nana* og *Juniperus* ved Fogstuen paa Dovre (62° N. B.); dette er denne Arts sydligste bekjendte Rugested i Landet (cfr. Nyt Mag. l. c. p. 172).

71. *Coccothraustes vulgaris, Klein.* Et enkelt Individ af denne Art, der i Regelen blot viser sig sporadisk og med lange Mellemrum af Aar i Landet, er bemærket af Forf. i hver af de seneste Vintre i Slotsparken ved Christiania; Vaaren 1871 fandtes paa det samme Sted 2 Par, der uden Tvivl ville ruge i Omegnen den kommende Sommer.

75. *Corvus frugilegus, Lin.* Overvintrer jevnlig flokkevis eller i mindre Dele, helst i de sydlige Kysttrakter, men ogsaa fra og til i Landets indre Egne; saaledes bleve Ind. skudte i Valders Vinteren 1868—69 af Dr. Printz, samt i Ørkedalen ved Trondhjem i Dec. 1870 af Propr. Nissen.

82. *Alauda arvensis, Lin.* Forekommer i ikke ringe Mængde paa de flade Øer udenfor Trondhjemsfjorden og lige ud paa de yderste af Froøerne, men mangler langs Vestkysten næsten overalt paa Fastlandet lige ned til Stavanger paa Grund af disse Egnes Localforholde.[1]

96. *Coracias garrula, Lin.* Et afkræftet Ind. blev i Oct. 1868 fanget levende ved Nyborg i Varanger (70° N. B.) og nedsendt til Prof. Esmark.

103. *Ulula lapponica, Thunb., barbata, Pall.* Ogsaa i de senere Aar ere Ind. af denne Art skudte i Landets sydlige Dele, saaledes ved Frederiksstad 3die Marts 1867, og ved Christiania

[1] Paa Spitsbergen blev Sommeren 1868 et Ind. af *Upupa Epops, Lin.* i forkommen Tilstand fanget af en Skipper, som medbragte Skindet til Hammerfest: her fandtes det samme Aar af Gross. Friele, hvem denne Meddelelse skyldes.

25de Marts 1870. Det sidste, der fandtes i en yderst afmagret Tilstand, opbevares paa Univ. Mus.

109. *Circus cyaneus? Lin.* I Juni 1863 blev paa Hedemarken i Løjtens Prgd. fundet et Rede af en *Circus*, hvoraf et Æg, der blev bragt til Forf., synes at have tilhørt ovennævnte Art. (Nyt Mag. l. c. p. 187). Dette er den første Gang, at nogen af denne Slægt med Vished er funden rugende i Landet (61° N. B.).

126. *Columba livia, Lin.* Af denne Art, der inden føje Tid synes at ville forsvinde af vor Fauna (cfr. Nyt Mag. l. c. p. 190), modtog Adj. Bahr i Stavanger endnu i Juli 1868 et levende Individ fra Rennesø i Stavangerfjorden (Suppl. til Stav. Fugle, p. 33).

128. *Peristera Turtur, Lin.* Foruden i de nævnte Tilfælde er i de senere Aar et Ind. skudt i Oct. 1867 ovenfor Tromsø, og opbevaret af Sognepr. Kaurin; en ung Han blev i Nov. 1870 skudt ved Skiensfjorden, og afgaves til Univ. Mus. (Nyt Mag. l. c. p. 189).

129. *Syrrhaptes paradoxus, Ill.* Efterat alle hidtil bekjendte Oplysninger angaaende denne Arts Optræden i Norge Sommeren 1863 ere blevne indhentede, foreligge følgende 5 Tilfælde, alle i Tidsrummet fra Maj til August samme Aar.

1. I Laurdal i Nærh. af Jarlsberg, ved Christianiafjordens vestre Bred. Her blev ved Gaarden Hem første Gang i Begyndelsen af Maj bem. en Flok, der atter fandtes paa det samme Sted den 20de s. M., men intet Ind. blev skudt. I de første Dage af Juni blev atter en Flok paa 15—20 St., rimeligvis den samme, truffen paa en Ager, hvor de fortærede den nysaaede Hvede; et Ind. blev skudt, og en Vinge indsendt til Univ. Mus.

2. I Lindaas i Nordhordland, søndenfor Bergen, paa Landets Vestkyst. I Maj Maaned bleve her 5 Ind. skudte, og indsendte, dog i ubrugbar Stand, til Bergens Mus.

3. Ved Mandal paa Lister, i Landets sydligste Kystegne. Her bleve i Juni Maaned idetmindste 2 Ind. skudte, hvilke af Dr. Roscher bleve indsendte til Univ. Mus., hvor de begge (♂ og ♀) findes opstillede.

4. I Nordfjord under 62° N. B., det nordligste Punkt,

hvorhen de vides trængte frem i Landet. I August Maaned bleve her 2 Ind. skudte og indsendte til Bergens Musæum, hvor det ene findes opstillet.

5. Ved Indsøen *Øieren*, et Par Mile ovenfor Christiania. Ifølge Underretning til Prof. Esmark blev i August Maaned et Par Individer herfra falbudne paa Torvet i Christiania, men vides ikke at være opbevarede.

131. *Tetrao Tetrix*, ***Lin.*** Forek. og skydes, ifølge Sognepr. Kaurin, fra og til ved Tromsø (næsten 70° N. B.), hvilket er denne Arts nordligste bekjendte Opholdssted.

136. *Ortygion Coturnix*, ***Lin.*** Synes aarlig at udbrede sig videre i Landet; langs Vestkysten er den endnu sjelden, men er dog i de seneste Aar fundet rugende i Søndfjord, ved Stavanger, samt i Surendalen (63° N. B.).

142. *Squatarola helvetica*, ***Briss.*** Høsten 1870 fandtes denne Art under Trækket i flere af de sydlige Kystegne, lige fra Trondhjem af og ned til Christiania; et paa det sidste Sted skudt Indiv. havde endnu næsten fuldkommen Sommerdragt (cfr. Nyt Mag. l. c. p. 199).

151. *Calidris arenaria*, ***Lin.*** Har i de seneste Aar vist sig om Høsten i store Skarer paa de sydvestlige flade Øer og Havstrande, fornemmelig paa Jæderen, hvor den i Aug. og Sept. 1870 af Gross. Friele blev truffen i stort Antal, og hvoraf Individer i Høstdragt afgaves til Univ. og Berg. Mus. (cfr. nyt Mag. l. c. p. 203). Allerede i Aug. 1868 blev den af Cand. Landmark skudt paa den nærliggende Karmø, og indsendt til Univ. Mus.

154. *Pelidna subarcuata*, ***Lin.*** Forek. ligesom foregaaende flokkevis om Høsten ved de flade sydvestlige Strande og Fjordbunde, og flere Indv. bleve i Aug. 1870 skudte af Friele paa Jæderen, de tidligst ankomne endnu i Sommerdragt. Samtidigt bleve Ind. skudte ved Øerne ved Christiania af Cand. Landmark, og afgivne til Univ. Mus. (Nyt Mag. l. c. p. 203).

157. *Actodroma Temminckii*, ***Leisl.*** Ruger ogsaa i Vestfinmarken, saasom ved Tromsø, hvor den i Juli 1870 blev observeret af Th. Heuglin (Peterm. geogr. Mitth. 17. B. p. 57). Paa

Manger ved Bergen blev i Juli 1870 af Stud. Théel skudt et Indiv., der, sandsynligvis uden at ruge, havde tilbragt Sommeren under de sydlige Bredder.

158. *Machetes pugnax, Lin.* Viser sig ogsaa under Træktiderne sparsomt paa Højfjeldene, hvor den flere Gange er skudt i Gudbrandsdalsfjeldene i en Højde af indtil 3500′ o. H. Langs Vestkysten er den i de seneste Aar fundet rugende hist og her, saasom paa Jæderen (Bahr, Suppl. l. c. p. 33), hvor den under Trækket forek. i store Skarer.

159. *Phalaropus rufus, Bechst.* Foruden de tidligere nævnte er endnu et Ind. (af Stuvitz) skudt ved Bergen i Overgangsdragt, og opbevares paa B. Mus.

161. *Totanus Glottis, Lin.* Besøger aarlig om Høsten, tildels i stort Antal, Jæderens Rev og de øvrige flade Strande paa de sydvestlige Kyster, hvor den er iagttaget og skudt i alle de senere Aar.

164. *Totanus ochropus, Lin.* Ligesom de fleste øvrige Arter af samme Slægt forek. den sparsomt, selv under Træktiderne, langs Vestkysten, hvor den dog paa enkelte Steder er fundet rugende, saasom i Omegnen af Bergen (Friele).

168. *Limosa rufa, Briss.* Har i de seneste Aar i store Flokke slaaet ind paa visse Localiteter langs de vestlige og sydlige Kyster, og er aarlig fra Jæderen i stort Antal bragt tiltorvs i Stavanger (Bahr o. fl.); i Sept. 1870 bleve de desuden skudte paa Hitteren og ved Christiania (Nyt Mag. f. Naturv. 18 B. p. 207). I Landets indre Dele vides den kun undtagelsesvis bemærket; Høsten 1869 blev ifølge Barth et Indiv. skudt ved Mjøsens Nordende.

170. *Numenius Phoeopus, Lin.* Besøger Vestkysten ikke blot under Træktiderne, men ruger paa flere Steder, saasom i Søndfjord (Cand. Hvoslef), og paa Manger ved Bergen (Stud. Théel 1870).

174. *Ciconia alba, Briss.* Enkelte Indiv. vise sig aarlig, dog uden at ruge, i Landets sydlige Kystegne; i de seneste Aar ere flere Indiv. bemærkede i Maj 1869 ved Christianssand (Clausen), og i Maj 1870 ved Christiania.

176. *Ardea cinerea, Lin.* Besøger undertiden under Træktiderne Landets indre Dele, og har endog flere Gange vist sig oppe ved Søerne i Birkebeltet paa Fjeldene; sidste Gang blev et Par Indiv. skudt i Gudbrandsdalsfjeldene i Sept. 1869, og bragte til Prof. Rasch.

178. *Rallus aquaticus, Lin.* Synes at have sin fornemste Udbredelse i Landets vestlige Kystegne, hvor den aarlig observeres, og jevnlig overvintrer, saasom ved Bergen (Friele).

179. *Crex pratensis, Bechst.* Sommeren 1868 fandtes denne Art af Docent Holmgren ved Tromsø (næsten 70° n. B.), dens hidtil bekjendte nordligste Grændse.

180. *Gallinula chloropus. Lin.* Ruger hist og her langs de sydlige og vestlige Kyster op til Trondhjem, men observeres sjeldent. I de seneste Aar er et Indiv. i 1870 skudt ved Bergen af Gross. Friele.

181. *Ortygometra porzana, Lin.* Denne Art har i de seneste Aar vist sig at have en langt videre Udbredelse, end tidligere var kjendt, og den synes nu aarlig at ruge paa gunstige Localiteter paa de fleste Steder langs de sydlige og vestlige Kyster idetmindste op til 64° n. B., eller omtrent til Trondhjem. Sommeren 1868 fandtes den overalt i større Antal, end i noget af de tidligere Aar, og observeredes jevnlig hele Sommeren, ikke alene langs Vestkysten, men ogsaa hist og her i Landets indre Dele, saasom i Odalen, hvorfra et Individ blev nedsendt til Univ. Mus.

186. *Anser brachyrhynchus, Baill.* Ved Christiania blev i Sept. 1865 blandt en Flok *anseres* skudt et ungt Indiv. af denne Art, hvilket tidligere, inden det blev opstillet og nøjere undersøgt, er bleven anført under Navn af *A. minutus.* Dette Individ, hvis Dragt findes nøjere beskreven i den citerede Afhandl. i Nyt Mag. f. Naturv. 18. B. p. 212, er senere bleven opstillet paa Universitetets Musæum.

187. *Anser albifrons, Bechst.* Noget fyldestgjørende Bevis for, at denne Art ruger i Scandinaviens nordligste Dele, saaledes som det oftere (ogsaa i den tidligere udgivne Afhandling p. 175) er opgivet, antager Prof. Malmgren (Anteckn. till Finlands och

Scandinaviska halföns anseridae, l. c. p. 393) endnu ikke er tilvejebragt, idet denne Art overalt efter hans Mening er bleven forvexlet med *A. erythropus, Lin.* (*minutus, Naum.*). Uagtet denne Antagelse har en stor Sandsynlighed for sig, hvad den overvejende Del af de meddelte Observationer angaar, foreligge dog for Tiden endnu neppe fuldkommen tilstrækkelige Data, der skulde begrunde en fuldstændig Udelukkelse af denne Art som Rugefugl i Scandinavien.

188. *Anser erythropus, Lin. minutus, Naum.* Ruger aarlig (foruden i Finmarkens indre Dele) tillige i mindre Antal i Lofoten, saasom ved Borgevær (68° 15′), hvorfra Forf. modtog Æg Sommeren 1870 fra Handelsm. Irgens (cfr. Nyt Mag. etc. p. 213).

190. *Bernicla leucopsis, Bechst.* Et Individ er desuden skudt i Omegnen af Bergen 19de April 1864.

192. *Rhynchaspis clypeata, Leach.* Er først i de seneste Aar fundet rugende i Landet. Høsten 1868 bleve, ifølge Cand. Clausen, 5 Unger og begge de Gamle skudte ved Christianssand; ved Stavanger og paa Jæderen have de gjentagne Gange vist sig, ogsaa i de sidste Aar, og findes uden Tvivl rugende i flere af de sydvestlige Kystegne.

193. *Anas Querquedula, Lin.* Tidligere var denne Art ikkun i et enkelt (ved Christiania skudt) Indiv. bekjendt som tilhørende Landets Fauna; i de seneste Aar er den gjentagne Gange truffet, og det er udenfor al Tvivl, at den ogsaa ruger i Landet. I Juni 1867 bleve Han og Hun skudte paa Jæderen og opbevarede af Styrm. Hjorth; Høsten 1869 blev en Hun skudt sammesteds, og af Stud. Norman afgivet til Univ. Musæum.

199. *Fuligula ferina, Lin.* Ligesom af de 2 ovennævnte Arter var af denne tidligere blot et Par Individer med Vished truffet i Norge; i de seneste Aar er den funden paa flere Steder ved Landets Sydvestkyst, og synes aarlig hist og her at ruge i de ferske Vande. Ved Bergen blev saaledes det første Individ skudt allerede i 1867; i 1868 modtog Grosserer Friele atter tvende Indiv., ligesom han saavel i 1869 som 1870 gjentagne Gange har bemærket den i Omegnens Ferskvande. Af

disse Individer opbevares et paa Bergens Musæum, tilligemed et, indsendt fra Egersund 1869. Vinteren 1870—71 blev den bemærket ved Stavanger, og et Han-Individ indsendt til Universitetets Musæum. Muligens er den ikke sjelden i Landets sydlige Dele.

204. *Polysticta dispar, Lin. Stelleri, Pall.* Sommeren 1869 bleve Æg og Dun nedsendte til British Museum fra Østfinmarken, og af Prof. Newton erkjendte som tilhørende denne Art (Prof. Newton *in litt.*). Dette er den første Gang, at denne Art er funden rugende ved de scandinaviske Kyster.

213. *Phalacrocorax Carbo, Lin.* Viser sig næsten aarlig ved Ferskvandene i Landets indre Dele, fornemmelig i Mjøsen, Valders-Vasdraget og i Vormen; paa det sidste Sted blev et Par Individer skudt i Sept. 1869. Ofte besøgc de ogsaa Fjeldvandene, og ere saaledes oftere bemærkede ovenfor Trægrændsen i Jotun- og i Gudbrandsdalsfjeldene, sidste Gang ved Atnesjøen Aug. 1869.

216. *Sterna arctica, Temm. macrura, Naum.* I Østfinmarken, hvor den er den eneste forekommende Art, ruger den ifølge Nordvi paa enkelte Steder ved Ferskvandene lige ind til Karasjok og paa Altenfjeldene, omtr. 20 Mile fra Søen, hvorfra han har modtaget dens Æg.

222. *Larus fuscus, Lin.* Besøger sjeldnere end de fleste øvrige Arter Ferskvandene i Landets indre Dele. I Juli 1870 opholdt sig en hel Flok i Valders; et Individ af disse blev skudt og opbevaret af Dr. Printz.

231. *Procellaria glacialis, Lin.* Uagtet den endnu ikke er funden rugende ved de scandinaviske Kyster, opholder den sig i ikke ubetydeligt Antal næsten hele Sommeren over langs Norges Skjærgaard, fornemmelig i Trakterne nordenfor Polarcirkelen; men ogsaa paa enkelte Steder ved de sydlige Kyster, især paa de mest besøgte Fiskepladse, viser den sig talrigt lige ned paa Højden af Stavanger.

236. *Podiceps rubricollis, Lath. subcristatus, Gmel.* Synes at ruge hist og her i de sydlige Egne; i de seneste Aar er den gjentagne Gange truffen omkring Christianssand, og Indiv. i 1869 skudte i Marts og October (Clausen).

237. *Podiceps cornutus, Temm. arcticus, Boie.* Er uden Tvivl den hyppigste af Landets Arter, og ruger paa flere Steder ved Ferskvandene langs de nordlige og vestlige Kyster, hyppigst fra Trondhjems Stift af og nordover til indenfor Polarcirkelen; i de seneste Aar ere Han og Hun skudte paa Smølen udenfor Trondhjemsfjorden i April 1870. Fra og til træffes den ogsaa overvintrende; et Indiv. i Vinterdragt, skudt ved Christianssund omkring Nytaar 1859, opbevares i Vid. Selsk. Saml. i Trondhjem. Allerede Aar 1762 blev den fundet rugende i Ofoten i Nordland ($68\frac{1}{2}^{0}$ N. B.), og den paa Redet skudte Hun sendt Biskop Gunnerus til Undersøgelse (Leems Beskr. over Finm. Lapper, p. 276 i Noten).

239. *Podiceps minor, Lath.* Er i de seneste Aar ogsaa fundet rugende ved Bergen (Friele), i hvis Musæum opbevares flere paa Landets Vestkyst fældede Individer.

Lycodes Sarsii, n. sp.

ex ordine Anacanthinorum Gadoideorum,

descripsit **Robertus Collett.**

(Cum tabula.)

(Retulit ad Societatem Scientiarum H. Rasch VI. Id. Mart. 1871).

Diagn. Maxilla superior et inferior serie pororum rotundorum, postice a m. inferiori aperturam branchialem versus continuata, ornatae.

Altitudo capitis sextam prope partem longitudinis totius corporis aequans.

Maxilla superior m. inferiori longior; rictus ad marginem anteriorem orbitae porrectus.

Spatium interorbitale sat parvum, dimidia diametro altitudinis orbitae vix longius.

Pinna dorsalis solito posterius sita, propius anum, quam radicem pinnarum pectoralium, oriens.

Pinnae ventrales radiis tribus, quartam partem longitudinis pinnarum pectoralium superantes.

Pinnae pectorales oblonge-lanceolatae, dimidia longitudine angustiores.

Distantia ani a radice pinnae pectoralis longitudini capitis aequalis.

Linea lateralis et squamae non conspicuae.

Color superne fuscus, inferne flavescens.

Hab. Hardangerfjord, Norvegia.

Descriptio.

Corpus elongatum, postice valde decrescens et utrinque compressum, apice complanato terminatur.

Altitudo maxima corporis ab occipite usque ad anum fere aequalis; post anum aequaliter et cito usque ad apicem pinnae caudalis diminuitur.

Pars corporis ab apice maxillae superioris ad anum tertiam partem longitudinis corporis totius paululum superat; anus ergo longe ante medium corpus situs.

Longitudo capitis (a symphysi ossium intermaxillarium ad angulum posteriorem postoperculi) in specimine immaturo scrutato sextam prope partem longitudinis corporis totius aequat, et parti ab angulo posteriori postoperculi ad anum prope modum aequalis.

Latitudo maxima capitis, paene inter praeopercula sita, altitudinem maximam, item dimidiam longitudinem capitis totius aliquanto superat, qua de causa caput leviter depressum videtur. Post praeopercula latitudo rursus diminuitur, quare forma occipitis ante pinnas pectorales constricta videtur.

Rostrum plagioplateum et antice obtusum; etiam breve, distantia oculi ab apice capitis diametrum longitudinalem ipsius vix superante.

Maxilla superior m. inferiori longior, rictus modo ad marginem anteriorem orbitae porrectus. Per totam longitudinem maxillarum series continua pororum magnorum et orbicularium utrinque extenditur; a maxilla inferiori retro per marginem inferiorem operculi, angulum superiorem aperturae branchialis versus, (illo vero non contingente) illi pori continuantur; inter nares vero, et ad symphysin maxillae inferioris omnino absentes.

Nares per tubos cutaneos in parte anteriori et superiori rostri, et satis propinquos, aperiuntur. Ut in speciebus ceteris generis hujus unum modo par adest. Post nares tubulosas, et ab illis remotum intervallo, in specimine scrutato distantiae narium ab osse intermaxillari aequali, foramen magnum mucosum orbiculare utrinque conspicitur; distantia illorum foraminum paullo modo, quam distantia inter se narium, minore. Ante et inter tubos narium cutis plana et fere triangularis, margine inferiore cum margine superiore ossis intermaxillaris coalescente, et apice medio inter foramina illa mucosa terminante, expanditur.

Oculi summi, oblique supravergentes, magnitudine mediocri;

valde propinqui, distantia orbitarum dimidia diametro altitudinis orbitae breviore. Forma oculorum oblonga, diametro longitudinali altitudine majore; ut antea dictum, longe ante medium caput siti.

Dentes haud diligenter examinari potuerunt: denticuli tamen et in osse intermaxillari, et in maxilla inferiori ut spinae acutissimae et tenuissimae praesentes.

Apertura branchialis satis angusta, ut rima verticalis coarctata tamen conspicua; membrana branchiostega utrinque sex radiis conflexis, introrsus longitudine decrescentibus, sustenta.

Linea lateralis sine poris mucosis perspicuis videtur, in forma depressionis modo inter strata musculorum conspicua; in regione suprascapulari post marginem superiorem radicis pinnarum pectoralium oriens, lineam mediam corporis sequitur, et usque ad radicem pinnae caudalis persequenda.

Squamae sine dubio omnino absentes; et sub microscopio vestigia minime observanda. Secretio vero mucosa abundantissime adfuisse videtur.

Pinnae ventrales filiformes et mancae, radiis tribus confertis; inter angulos inferiores aperturarum branchialium et ante pinnas pectorales, ossi hyoideo, et directe plicaturae paullum elevatae, quae a membrana faucis et ventre formatur, affixae. Qvamvis distantia inter illas brevior, perspicue tamen separatae; longitudo in specimine scrutato quartam partem longitudinis pinnarum pectoralium superat (vide *Günther:* catal. of the Acanthopt. Pharyngogn., and Anacanth. in Catal. of the fishes in the Br. Mus. vol. 4 p. 321).

Pinnae pectorales oblongae, leviter acuminatae et lanceolatae, latitudine longitudinis vix tertiam partem (in specimine immaturo) superante; latitudo maxima in parte dimidia exteriore sita. Apex fere ad anum porrectus; radii 18 per totam longitudinem indivisi videntur.

Pinna dorsalis posterius solito oritur, margine anteriore lineae verticali ex ano ascendenti propiore, qvam radici pinnarum pectoralium. Numerus radiorum in specimine scrutato non accurate numerari potuit. Per totam longitudinem dorsi aequalis, per *pinnam caudalem* (apicem brevissimum extra verticem ultimum caudalem formantem) *pinnae anali*, prorsus usque ad anum porrectae, contigua.

Color supra depressionem inter strata musculorum (lineam lateralem) antea commemoratam obscure fuscus, sub microscopio ex pigmento, maculas radiatas innumerabiles in fundo pallido formante, conspicitur. Inferior tota pars corporis unicolor flavescens; in partibus modo a linea laterali proximis, color obscurus corporis superioris extenditur. Pinnae verticales flavescentes, marginibus paulo obscurioribus ornatae; pinnae pectorales et ventrales flavescentes unicolores. Tubi narium ad radices obscure fusci; cutis plana triangularis rostri antea commemorata albida videtur.

Dimensiones.

Longitudo capitis (ab apice rostri ad marg. posteriorem operc.)	$7\frac{1}{2}^{mm}$.
Longitudo corporis ab apice rostri ad anum	14^{mm}.
Longitudo corporis ab ano ad apicem pinnae caudalis . . .	30^{mm}.
Longitudo totius corporis	44^{mm}.
Altitudo maxima capitis	$3\frac{1}{2}^{mm}$.
Altitudo corporis post radicem pinnae pectoralis	3^{mm}.
Latitudo corporis post radicem pinnae pectoralis	3^{mm}.
Distantia apicis rostri a margine anteriori pinnae dorsalis . .	11^{mm}.
Latitudo capitis inter præopercula	4^{mm}.
Distantia orbitarum	$\frac{1}{2}^{mm}$.
Distantia apicis rostri a margine anteriori orbitae	2^{mm}.
Distantia marginis posterioris orbitae a marg. posteriori operculi	4^{mm}.
Longitudo pinnarum pectoralium	5^{mm}.
Latitudo maxima pinnarum pectoralium	$1\frac{1}{2}^{mm}$.
Longitudo pinnarum ventralium	$1\frac{2}{3}^{mm}$.

Magnitudo speciei adultae nondum indicari potest. Si vero cum illis ex speciebus cognatis, nominibus *Illuocaetes* et *Phucocaetes, Jenyns*[1] distinctis, comparatur, quae ad oras neantarcticas inventi sunt, et qvibuscum habitu magis quam cum specie-

[1] „Zool. Beagle," fishes pp. 165 & 168, (vide *Günther*, catal. of Acanthopt. Pharyngognathi and Anacanth. in the collection of Br. Mus. vol. IV, p. 321); qvod opus utpote in bibliotheca universitatis Fredericianae non asservatum nunquam vidi.

bus arcticis consentit, potius magnitudinem illarum mediocrem aut parvam, quam amplam specierum arcticarum cognitarum, assequi videtur.

Patria.

Singulum modo specimen immaturum hujus speciei adhuc inventum et asservatum videtur, in Hardangerfjord, Norvegiae, extra praedium Utne, profunditate 100—150 orgyiarum, mense Septembri 1869, apparatu fundum maris radente captum a Georgio Ossiano Sars, diligentissimo scrutatore naturae et amico, cujus in honorem nomen addidi.

Over en Classe geometriske Transformationer.[1]

Af **Sophus Lie.**

Geometriens raske Udvikling i vort Aarhundrede staar, som bekjendt, i et intimt Afhængighedsforhold til philosophiske Betragtninger over den Cartesiske Geometris Væsen — Betragtninger, som ere fremsatte i sin almindeligste Form af *Plücker* i hans ældste Arbeider.

For den, som har trængt ind i Aanden i de Plückerske Værker, er der intet væsentligt Nyt i den Ide, at man som Element for Rummets Geometri kan anvende en hvilkensomhelst Curve, der afhænger af tre Parametere. Naar dog Ingen, saavidt mig bekjendt, har realiseret denne Tanke, saa maa Grunden sandsynligviis søges deri, at man ei har seet nogen Fordeel, som heraf kunde resultere.

Jeg har været ført til et almindeligt Studium af den omtalte Theori derved, at jeg fandt, at man gjennem en særdeles mærkværdig Afbildning kan tilbageføre Hovedtangent-Curvers Theori til Krumnings-Curvers.

Følgende Plückers Spor discuterer jeg Lignings-Systemet: $[F_1(x\,y\,z\;X\,Y\,Z) = 0,\; F_2(x\,y\,z\;X\,Y\,Z) = 0]$, som i en Betydning, der senere skal klargjøres, definerer en almindelig Reciprocitet mellem to Rum. Naar specielt de to Ligninger ere lineære med Hensyn til hvert System Variable, faaes en Afbildning, ved hvilken til hvert Rums Punkter svare i det andet Rum Linierne af en Plückersk Linie-Complex. Den simpleste blandt den Classe

[1] Nærværende Afhandlings vigtigste Synspunkter meddelte jeg Chr.a Videnskabs-Selskab i Juli og October 1870. Man sammenligne ogsaa en Note af Hr. Klein og mig i Berliner-Academiets „Monatsbericht" 15 Decbr. 1870.

Transformationer, som jeg paa denne Viis erholder, er den bekjendte Ampèreske, der herved viser sig i et nyt Lys. Specielt studerer jeg den før omtalte Afbildning, paa hvilken jeg begrunder en — som mig synes — *fundamental Relation mellem den Plückerske Linie-Geometri og en Rum-Geometri, hvis Element er Kuglen.*

Medens jeg beskjæftigede mig med nærværende Afhandling, har jeg staaet i levende Tankendvexling med Plückers Elev, Dr. *Felix Klein*, hvem jeg skylder mange Ideer, flere uden Tvivl, end det ved Citater er lykkedes mig at paavise.

Jeg skal ogsaa bemærke, at denne Afhandling har flere Berørings-Punkter med mine Arbeider over Plangeometriens Imaginærer. Naar jeg ei lader dette Afhængighedsforhold træde frem i min Fremstilling, saa har det paa den ene Side sin Grund i, at jeg anseer samme for tildeels tilfældigt, paa den anden Side deri, at jeg ei ønskede at afvige fra Mathematikkens sædvanlige Sprog.[1]

Første Afsnit.

Over en ny Rummets Reciprocitet.

§ 1.

Reciprocitet mellem to Plan eller to Rum.

1. Den Poncelet-Gergonneske Reciprocitets-Theori kan som bekjendt for den plane Geometris Vedkommende udledes af Ligningen:

$$X(a_1 x + b_1 y + c_1) + Y(a_2 x + b_2 y + c_2) + (a_3 x + b_3 y + c_3) = 0 \quad (1)$$

eller af den æqvivalente:

$$x(a_1 X + a_2 Y + a_3) + y(b_1 X + b_2 Y + b_3) + (c_1 X + c_2 Y + c_3) = 0,$$

forudsat at man i samme interpreterer (x, y) og (X, Y) som Cartesiske Punkt-Coordinater for to Plan.

[1] Ledet ved de i denne Afhandling fremsatte Theorier har Hr. Klein i en just offentliggjort Note (Gesellschaft d. Wissensch. zu Göttingen, 4 März 1870) ført de Plückerske Ideer et Skridt fremad, idet han har paaviist, at den Plückerske Linie-Geometri — eller gjennem min Afbildning den tilsvarende Kugle-Geometri — paa en mærkelig Maade frembyder sig som Illustration for den metriske Geometri mellem fire Variable.

Anvender man nemlig Udtrykket *conjugerte* om to Punkter (x, y) og (X, Y), hvis Coordinat-Værdier tilfredsstille Ligning (1), saa kan man sige, at de til et givet Punkt (x, y) conjugerte Punkter (X, Y) danne en ret Linie, der lader sig opfatte som *svarende* til det givne Punkt.

Da alle Punkter af en given ret Linie have et fælles conjugeret Punkt i det andet Plan, saa gaa deres tilsvarende rette Linier gjennem dette fælles Punkt.

De to Plan afbildes saaledes ved Ligning (1) paa en saadan Maade i hinanden, at til det ene Plans Punkter svare det andet Plans rette Linier. Til Punkter af en given ret Linie λ svare de rette Linier, der gaa gjennem λ's Billedpunkt.

Men heri ligger just Principet for den Poncelet-Gergonneske Reciprocitets-Theori.

Man betragte nu i det ene Plan en Mangekant, hvis Hjørner ere: $(p_1, p_2 \ldots p_n)$, og i det andet Plan den Polygon, hvis Sider: $(S_1\, S_2 \ldots S_n)$ svare til disse Punkter. Af hvad vi have sagt følger, at ogsaa den sidste Mangekants Hjørner: $(S_1\, S_2)\, (S_2\, S_3) \ldots$ $\ldots (S_{n-1}\, S_n)$ ere Billedpunkter af den givnes Sider: $(p_1\, p_2)\, (p_2\, p_3) \ldots$ $\ldots (p_{n-1}\, p_n)$, at saaledes de to Polygoner staa i et reciprokt Forhold.

Ved Grændse-Overgang føres man herfra til Betragtning af to Curver c og C, der svare til hinanden paa en saadan Viis, at den enes Tangenter afbilde sig som den andens Punkter. To saadanne Curver siges at være hinanden *reciproke* relativ til Ligning (1).

2. *Plücker*[1] har baseret en Generalisation af den just fremsatte Theori paa Interpretationen af den almindelige Ligning:

$$F\,[x, y\; X, Y) = 0. \quad (2)$$

De til et givet Punkt (x, y) [eller (X, Y)] conjugerte Punkter (X, Y) [eller (x, y)] danne nu en Curve C [eller c], der fremstilles ved Ligning (2), naar i samme (x, y) [eller (X, Y)] opfattes som Parametere, (X, Y) [eller (x, y)] derimod som løbende Coordinater.

Ved Ligning (2) afbildes saaledes de to Plan paa en saadan Viis i hinanden, at til det ene Plans Punkter svare i det andet eentydig Curverne af et vist Curve-Net.

[1] Analytisch geometrische Entwickelungen. T. I. Zweite Abth.

Ganske som før indsees, at til Punkter af en given Curve c [eller C] svare Curver C [eller c], der gaa gjennem den givnes Billedpunkt.

Til en Polygon af Curver c ($c_1 c_2 \ldots c_n$) svare n Punkter: ($P_1 P_2 \ldots P_n$), som parviis ligge paa de Curver C: ($P_1 P_2$) ($P_2 P_3$) . . . . ($P_{n-1} P_n$), hvis Billedpunkter ere Hjørner for den givne krumliniede Polygon. Endelig føres man ogsaa her til Betragtning af Curver σ og Σ i de to Plan, der staa til hinanden i et saadant gjensidigt Forhold, at til den enes Punkter svare Curver c [eller C], der omhylle den anden. Dog er dette Reciprocitets Forhold ialmindelighed ei fuldstændigt, idet i Regelen adjungerte Former optræde.

3. *Plücker*[1] grunder den almindelige Reciprocitet mellem to Rum paa Interpretationen af den almindelige Ligning:

$$F\,(x\,y\,z\,X\,Y\,Z) = 0.$$

Naar F er lineær med Hensyn til hvert System Variable, erholdes den Poncelet-Gergonneske Reciprocitet mellem de to Rums Punkter og Plan.

I nærværende Afhandling og specielt i sammes første Afsnit agter jeg at studere en ny Rummets Reciprocitet, der er at betragte som sideordnet til den Plückerske, og som defineres ved Lignings-Systemet:

$$F_1\,(x\,y\,z\,X\,Y\,Z) = 0$$
$$F_2\,(x\,y\,z\,X\,Y\,Z) = 0,$$

naar i samme (x y z) og (X Y Z) opfattes som Punkt-Coordinater for to Rum r og R.

§ 2.

En Rum-Curve, der afhænger af tre Parametere, kan vælges til Element for Rummets Geometri.

4. Den Transformation af geometriske Satser, som grunder sig paa den Poncelet-Gergonneske eller Plückerske Reciprocitet, kan — saaledes som Gergonne og Plücker have fremhævet — sees fra et høiere Synspunkt, hvilket vi her ville angive, fordi det Samme gjælder vor nye Reciprocitet.

Den Cartesiske analytiske Geometri oversætter nemlig et hvil-

[1] Uagtet jeg ei kan anføre noget Citat, tror jeg dog, at det er correkt at henføre denne Reciprocitet til Plücker.

ketsomhelst geometrisk Theorem i et algebraisk og gjør saaledes af Planets Geometri en sandselig Fremstilling af to Variables Algebra og ligesaa af Rummets Geometri en Repræsentation for tre variable Størrelsers Algebra.

Nu har specielt *Plücker* rettet Opmærksomheden paa den Omstændighed, at den Cartesiske analytiske Geometri er behæftet med en dobbelt Vilkaarlighed.

Descartes fremstiller et System Værdier af de Variable x og y ved et *Punkt* i Planet; han har, som man pleier at udtrykke sig, *valgt Punktet til Element for Planets Geometri*, medens man med samme Ret kunde anvende hertil den rette Linie eller overhovedet en hvilkensomhelst Curve, der afhang af to Parametere. Nu kan — for Planets Vedkommende — den geometriske Transformation, som grunder sig paa den Poncelet-Gergonneske Reciprocitet, opfattes som bestaaende i en Overgang fra Punkt til ret Linie som Element, og ligesaa beror i samme Forstand den Plückerske Planets Reciprocitet paa en Indførelse af en Curve, der afhænger af to Parametere, som Element for Planets Geometri.

Endvidere fremstiller Descartes et Størrelse-System (x, y) ved *det* Punkt i Planet, hvis Afstand fra to givne Axer er lig x og y; *han har blandt den ubegrændsede Mangfoldighed af mulige Coordinat-Systemer valgt et bestemt.*

De Fremskridt, som Geometrien har gjort i det 19de Aarhundrede, bero for en væsentlig Deel derpaa, at disse to Vilkaarligheder i den Cartesiske analytiske Geometri ere blevne klart erkjendte som saadanne, og det ligger forsaavidt nær at forsøge at udnytte disse vigtige Sandheder endmere.

5. De i det Følgende fremstillede nye Theorier grunde sig derpaa, *at man kan vælge en hvilkensomhelst Rum-Curve, der afhænger af tre Parametere, som Element for Rummets Geometri.* Erindrer man til Exempel, at Ligningerne for den rette Linie i Rummet indeholde fire væsentlige Constanter, saa indsees, at de rette Linier, som tilfredsstille een given Betingelse, kunne anvendes som Element for en Rummets Geometri, der — som den sædvanlige — giver en sandselig Fremstilling af tre Variables Algebra.

Herved bliver dog et vist Linie-System — *en Plückersk Linie-Complex* — udmærket, og det er som Følge heraf indlysende, at en bestemt Repræsentation af denne Art kun kan have en begrændset Anvendelighed. Hvis det imidlertid gjælder et *Studium af Rummet relativt til en given Linie-Complex,* saa kan det være særdeles fordelagtigt at vælge denne Complexes rette Linier til Rum-Element. I den *metriske* Geometri er som bekjendt den uendelig bortfjernede imaginære Cirkel og som Følge deraf de rette Linier, der skjære samme, udmærket, og *derfor kunde der a priori være nogen Grund til at antage, at det, naar det gjaldt visse metriske Problemers Behandling, vilde være fordelagtigt at indføre disse rette Linier som Element.*

Det er vel at bemærke, at naar vi just exempelviis have sagt, at det er muligt at vælge en Linie-Complexes rette Linier til Rum-Element, saa er det noget ganske andet, noget mere particulært, om man vil, end de Ideer, som ligge til Grund for *Plückers* sidste Værk: *„Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raum-Element“.* Plücker havde allerede tidlig fæstet Opmærksomheden paa, at det er muligt at skabe en Repræsentation for en Algebra, der omfatter et hvilketsomhelst Antal Variable, idet man nemlig indfører en Figur, der afhænger af det nødvendige Antal Parametere som Element. Specielt fremhævede han [1], at Rumlinien har fire Coordinater, at man altsaa ved at vælge samme som Rum-Element erholder en Geometri, for hvilken Rummet har *fire* Dimensioner.

§ 3.

Curve-Complex. Ny geometrisk Interpretation af partielle Differentialligninger af første Orden. En Linie-Complexes Hovedtangent-Curver.

6. *Plücker* har anvendt Udtrykket *Linie-Complex* for at betegne Indbegrebet af rette Linier, der tilfredsstille een given Betingelse, og som saaledes afhænge af *tre* ubestemte Parametere. I Analogi hermed forstaar jeg i det Følgende ved *Curve-Complex* et hvilketsomhelst System af Rum-Curver c, hvis Ligninger:

[1] Geometrie des Raumes. n. 258. (1846).

$$f_1(x\,y\,z\,a\,b\,c) = 0,\ f_2(x\,y\,z\,a\,b\,c) = 0. \quad (3)$$

indeholde *tre væsentlige Constanter.*

Ved Differentiation af (3) med Hensyn til x y z og Elimination af a, b, c mellem de to nye og de oprindelige Ligninger erholdes et Resultat af Formen:

$$f(x\,y\,z\,dx\,dy\,dz) = 0. \quad (4)$$

Opfattes her x, y, z som Parametere, dx dy dz derimod som Retnings-Cosinusser, saa tilordnes hvert Punkt i Rummet ved (4) en Kegle, Indbegrebet nemlig af Tangenter til de Complex-Curver c, der gaa gjennem angjældende Punkt. Disse Kegler kalder jeg *elementære Complex-Kegler;* endvidere anvender jeg Udtrykket: *elementær Complex-Retning* for at betegne et hvilketsomhelst Linie-Element (dx dy dz), der tilhører en Complex-Curve c. *Indbegrebet af de til et Punkt svarende elementære Complex-Retninger danne den Punktet tilordnede elementære Complex-Kegle.*

Til et givet System (3) eller — som man ogsaa kan sige — til en given Curve-Complex svarer en bestemt Ligning: [f = 0]; *derimod kan [f = 0] gjennem de angivne Operationer udledes af en ubegrændset Mangfoldighed Systemer (3).*

Vælger man nemlig en hvilkensomhelst Relation af Formen:

$$\psi\,[x\,y\,z\,dx\,dy\,dz\,\alpha] = 0,$$

hvorved α betegner en Constant, og repræsenterer

$$\varphi_1(x\,y\,z\,\alpha\,\beta\,\gamma) = 0,\ \varphi_2(x\,y\,z\,\alpha\,\beta\,\gamma) = 0$$

Integralet af det simultane System:

$$f = 0,\ \psi = 0,$$

saa er det indlysende, at ogsaa $[\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0]$ gjennem Differentiation relativt til x, y, z og Elimination af α, β, γ fører til: $(f = 0)$.

Enhver Curve af denne nye Complex: $[\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0]$ *omhylles* af Curver c, idet dens Elementer samtlige ere Complex-Retninger.

7. En partiel Differentialligning af første Orden mellem x, y, z er efter *Monge* æqvivalent med følgende Problem: at finde den almindeligste Flade, som i hvert af sine Punkter berører en angjældende Punkt tilordnet Kegle, hvilken sidstes almindelige

Ligning i Plan-Coordinater just fremstilles ved den givne partielle Differentialligning.

Lagrange og *Monge* have tilbageført dette Problem til Bestemmelsen af en vis Curve-Complex — de saakaldte *characteristiske Curver* — idet de have paaviist, at man stedse erholder en Integralflade ved at forene til en Flade en Skare characteristiske Curver, af hvilke hver skjærer den næstforegaaende.

Man kan lægge Mærke til, at den Ligning:

$$f(x\,y\,z\,dx\,dy\,dz) = 0,$$

som de characteristiske Curver efter Ovenstaaende bestemme, er at ansee for jævngod med den partielle Differentialligning selv, idet begge disse Ligninger ere den analytiske Definition for den samme 3-dobbelte Uendelighed af Kegler.

8. *En almindeligere geometrisk Interpretation af partielle Differentialligninger af første Orden mellem $x\,y\,z$ erholde vi ved at paavise, at den Opgave: at finde den almindeligste Flade, som i hvert af sine Punkter har en trepunktig Berøring med en Curve af en given Curve-Complex — hvorved dog forudsættes, at angjældende Curve ei i sin hele Udstrækning ligger paa Fladen — finder sit analytiske Udtryk i en partiel Differentialligning af første Orden. Er endvidere:*

$$f(x\,y\,z\,dx\,dy\,dz) = 0$$

den Ligning, som de characteristiske Curver bestemme, saa vil enhver Curve-Complex, hvis Ligninger tilfredsstille ($f = 0$), staa i det angivne geometriske Forhold til den givne partielle Differentialligning.

Man tænke sig givet en Complex af Curver c, der tilfredsstille ($f = 0$) og udtrykke analytisk den Fordring til en Flade [$z = F(x\,y)$], at den i hvert af sine Punkter skal have en trepunktig Berøring med en Curve c, *uden at man dog udelukker Muligheden af en endnu intimere Contakt.* Det er let at see, at herved erholdes til Bestemmelse af z en partiel Differentialligning af 2den Orden ($\delta_2 = 0$)[1]. Men enhver Flade, der er genereret af uendelig mange c, tilfredsstiller tydeligviis ($\delta_2 = 0$), og saaledes kjendes sammes almindelige Integral med to arbitrære Funktioner. Jeg

[1] ($\delta_2 = 0$) har Formen: [$A(rt - s^2) + Br + Cs + Dt + E = 0$]. Man sammenligne en Afhandling af Boole i Crelles Journal. Bd. 61.

vil gjennem analytiske Betragtninger af stor Simpelhed — om end formelt af nogen Bredde — paavise, at den partielle Differentialligning af første Orden ($\delta_1 = 0$), der svarer til ($f = 0$), tilfredsstiller ($\delta_2 = 0$). Da nu tydeligviis ($\delta_1 = 0$) ialmindelighed ei indgaar i det før omtalte almindelige Integral, saa er ($\delta_1 = 0$) et *singulært* Integral af ($\delta_2 = 0$).

Ligningen: [$f(x\,y\,z\,dx\,dy\,dz) = 0$] giver ved Differentiantion:

$$f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz + f'_{dx}\,d^2x + f'_{dy}\,d^2y + f'_{dz}\,d^2z = 0, \quad (6)$$

hvorved ($dx\,dy\,dz\,d^2x\,d^2y\,d^2z$) ere at betragte som henhørende til en hvilkensomhelst Curve, der tilfredsstiller: ($f = 0$). Specielt gjælder (6) for [$\delta_1 = 0$]'s characteristiske Curver, og idet vi udmærke disse ved en Index, erholde vi:

$$f'_{x_1}\,dx_1 + \ldots f'_{dx_1}\,d^2x_1 + \ldots = 0.$$

Bemærkes nu, at enhver Curve, der berører en af ($\delta_1 = 0$)'s Integralflader: ($U = 0$), tilfredsstiller Ligningen:

$$\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz} = 0, \quad (7)$$

at videre enhver Curve, der med ($U = 0$) har en trepunktig Contakt, desuden fyldestgjør Relationen:

$$\frac{d^2U}{dx^2}(dx)^2 + \ldots . \left(\frac{dU}{dx}\right) d^2x \ldots = 0, \quad (8)$$

saa sees, at enhver characteristisk Curve, der ligger paa ($U = 0$), tilfredsstiller saavel (7) som (8).

Men ($U = 0$) berører i hvert af sine Punkter den tilordnede Kegle af Systemet: ($f = 0$), og saaledes gjælde Ligningerne:

$$f'_{dx} = \rho\frac{dU}{dx},\ f'_{dy} = \rho\frac{dU}{dy},\ f'_{dz} = \rho\frac{dU}{dz},$$

i hvilke ρ betegner en ubekjendt Proportionalitets-Faktor. Altsaa gaar den accentuerte Ligning (8) over i følgende

$$\rho\left[\frac{d^2U}{dx_1^2}(dx_1)^2 + \ldots\right] + \left[f'_{dx_1}\,d^2x_1 + \ldots\right] = 0.$$

Men vi vide, at:

$$f'_{x_1}\,dx_1 + \ldots \quad + f'_{dx_1}\,d^2x_1 + \ldots = 0$$

og altsaa er:

$$\rho\left[\frac{d^2U}{dx_1^2} + \ldots\right] = f'_{x_1}\left[dx_1 + \ldots\right]$$

eller ved Udeladelse af den nu unødvendige Index:

$$\rho\left[\frac{d^2U}{dx^2}dx^2 + ..\right] = f'_x\, dx + ..$$

Nu er imidlertid

$$\rho\left[\frac{dU}{dx}d^2x + \frac{dU}{dy}d^2y + \frac{dU}{dz}d^2z\right] = \left[f'_{dx}\, d^2x + ..\right]$$

og altsaa gjælder Ligningen:

$$\rho\left[\frac{dU}{dx}d^2x + \frac{dU}{dy}d^2y + \frac{dU}{dz}d^2z + \frac{d^2U}{dx^2}(dx)^2 + ...\right] =$$

$$= f'_x\, dx + f'_y\, dy + f'_z\, dz + f'_{dx}\, d^2x + f'_{dy}\, d^2y + f'_{dz}\, d^2z,$$

hvis høire og venstre Led altsaa samtidig forsvinde.

Vore Udviklinger vise, at enhver Curve, der tilfredsstiller ($f = 0$), og som berører en paa ($U = 0$) liggende characteristisk Curve, har med nævnte Flade en trepunktig Berøring; ($\delta_1 = 0$) er altsaa et singulært Integral af ($\delta_2 = 0$).

Endelig paavise vi, at ($\delta_2 = 0$) ikke tilsteder noget andet singulært Integral.

Paa en Integralflade I af ($\delta_2 = 0$) tilordnes nemlig hvert Punkt en Retning — den tilsvarende, trepunktig berørende c's Tangent. Forudsættes nu, at I ei er genereret af en Skare c, saa gaar gjennem hvert Punkt af I to sammenfaldende c, der begge berøre Fladen i angjældende Punkt. Men følgelig berøres I i hvert af sine Punkter af den tilsvarende elementære Complex-Kegle; I tilfredsstiller Ligningen: ($\delta_1 = 0$).

9. *Corollar. Bestemmelsen af den almindeligste Flade, som i hvert af sine Punkter har en — ikke paa Fladen liggende — Hovedtangent, der tilhører en given Linie-Complex, beror paa Løsningen af en partiel Differentialligning af første Orden, hvis characteristiske Curver omhylles af Complexens Linier. De nævnte Curver optræde i dette Tilfælde som Hovedtangent-Curver paa Integralfladerne.*

Vi levere et selvstændigt geometrisk Beviis for dette Corollar.

Den partielle Differentialligning, hvis Characteristika omhylles af en given Linie-Complexes Linier, er efter den Mongeske Theori det analytiske Udtryk for følgende Problem: at finde den almindeligste Flade, som i hvert af sine Punkter berører den til Punktet svarende Complex-Kegle. Men naar en Curves Tangenter tilhøre en Linie-Complex, saa er sammes Osculations-Plan Tangentplan til den tilsvarende Complex-Kegle, og altsaa ere vore characteristiske Curvers Osculations-Plan Tangentplan for alle Integralflader, der indeholde angjældende Curve. Her udfordredes endnu et Par Bemærkninger, som imidlertid kun vilde være en Gjentagelse af, hvad vi før have sagt.

Enhver Linie-Complex bestemmer efter Ovenstaaende en Complex af Curver, der omhylles af Linie-Complexens Linier, og som besidde den Egenskab at være Hovedtangent-Curver paa enhver Flade, som er genereret af et System af disse Curver, af hvilke hver skjærer den næstforegaaende. *Denne Complex af Curver kalde vi i det Følgende Linie-Complexens Hovedtangent-Curver.*

Jeg skylder Hr. *Klein* den Bemærkning, at den Congruenz rette Linier, som Plücker kalder en Linie-Complexes *singulære Linier*, tilhører den nævnte Curve-Complex. Dannes den givne Complex af en Flades Tangenter [eller af de rette Linier, som skjære en Curve], da ere samtlige Linie-Complexens Linier singulære Linier og altsaa tillige Hovedtangent-Curver.

§ 4.

Lignings-Systemet: $F_1(x\,y\,z\,X\,Y\,Z) = 0$, $F_2(x\,y\,z\,X\,Y\,Z) = 0$ *bestemmer en Reciprocitet mellem to Rum.*[1]

10. Vi begynde nu et Studium af den Rummets Reciprocitet, som bestemmes ved Ligningerne:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x\,y\,z\,X\,Y\,Z) = 0 \\ F_2(x\,y\,z\,X\,Y\,Z) = 0, \end{array}\right\} \quad (9)$$

naar i samme (x y z) og (X Y Z) opfattes som Punkt-Coordinater for to Rum r og R.[2]

Anvender man Udtrykket *conjugerte* om to Punkter, hvis Coordinat-Værdier (x y z) og (X Y Z) fyldestgjør Relationerne (9), saa kan man sige, at de til et givet Punkt (x y z) conjugerte Punkter (X Y Z) danne en Curve C, der fremstilles ved (9), naar i samme (x y z) opfattes som Parametere, (X Y Z) derimod som løbende Coordinater.

[1] Man sammenholde denne Paragraph med § 1.

[2] Ting, der høre til Rummet r, betegne vi ialmindelighed med smaa Bogstaver; derimod anvende vi store Bogstaver om Alt, der hører til R.

Til Rummet r's Punkter svare saaledes entydig Curverne C af en vis Curve-Complex i R, og ligesaa optræder i r en Complex af Curver c, der staa i samme Forhold til R's Punkter.

En Curve c's Punkter have et fælles conjugeret Punkt i R, og følgelig gaa deres tilsvarende C gjennem dette fælles Punkt.

De to Rum afbildes saaledes ved Lignings-Systemet (9) paa den Viis i hinanden, at til hvert Rums Punkter svare i det andet eentydig Curverne af en vis Complex. Naar et Punkt beskriver en Complex-Curve, saa dreier[1] *den til Punktet svarende Complex-Curve om den gjennemløbnes Billedpunkt.*

11. Det lader sig nu paavise, at Ligningerne (9) bestemme en almindelig Reciprocitet mellem Figurer i de to Rum og specielt mellem Curver, der omhylles af Complex-Curver c og C.

Naar to Curver af den ene Complex have et Fælles-Punkt — hvad tydeligviis ialmindelighed ei er Tilfældet — saa ligge deres Billedpunkter paa en Complex-Curve. Specielt er at bemærke, at to uendelig nærliggende Complex-Curver, der skjære hinanden, afbilde sig som to Punkter, hvis infinitesimale Forbindelseslinie er en elementær Complex-Retning.

Man tænke sig nu i r en Curve σ, der omhylles af Curver c, og alle Curver C, der svare til σ's Punkter. To consecutive af disse C ville, efter hvad vi just have sagt, skjære hinanden, og altsaa bestemmer deres Indbegreb en Omhyllings-Curve Σ.

Det er endvidere indlysende, at naar et Punkt gjennemløber Σ, saa vil den correspoderende c *omhylle* en Curve σ^1, og det lader sig paavise, at σ^1 just er den oprindelig givne Curve σ.

Man betragte nemlig paa den ene Side en krumliniet af Complex-Curver: $(c_1\, c_2\, c_3 \ldots c_n)$ dannet Polygon, hvis Hjørner ere $(c_1\, c_2)$ $(c_2\, c_3) \ldots (c_{n-1}\, c_n)$ — og paa den anden Side Curverne c's Billedpunkter: $(P_1\, P_2 \ldots P_n)$, der aabenbart parviis: $(P_1\, P_2)$ $(P_2\, P_3) \ldots (P_{n-1}\, P_n)$ ligge paa Complex-Curver C, de nemlig, der svare til den givne Polygons Hjørner. Den nye Polygon i R og den givne staa saaledes i et fuldstændigt reciprokt Forhold til hinanden.

[1] Udtrykket „dreier" er forsaavidt uheldigt, som der naturligvis menes en Dreining ledsaget af Form-Forandring.

Ved Grændse-Overgang erholder man i de to Rum Curver, der omhylles af Complex-Curver c og C, og som staa i et saadant gjensidigt Forhold til hinanden, at til den enes Punkter svare de Complex-Curver, der omhylle den anden.

En af Complex-Curver omhyllet Curve afbilder sig saaledes for en dobbelt Opfatning som en anden ligesaa af Complex-Curver omhyllet Curve, hvilken vi sige er den givne *reciprok* relativ til Lignings-Systemet (9).

Man kan ogsaa lægge Mærke til, at elementære Complex-Retninger (dx dy dz) (dX dY dZ) ordne sig parviis sammen som reciproke, og at saaledes to af Complex-Curver omhyllede krumme Linier, der berøre hinanden, afbilde sig i det andet Rum som Curver, der staa i samme gjensidige Forhold.

12. Ogsaa mellem andre Rumformer bestemme Ligningerne (9) en Samsvaren, som dog ei ialmindelighed er en fuldstændig Reciprocitet.

En given Flade f's Punkter afbilde sig nemlig i R som en dobbelt Uendelighed af Curver C, som en Curve-Congruenz, hvis Brændflade[1] *være F. Ligesaa svarer til F's Punkter en Congruenz af Curver c, hvis Brændflade, som vi siden skulle see, indeholder f som reductibel Deel.*

De elementære Complex-Kegler, hvis Toppunkter ligge paa Fladen f, skjære sammes tilsvarende Tangentplan i n rette Linier — ved n forstaaet disse Complex-Keglers Orden — og bestemmer saaledes i hvert Punkt af f n elementære Complex-Retninger. Den continuerlige Succession af disse Retninger danner en f n-dobbelt bedækkende Skare Curver, hvilke samtlige omhylles af Complex-Curver c. *Det geometriske Sted for denne Curve-Skares reciproke Curver, eller, som vi ogsaa kunne sige, Indbegrebet af Billedpunkter af de c, som berøre f, danne Brændfladen F.*

[1] I Analogi med den for Linie-Congruenzer anvendte Terminologi forstaar jeg ved denne Curve-Congruenzes Brændflade: det geometriske Sted for Skjærings-Punkter mellem infinitesimalt nærliggende Curver C. Tænkes Curve-Congruenzen defineret ved en lineær partiel Differentialligning, saa er dens Brændflade just, hvad man ialmindelighed kalder Differentialligningens singulære Integral.

For at bevise dette erindre man, at to infinitesimalt nærliggende, hinanden skjærende Curver C afbilde sig som to Punkter, hvis infinitesimale Forbindelses-Linie er en elementær Complex-Retning. Nu udgaar fra et Punkt p_0 paa f n Complex-Retninger, og altsaa skjæres p_0's Billed-Curve C_0 i n Punkter af nærliggende C, der høre til vor før betragtede Curve-Congruenz — i de n Punkter nemlig, der svare til de n Complex-Curver c, der berøre Fladen f i Punktet p_0. F's Punkter ere saaledes Billedet af de c, der berøre f.

Da nu f har en almindelig Beliggenhed i Rummet r, saa vil en c, der berører f i et Punkt, ialmindelighed ei have flere Berøringspunkter med samme. Men alle disse c danne en Congruenz, i hvilken hver c berører Brænd-Systemet i N Punkter — ved N forstaaet Ordenen af de elementære Complex-Kegler i R —, og altsaa decomponeres, som ovenfor sagt, vor Congruenzes Brænd-System i f og en Flade φ, der berøres af hver c i (N—1) Punkter.

Skal saaledes den ved Ligningerne (9) bestemte Sammensvaren mellem Flader i r og R være en fuldstændig Reciprocitet, saa er det nødvendigt og tilstrækkeligt, at n og N begge ere lig 1. *I almindelighed er Reciprocitets-Forholdet ufuldkomment, idet analoge Operationer overføre paa den ene Side f i F, og paa den anden Side F i Indbegrebet af f og φ.*

De ovenstaaende Betragtninger have ogsaa Gyldighed, naar f og som Følge deraf F ere Flade-Elementer; er f kun i een Retning infinitesimal, saa er det *Samme* Tilfældet med F.

Man betragte endelig en Curve k, som ei omhylles af Complex-Curver c, tilligemed den Flade F, der dannes af alle C, som svare til k's Punkter. En C's Punkter overføres i de gjennem C's Billedpunkt gaaende Curver c, og altsaa svarer til F's Punkter Indbegrebet af Curver c, der skjære k. *Afhængighedsforholdet mellem k og F er saaledes et dobbelt.*

Ligningerne (9), der afbilde de to Rum i hinanden, overføre efter Ovenstaaende givne Rumformer i nye, der staa i et reciprokt Forhold til de givne og kunne saaledes tjene til at transformere geometriske Theoremer og Problemer. For en speciel

Form af Ligningerne (9) ville vi senerehen gjøre vigtige Anvendelser af dette Transformations-Princip.

§ 5.

Transformation af partielle Differentialligninger.

13. *Legendre*[1] har først givet en almindelig Methode for — i den moderne Geometris Sprog — at overføre en partiel Differentialligning mellem Punkt-Coordinater x y z i en Differentialligning mellem Plan-Coordinater t, u, v, eller — som man ogsaa kan sige — mellem Punkt-Coordinater t, u, v, for et Rum, som staar i et reciprokt Forhold til det givne.

Indfører man Curverne c som Element for Rummet r, saa er det paa lignende Viis muligt at transformere en partiel Differentialligning mellem x, y, z i en Differentialligning mellem det nye Rum-Elements Coordinater X Y Z, hvorved man ogsaa kan interpretere X, Y, Z som Punkt-Coordinater for Rummet R, — en Opfatning, som vil være den fremtrædende i vor Fremstilling.

Være da givet en hvilkensomhelst partiel Differentialligning af første Orden mellem x, y, z og alle Flader ψ, som fremstille et saakaldet „integral complet" af samme, hvor man maa erindre, at enhver anden Integralflade f lader sig fremstille som Envellop af enkelt uendelig mange ψ.

Man betragte endvidere i Rummet R alle Flader Ψ og Φ, der svare til Fladerne ψ og f. Vi skulle strax paavise, at enhver F er Omhyllingsfladen af enkelte uendelig mange Ψ, at altsaa Fladerne F tilfredsstille en partiel Differentialligning af første Orden, for hvilken alle Ψ danne et „integral complet."

To i r givne Flader, der besidde et fælles Flade-Element, afbilde sig nemlig i R som Flader, der berøre hinanden, og ligesaa overføres Flader, der besidde uendelig mange fælles Flade-Elementer, i Flader, der som de givne berøre hinanden efter en Curve.

Dette forudsat, betragte man en Integralflade f_0 og alle enkelt uendelig mange ψ_0, der berøre samme efter en characteristisk Curve, samt endelig de tilsvarende F_0 og Ψ_0. Det er indlysende, at F_0 berøres af hver Ψ_0 efter en Curve, at altsaa F_0 er Omhyllingsfladen af alle Ψ_0.

[1] Man sammenligne ogsaa: Plücker, Geometrie des Raumes. § 2. (1846).

14. En speciel Interesse frembyder det Tilfælde, at den *partielle Differentialligning,* som transformeres, just er den, *som bestemmes af Complex-Curverne c* (cfr. § 3); isaafald lader sig paavise, at den tilsvarende Differentialligning mellem X, Y, Z decomponeres i to Ligninger, af hvilken den ene just *er den, som svarer til Complex-Curverne C.*

Være nemlig givet en Integral-Flade f af den givne Differentialligning mellem x y z, og alle til Fladen f's Punkter svarende elementære Complex-Kegler. Disse Kegler bestemme efter § 4 i hvert Punkt af f n Complex-Retninger, af hvilke in casu to falde sammen; altsaa decomponeres den i § 4 paa Fladen f betragtede Skare Curver, der omhylles af Complex-Curver c, i f's characteristiske Curver og et Curve-System, der bedækker f (n—2) dobbelt.

Den til f's Punkter svarende Curve-Congruenz i Rummet R har saaledes et Brænd-System, der decomponeres i to Flader, af hvilke den ene — som vi ville kalde Φ — berøres af hver c i to sammenfaldende Punkter, medens der falder (n—2) Berørings-Punkter paa den anden. *Fladerne Φ tilfredsstille saaledes den partielle Differentialligning, som efter Theoremet i § 3 bestemmes af Complex-Curverne C.*

Bemærkes nu, at Φ er det geometriske Sted for de reciproke Curver af f's characteristiske Curver, saa sees, at to Integralflader f_1 og f_2, der berøre hinanden efter en characteristisk Curve k, overføres i to Flader Φ_1 og Φ_2, der berøre hinanden efter k's *reciproke* Curve; k omhylles nemlig af Complex-Curver c.

De characteristiske Curver for de to partielle Differentialligninger, som efter § 3 bestemmes af Curve-Complexerne c og C, ere reciproke Curver relativt til Lignings-Systemet (9).

15. Den just angivne Sætning giver følgende almindelige Methode for Transformation af partielle Differentialligninger af første Orden.

Man bestemme efter den sædvanlige Methode den Ligning:

$$f(x\,y\,z\,dx\,dy\,dz) = 0,$$

som den givne partielle Differentiallignings Characteristika tilfredsstille, og vælge en hvilkensomhelst Relation af Formen:

$$\psi(x\,y\,z\,dx\,dy\,dz\,X)=0,$$

hvorved X betegner en Constant. Det simultane System:

$$f=0,\ \psi=0$$

være integreret i Formen:

$$F_1(x\,y\,z\,X\,Y\,Z)=0.\ \ F_2(x\,y\,z\,X\,Y\,Z),$$

hvorved Y og Z ere de ved Integrationen indførte Constanter. Ved Differentiation og Elimination erholdes en Relation af Formen:

$$F_3(X\,Y\,Z\,dX\,dY\,dZ)=0,$$

som vi opfatte som Ligning for de characteristiske Curver af en vis partiel Differentialligning:

$$F_4\left(X\,Y\,Z\,\frac{dZ}{dX}\,\frac{dZ}{dY}\right)=0.$$

Vore tidligere Udviklinger vise, at $(F_4=0)$, der udledes af $(F_3=0)$ efter de sædvanlige Regler, og den givne partielle Differentialligning staa i et saadant gjensidigt Afhængighedsforhold, at hvis den ene kan integreres, saa lader ogsaa den anden sig behandle.

Man kan heraf drage almindelige Slutninger vedrørende Reduction i Grad af partielle Differentialligninger af første Orden, der defineres ved en Complex af Curver, hvis Orden er givet.

Saaledes kan til Exempel enhver partiel Differentialligning af første Orden, der defineres ved en Linie-Complex. (§ 3), transformeres i en partiel Differentialligning af 2den Grad.[1]

Ligesaa kan enhver partiel Differentialligning, der defineres ved en Keglesnits-Complex, transformeres i en Differentialligning af 30te Grad.[2]

§ 6.

Over den almindeligste Transformation, der overfører Flader, som berøre hinanden i lignende Flader.

16. Ved Studiet af partielle Differentialligninger spille Transformationer, der lade sig udtrykke i Formen:

$$X=F_1(x\,y\,z\,p\,q),\ \ Y=F_2(x\,y\,z\,p\,q),\ \ Z=F_3(x\,y\,z\,p\,q),$$

en vigtig Rolle. Ved p og q forstaaes som sædvanlig de partiel

[1] Denne Reduction beror derpaa, at enhver Linie af en Linie-Congruenz berører Brænd-Systemet i 2 Punkter (§ 4, 12).

[2] Tallet 30 fremkommer som Product af 6 og (6 − 1); 6 er Antallet af Punkter, i hvilke Brænd-Systemet for en Keglesnits-Congruenz berøres af hvert Keglesnit.

Deriverte: $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$; ligesaa skulle P og Q betegne $\frac{dZ}{dX}$ og $\frac{dZ}{dY}$.

Vi ville i det Følgende betragte det Tilfælde[1], at Funktionerne F_1, F_2 og F_3 ere valgte paa en saadan Maade, at ogsaa P og Q kun afhænge af (x y z p q):

$$P = F_4(x\,y\,z\,p\,q);\quad Q = F_5(x\,y\,z\,p\,q).$$

Idet vi forudsætte, at af ovenstaaende 5 Ligninger ei lader sig udlede en Relation mellem (X Y Z P Q), kunne ogsaa omvendt hver især af Størrelserne (x y z p q) udtrykkes som Funktion af (X Y Z P Q).

Opfatter man x y z og X Y Z som Punkt-Coordinater for r og R, saa kan man sige, at ved en Transformation af denne Art defineres en *Samsvaren mellem de to Rums Flade-Elementer, og vel at mærke den almindeligste.* Vi ville paavise, at *disse Transformationer dele sig i to distinkte, sideordnede Classer, af hvilke den ene*[1] *svarer til den Plückerske Reciprocitet, medens den anden svarer til den af mig opstillede Reciprocitet.*

Ved Elimination af p, q, P og Q mellem de fem Ligninger:

$$X = F_1,\ Y = F_2,\ Z = F_3,\ P = F_4,\ Q = F_5$$

kunne nemlig to væsentlig forskjellige Tilfælde indtræde. Enten erholdes kun een Ligning mellem (x y z X Y Z), eller ogsaa existerer to Relationer mellem disse Størrelser. (Existencen af *tre* indbyrdes uafhængige Ligninger mellem de to Rums Punkt-Coordinater forudsætter, at angjældende Transformation er en *Punkt*-Transformation.)

Men det er bekjendt, at Ligningen:

$$F(x\,y\,z\,X\,Y\,Z) = 0$$

stedse definerer en reciprok Samsvaren mellem de to Rums Flade-Elementer; og ligesaa har jeg i det Foregaaende paaviist, at Lignings-Systemet:

$$F_1(x\,y\,z\,X\,Y\,Z) = 0,\quad F_2(x\,y\,z\,X\,Y\,Z) = 0$$

altid bestemmer en Transformation, der overfører Flader, som berøre hinanden i lignende Flader.

Hermed er min Paastand beviist.

Ved denne Anledning skal jeg gjøre opmærksom paa, at disse

[1] Sammenlign: Du Bois-Reymond, Partielle Differential-Gleichungen. § 75—§ 81.

Transformationer besidde den mærkelige Egenskab at overføre en hvilkensomhelst Differentialligning af Formen: $[A(rt - s^2) + Br + Cs + Dt + E = 0]$, i hvilken A, B, C, D, E kun afhænge af x, y, z, p, q i en Ligning af samme Form. Saafremt den givne Ligning tilsteder et almindeligt første Integral, saa er dette selvfølgelig ogsaa Tilfældet med den nye Ligning. (Cfr. *Booles* Afhandling i Crelles Journal Bd. 61.

Andet Afsnit.

Den Plückerske Linie-Geometri kan transformeres i en Kugle-Geometri.

§ 7.

De to Curve-Complexer ere Linie-Complexer.

17. Forudsætte vi, at de Ligninger, som afbilde de to Rum i hinanden, ere lineære med Hensyn til hvert System Variable:

$$(10)\begin{cases} 0 = X(a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + Y(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) + \\ \qquad + Z(a_3x + b_3y + c_3z + d_3) + (a_4 + \ldots) \\ 0 = X(\alpha_1x + \beta_1y + \gamma_1z + \delta_1) + Y(\alpha_2x + \beta_2y + \gamma_2z + \delta_2) + \\ \qquad + Z(\alpha_3x + \beta_3y + \gamma_3z + \delta_3) + (\alpha_4x + \beta_4y + \gamma_4z + \delta_4), \end{cases}$$

saa danne tydeligviis de til et givet Punkt conjugerte Punkter i det andet Rum en ret Linie. De to Curve-Complexer ere *Plückerske Linie-Complexer*[1], og følgelig bestemme Ligningerne (10) en Samsvaren mellem r og R, der besidder følgende characteristiske Egenskaber.

a) *Til hvert Rums Punkter svare i det andet entydig Linierne af en Linie-Complex.*

b) *Naar et Punkt beskriver en Complex-Linie, saa dreier den tilsvarende Linie i det andet Rum sig om den gjennemløbnes Billedpunkt.*

c) *Curver, der omhylles af de to Complexers Linier, ordne sig*

[1] Med Hensyn til Linie-Complexers Theori forudsætter jeg som bekjendt: 1) Plücker, Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf etc. . . 1868—69; 2) Klein, Zur Theori der Complexe . . . . math. Annalen. Bd. II.

parviis sammen som reciproke paa saadan Viis, at begges Tangenter svare til den andens Punkter.

d) *Til en Flade f i Rummet r tilordnes for en dobbelt Opfatning en Flade F i R. Paa den ene Side er F Brændflade for den Linie-Congruenz, hvis Billed er f; paa den anden Side svare F's Punkter til de af f's Tangenter, som tilhøre Linie-Complexen i r.*

e) *Paa de just omtalte Flader f og F ordne alle Curver sig parviis sammen som conjugerte paa saadan Viis, at til en paa f [eller F] liggende Curves Punkter svarer i det andet Rum en Linieflade, der indeholder den conjugerte Curve og efter samme berører F [eller f].*

f) *Til en Curve paa f, der omhylles af Linie-Complexens Linier, svarer som conjugert en ligesaa af Complex-Linier omhyllet Curve paa F, og disse Curver ere i den under c angivne Betydning reciproke Curver.*

Enhver af Ligningerne (10) bestemmer en anharmonisk Samsvaren mellem Punkter og Plan i de to Rum, og altsaa lader enhver af vore Linie-Complexer sig definere som Indbegreb af anharmonisk samsvarende Plans Skjærings-Linier — eller som anharmonisk samsvarende Punkters Forbindelses-Linier. Men den herved definerte Complex af 2den Grad er efter Hr. *Reye* identisk med det Linie-System, som *Binet* først har betragtet som Indbegreb af et materielt Legemes stationære Omdreinings-Axer, og som senerehen flere Mathematikere, specielt *Chasles* og *Reye*, have undersøgt.

Naar Ligningerne (10)'s Constanter particulariseres, saa kunne enten de to Complexer faa en speciel Stilling — de kunne til Exempel falde sammen, hvilket Tilfælde Hr. Reye har betragtet i sin „*Geometrie der Lage, 1868*", 2den Del, idet han samtidig angiver de under (a) og (b) angivne Sætninger — eller de kunne selv particulariseres. Uden at indgaa paa en Discussion af alle mulige Special-Tilfælde skal jeg fremhæve de to vigtigste Degenerationer[1]:

[1] **Lie, „Repräsentation der Imaginæren etc. Christiania Vidensk.-Selskab 1869.** Februar og August". Den i nævnte Afhandlings §§ 17 og 27—29 behandlede rumlige Afbildning er identisk med den, jeg betragter i nærværende Paragraph. I § 25 fremhæver jeg udtrykkelig den første af de her omtalte Degenerationer.

Begge Complexer kunne være *specielle*, *lineære*. Dette Tilfælde fører til den bekjendte *Ampèreske* Transformation, som saaledes kan opfattes som beroende paa, at man indfører som Rum-Element istedetfor Punktet Indbegrebet af rette Linier, der skjære en given Linie.

Den ene Complex kan degenerere i Indbegrebet af rette Linier, der skjære et givet Keglesnit. Isaafald er den anden Complex en almindelig lineær Complex. Jeg skal her anføre, at Hr. *Nöether* (Götting. Nachr. 1869) leilighedsviis har angivet en Afbildning af den lineære Complex i et Punkt-Rum, som er identisk med den, vi her betragte. Den for os fundamentale Opfatning: at *hvert* Rum indeholder en Complex, hvis Linier afbilde sig som det andet Rums Punkter, er ei berørt i Hr. Nöethers korte Fremstilling. — Det er denne Degeneration, som vi i det Følgende ville studere, under Forudsætning af, at det fundamentale Keglesnit er den uendelig bortfjernede imaginære Cirkel.

18. Vi have fundet, at de to Curve-Complexer ere Linie-Complexer, naar Afbildnings Ligningerne ere lineære med Hensyn til hvert System Variable, og vi ledes herved til at undersøge, om denne tilstrækkelige Betingelse er nødvendig.

Naar den ene Complex er en almindelig Linie-Complex, saa maa den tilsvarende Curve-Complexes elementære Complex-Kegler decomponeres i 2den Grads Kegler. Beviset (§ 4. 12) herfor ligger i, at en *Linie*-Congruenzes Linier berøre Brændfladen i *to* Punkter. Er den ene Complex en speciel Linie-Complex, saa decomponeres den i det andet Rum tilsvarende Curve-Complexes elementære Complex-Kegler i plane Knipper.

Saaledes maa, naar begge Complexer skulle være Linie-Complexer, de elementære Complex-Kegler i begge Rum decomponeres i Kegler af 2den eller 1ste Grad. Men naar en Linie-Complexes Kegler stedse decomponeres, saa er Complexen selv reductibel,[1] og altsaa er paaviist: at naar to Linie-Complexer ere afbildede i hinanden paa den i foregaaende Nummer angivne Maade, saa

[1] Jeg kjender intet Beviis for denne Paastand, som dog er mig meddeelt som sikker. Forresten ere de Slutninger, jeg herpaa baserer, uvæsentlige for det Følgende.

maa enten begge være af 2den Grad, eller den ene en speciel Complex af 2den Grad og den anden en linear, eller endelig begge specielle lineære Complexer. Alle disse tre Tilfælde ere repræsenterede ved Lignings-Systemet (10), og vi ville antyde, hvorledes man kan indse, *at (10) definerer den almindeligste gjensidige Afbildning af to Linie-Complexer.*

Ere nemlig begge Complexer af 2den Grad, saa lader sig paavise, at Singularitets-Fladen ei kan være en *krum* Flade.

Fra hvert Punkt af angjældende Flade udgaar nemlig to plane Knipper, hvis Linier afbilde sig i det andet Rum som een ret Linies Punkter. Heraf følger, at det ene Knippes samtlige Linier svare til eet og samme Punkt i det andet Rum.

Men Indbegrebet af Linier, der ei have en selvstændig Afbildning, kan ei danne en Complex, i det Høieste en Congruenz eller et Antal af Congruenzer. Da imidlertid Indbegrebet af plane Straale-Knipper, der udgaa fra samtlige en *krum* Flades Punkter, nødvendigviis danne en Complex, saa er vor Paastand, at Singularitets-Fladen ei kan være en *krum* Flade, beviist.

Naar to 2den Grads Complexer ere afbildede i hinanden — i hvilket Tilfælde ingen af dem kan være en speciel Complex — saa maa for begges Vedkommende Singularitets-Fladen kun bestaa af Plan, og følgelig ere begge Linie-System saadanne som de, Binet først har betragtet.

Naar en 2den Grads Complex og en lineær Complex ere afbildede i hinanden, saa var paa Forhaand to Tilfælde tænkelige: 2den Grads Complexen kunde være dannet af alle Linier, der skjære et Keglesnit — dette Tilfælde existerer efter Ovenstaaende faktisk — ; 2den Grads Complexen kunde bestaa af alle en 2den Grads Flades Tangenter. Jeg har gjennem Betragtninger, der have noget tilfælles med dem, jeg anvender i § 12, beviist, at dette Tilfælde ei existerer; jeg kunde nemlig isaafald af, at en lineær Complex kan overføres i sig selv ved en tredobbelt Uendelighed af lineære, indbyrdes permutable Transformationer, udlede, at det samme maatte være Tilfældet med 2den Grads Fladen, hvad imidlertid ei forholder sig saa.

§ 8.

Reciprocitet mellem en linear Complex og Indbegrebet af rette Linier, som skjære den uendelig bortfjernede imaginære Cirkel.

19. Vi underkaste i det Følgende et nærmere Studium Lignings-Systemet:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\lambda}{2B}Zz &= x - \frac{1}{2A}(X+iY) \\ \frac{1}{2B}(X-iY)z &= y - \frac{1}{2\lambda A}Z, \end{aligned}\right| \quad i=\sqrt{-1} \quad \Bigg| \quad (11)$$

der er lineært med Hensyn til begge Variabel-System, og som saaledes efter § 7 bestemmer en Samsvaren mellem to Linie-Complexer, og først ville vi søge disse Complexers Ligninger i Plückerske Linie-Coordinater.

Plücker skriver den rette Linies Ligninger i Formen:

$$rz = x - \rho, \; sz = y - \sigma,$$

hvorved han betragter de fem Størrelser: $r, \rho, s, \sigma, (r\sigma - s\rho)$ som Linie-Coordinater. Ligningerne (11) fremstille saaledes, forudsat at man i samme opfatter X, Y, Z som Parametere, det System rette Linier, hvis Coordinater fyldestgjøre Relationerne:

$$r = -\frac{\lambda}{2B}Z, \quad \rho = \frac{1}{2A}(X+iY),$$

$$s = \frac{1}{2B}(X-iY), \; \sigma = \frac{1}{2\lambda A}Z,$$

hvilke ved Elimination af X, Y, Z give som vor Complexes Ligning:

$$\lambda^2 A\sigma + Br = 0. \qquad (12).$$

Linie-Complexen i Rummet r er saaledes en lineær Complex og det en almindelig lineær Complex, der — som man kan lægge Mærke til — indeholder xy-Planets uendelig bortfjernede rette Linie.

For at bestemme Linie-Complexen i R erstatte man Systemet (11) ved det æqvivalente:

$$\left(\frac{\lambda A}{2B}z - \frac{B}{2\lambda Az}\right)Z = X - \left(Ax + B\frac{y}{z}\right)$$

$$\frac{1}{i}\left(\frac{\lambda A}{2B}z + \frac{B}{2\lambda Az}\right)Z = Y - \frac{1}{i}\left(Ax - B\frac{y}{z}\right),$$

som ved Sammenligning med Ligningerne for den rette Linie i R:

$$RZ = X - P; \; SZ = Y - \Sigma \quad (13)$$

give:

$$R = \frac{\lambda A}{2B} z - \frac{B}{2\lambda A z}, \qquad P = Ax + B\frac{y}{z},$$

$$S = \frac{1}{i}\left(\frac{\lambda A}{2B} z + \frac{B}{2\lambda A z}\right), \quad \Sigma = \frac{1}{i}\left(Ax - B\frac{y}{z}\right)$$

og saaledes findes som Ligning for Linie-Complexen i R:

$$R^2 + S^2 + 1 = 0. \qquad (14).$$

Efter (13) er imidlertid:

$$R = \frac{dX}{dZ}, \; S = \frac{dY}{dZ},$$

og følgelig kan (14) ogsaa skrives i Formen:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0. \qquad (15)$$

Linie-Complexen i R dannes saaledes af de imaginære rette Linier, hvis Længde er lig Nul, eller som man ogsaa kan sige, af de Linier, der skjære den uendelig bortfjernede imaginære Cirkel.

Ligningerne (11) afbilde de to Rum paa en saadan Viis i hinanden, at til r's Punkter svare i R de imaginære rette Linier, hvis Længde er lig Nul, medens R's Punkter afbilde sig som Linierne af den lineære Complex (12).

Man bemærke, at naar et Punkt gjennemløber en Linie af denne lineære Complex, saa beskriver den tilsvarende rette Linie i R en infinitesimal Kugle — en Punkt-Kugle.

20. Efter den i § 4 udviklede almindelige Theori for reciproke Curver kan man, naar en Curve kjendes, hvis Tangenter tilhøre den ene af vore Linie-Complexer, ved simple Operationer finde Billed-Curven, der omhylles af den anden Complexes Linier. Nu har *Lagrange* beskjæftiget sig med den almindelige Bestemmelse af Rum-Curver, hvis Længde er lig Nul, hvis Tangenter altsaa besidde samme Egenskab. Han har fundet disse Curvers almindelige Ligning, og altsaa er det efter Ovenstaaende *ogsaa muligt at opstille almindelige Formler for de Curver, hvis Tangenter tilhøre en lineær Complex.*

For ei at fjerne os fra vort Maal ville vi her ei gaa nærmere ind paa de simple geometriske Relationer, der finde Sted mellem reciproke Curver i de to Rum.[1]

Vore tidligere Betragtninger over Samsvaren mellem Flader i de to Rum modificeres nu noget derved, at alle Congruenzer af rette Linier, som skjære den uendelig bortfjernede Cirkel besidde en fælles Brænd-Curve — denne Cirkel nemlig — at endvidere en Linie-Congruenzes rette Linier kun berøre Brændfladen i to Punkter.

Tænker man sig nemlig givet en Flade F i R, og er f det geometriske Sted for de Punkter i r, der svare til F's Tangenter af Længde lig Nul, saa er ogsaa omvendt F det *fuldstændige* geometriske Sted for Billedpunkterne af de rette Linier i den lineære Complex (12), som berøre f.

Derimod stiller Sagen sig som i det almindelige Tilfælde, naar en Flade φ af almindelig Beliggenhed i r er givet, idet da de rette Linier af den lineære Complex (12), som berøre φ, tillige omhylle en anden Flade ψ, φ's saakaldte reciproke Polare relativt til (12).

Det just omtalte Linie-System afbilder sig i R som en Flade Φ, der aabenbart er Brændflade for to Congruenzer — for det Første for Indbegrebet af rette Linier, af Længde lig Nul, som svare til φ's Punkter — for det Andet for de Linier, som staa i samme Forhold til ψ's Punkter.

Φ's Tangenter af Længde lig Nul decomponeres saaledes i to Systemer, eller som man ogsaa kan sige: Φ's geodætiske Curver af Længde lig Nul danne to distinkte Skarer.

I Forbigaaende bemærke vi, at Bestemmelsen af de *Curver, som omhylles af en til en lineær Complex hørende Congruenzes rette Linier, efter vore almindelige Theorier lader sig tilbageføre til Opsøgelsen paa Billedfladen F af de geodætiske Curver, hvis Længde er lig Nul.* Disse Curver ere nemlig hinanden reciprok (17, f) relativ til Lignings-Systemet (11).

[1] Naar den givne Curve af Længde lig Nul har en Spids, saa har den tilsvarende Curve i den lineære Complex en stationær Tangent. Overhovedet optræde *stationære Tangenter* som *ordinære Singulariteter*, naar Curver opfattes som Linie-Dannelser, det vil sige som omhyllet af en *given* Linie-Complexes Linier.

21. I det Følgende ville vi et Par Gange have Anvendelse for følgende Sætninger:

a. En Flade F af n^{te} Orden, der indeholder den uendelig bortfjernede imaginære Cirkel som p-dobbelt Linie er Billedet af en Congruenz, hvis Orden og følgelig ogsaa Classe er lig $(n-p)$[1].

En imaginær Linie af Længde lig Nul skjærer jo nemlig F i $(n-p)$ i det endelige Rum liggende Punkter, og altsaa gives der stedse $(n-p)$ Linier af Billed-Congruenzen, der gaa igjennem et givet Punkt — eller som ligge i et givet Plan i Rummet r.

b. En Curve C af n^{te} Orden, som skjærer den uendelig bortfjernede Cirkel i p Punkter, afbilder sig i r som en Linieflade af $(2n-p)^{te}$ Orden.

En ret Linie af den lineære Complex (12) skjærer nemlig den omtalte Linieflade i saamange Punkter som Antallet af — ei uendelig bortfjernede — Fælles-Punkter mellem Curven C og en infinitesimal Kugle.

§ 9.

Den Plückerske Linie-Geometri kan transformeres i en Kugle-Geometri.

22. I denne Paragraph begrunde vi en *fundamental Relation, som finder Sted mellem den Plückerske Linie-Geometri og en Geometri, hvis Element er Rummets Kugler.*

Ligningerne (11) transformere nemlig Rummet r's rette Linier i Rummet R's Kugler, og det for en dobbelt Opfatning (12).

Paa den ene Side afbilde de rette Linier af Complexen (12), som skjære en given Linie l_1 og altsaa tillige sammes reciproke Polare l_2 relativt til (12), sig efter en tidligere Sætning (21, b) som en Kugles Punkter; paa den anden Side overføres Linierne l_1 og l_2's Punkter i denne Kugles retliniede Generatricer.

Ved følgende analytiske Betragtninger kan man finde de Re-

[1] Jeg skal ved denne Anledning udtale en, som det synes, intetsteds explicit udtalte, men dog for enhver Mathematiker, der beskjæftiger sig med Linie-Geometri, velkjendt Sætning: *For en Congruenz, der tilhører en lineær Complex, er stedse Orden lig Classe.*

lationer, som finde Sted mellem l_1 og l_2's Linie-Coordinater og Billed-Kuglens Center-Coordinater X', Y', Z' og Radius H'.

Ere:

$$rz = x - \rho, \ sz = y - \sigma$$

Linien l_1 [eller l_2's] Ligninger, og erindres, at den lineære Complex (12)'s rette Linier lade sig fremstille ved:

$$-\frac{\lambda}{2B} Zz = x - \frac{1}{2A}(X + iY)$$

$$\frac{1}{2B}(X - iY) z = y - \frac{1}{2\lambda A} Z,$$

saa sees, at man maa eliminere x y z mellem disse fire Linier for at underkaste de just nævnte Linier den Betingelse at skjære l_1. Man finder herved følgende Relation:

$$\left[Z - \left(A\sigma\lambda - \frac{B}{\lambda} r\right)\right]^2 + \left[X - (A\rho + Bs)\right]^2 + \left[Y - i(Bs - A\rho)\right]^2 =$$

$$= \left[A\lambda\sigma + \frac{B}{\lambda} r\right]^2 \qquad (16)$$

mellem disse Liniers Parametere (X, Y, Z) eller, som man ogsaa kan sige, mellem Billedpunkternes Coordinater.

Den umiddelbare Interpretation af denne Ligning bekræfter, hvad vi ovenfor have sagt, og giver tillige følgende Formler:

$$\begin{aligned} X' &= A\rho + Bs & iY' &= A\rho - Bs \\ Z' &= \lambda A\sigma - \frac{B}{\lambda} r & \pm H' &= \lambda A\sigma + \frac{B}{\lambda} r \end{aligned} \qquad (17)$$

eller de æqvivalente:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2A}(X' + iY') & s &= \frac{1}{2B}(X' - iY') \\ \sigma &= \frac{1}{2\lambda A}(Z' \pm H') & r &= -\frac{\lambda}{2B}(Z' \mp H'), \end{aligned} \qquad (18)$$

i hvilke man uden Skade kan udelade *Kugle-Coordinaterne* X' Y' Z' H''s Accenter, idet for vor Opfatning Rummet R's Punkter ere Kugler, hvis Radius er lig Nul.

Formlerne (17) og (18) vise, at en ret Linie i r afbilder sig som en utvetydig bestemt Kugle i R, medens til en given Kugle svarer i r to Linier:

$$(X, Y, Z, +H) \ (X, Y, Z, -H),$$

der ere hinandens reciproke Polarer relativ til den lineære Complex:

$$H = 0 = \lambda A\sigma + \frac{B}{\lambda} r, \qquad (12)$$

(17) og (18) udtrykke tydeligviis, naar H sættes lig Nul, den utvetydige Sammenhøren mellem Complexen (12)'s rette Linier og Rummet R's Punkt-Kugler.

Et Plan — det vil sige en Kugle, hvis Radius er uendelig stor — afbilder sig som to rette Linier (l_1 og l_2), der skjære xy-Planets uendelig bortfjernede rette Linie, og efter Ovenstaaende ere herved l_1 og l_2's Punkter Billedet af de imaginære Linier i det givne Plan, der gaa til sammes uendelig bortfjernede Cirkel-Punkter.

Specielt er at bemærke, at til et Plan, der berører den uendlig bortfjernede imaginære Cirkel, svarer en med xy-Planet parallel Linie af Complexen ($H = 0$).

23. *To hinanden skjærende rette Linier l_1 og λ_1 afbilde sig som Kugler, mellem hvilke Berøring finder Sted.*

l_1 og λ_1's Polarer relativ til ($H = 0$) skjære nemlig ogsaa hinanden, og følgelig have de omtalte Kugler to fælles Generatricer. Men 2den Grads Flader, hvis Skjærings-Curve bestaar af et Keglesnit og to rette Linier, berøre hinanden i tre Punkter — Snit-Curvens Dobbelt-Punkter. l_1's og λ_1's Billed-Kugler have altsaa tre Berøringspunkter, af hvilke imidlertid to, som imaginære og uendelig bortfjernede, efter almindelig Sprogbrug ei komme i Betragtning.

Analytisk bevises vort Theorem paa følgende Viis.

Betingelsen for Skjæring mellem de to rette Linier:

$$r_1 z = x - \rho_1 \qquad r_2 z = x - \rho_2$$
$$s_1 z = y - \sigma_1 \qquad s_2 z = y - \sigma_2$$

udtrykkes som bekjendt ved Ligningen:

$$(r_1 - r_2)(\sigma_1 - \sigma_2) - (\rho_1 - \rho_2)(s_1 - s_2) = 0,$$

som ved Benyttelse af (18) giver:

$$(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2 + (iH_1 - iH_2)^2 = 0,$$

hvilket beviser vor Paastand.

Vort Theorem viser, at Indbegrebet af rette Linier, som skjære en given, afbilde sig som alle Kugler, der berøre en given, og følgelig *kjende vi den specielle lineære Complexes Afbildning.*

Omvendt svare til to Kugler, som berøre hinanden, to Linie-Par, hvis gjensidige Stilling er saadan, at hver Linie af det ene Par skjærer en Linie af det andet.

24. *Den almindelige lineære Complexes Afbildning.* Den almindelige lineære Complex fremstilles ved Ligningen:

$$(r\sigma - \rho s) + mr + n\sigma + p\rho + qs + t = 0, \qquad (19)$$

hvoraf ved Benyttelse af (18) findes som Ligning for den tilsvarende *„lineære Kugle-Complex:“*

$$[X^2 + Y^2 + Z^2 - H^2] + MX + NY + PZ + QH + T = 0.$$ [1]

Her betegne M, N, P, Q, T Constanter, der afhænge af m, n, p, q, t, *medens X, Y, Z, H ere at opfatte som — ikke homogene — Kugle-Coordinater.*

Den sidste Ligning bestemmer, som man let ser, alle Kugler, der skjære Billed-Sphæren af Complexerne (19) og $(H = 0)$'s lineære Fælles-Congruenz under constant Vinkel.

Er disse Complexers simultane Invariante lig Nul, eller ligge de to Complexer, som Klein udtrykker det, i Involution, saa er den constante Vinkel lig en ret.

Til Kugler, der skjære en given Sphære under constant Vinkel, svare i Rummet r de rette Linier af to lineære Complexer, der ere hinandens reciproke Polarer relativ til $(H = 0)$.

Specielt er at bemærke, at de Kugler, der skjære en given orthogonalt, afbilde sig som de rette Linier af en lineær Complex, der ligger i Involution med $(H = 0)$.

Være nu givet en lineær Complex, hvis Ligning har Formen:

$$ar + bs + c\rho + d\sigma + e = o. \qquad (20)$$

Den tilsvarende Relation mellem X, Y, Z, H er ogsaa lineær, og altsaa dannes angjældende lineære Kugle-Complex af alle *Kugler, der skjære et givet Plan under constant Vinkel.*

Dette kunde man ogsaa udlede deraf, at Complexen (20) in-

[1] Denne Ligning lader sig sætte under Formen:

$$(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2 + (iH - iH_0)^2 = C_0^2,$$

i hvilken vi opfatte X_0, Y_0, Z_0, H_0, C_0 som ikke homogene Coordinater for den lineære Complex. Hr. Klein har gjort mig opmærksom paa, at Kuglen (X_0, Y_0, Z_0, H_0) er Billedet af angjældende lineære Complexes Axe.

deholder xy-Planets uendelig bortfjernede rette Linie, at altsaa sammes Fælles-Congruenz med ($H=0$) besidder Direktricer, der skjære denne Linie.

Ligge Complexerne (20) og ($H=0$) i Involution, saa afbilde (20)'s Linier sig som alle Kugler, der skjære et givet Plan orthogonalt, eller hvad der kommer ud paa det samme, som de Kugler, hvis Centra ligge i et givet Plan.

De følgende fire Complexer:

$$X=0=A\rho+Bs \qquad\qquad Z=0=\lambda A\sigma-\frac{B}{\lambda}r$$

$$iY=0=A\rho-Bs \qquad\qquad H=0=\lambda A\sigma+\frac{B}{\lambda}r$$

ligge, som man let ser, parviis i Involution og indeholde endvidere som fælles Linie xy-Planets uendelig bortfjernede Linie.

Den specielle lineære Complex: (Const $=0$), der dannes af alle med xy-Planet parallele Linier i Forbindelse med de fire almindelige lineære Complexer ($X=0$) ($Y=0$) ($Z=0$) ($H=0$), danne saaledes et System, der er at opfatte som en Degeneration af Hr. Kleins 6 Fundamental-Complexer. I Analogi med, at vi ovenfor have indført X, Y, Z, H som ikke homogene Coordinater for en Geometri med fire Dimensioner, hvis Element er Kuglen, lader disse Størrelser sig ogsaa anvende som ikke homogene Linie-Coordinater.

Af Interesse er at bemærke, at de lineære Complexer, hvis Ligning er:

$$H=\lambda A\sigma+\frac{B}{\lambda}r=\text{Const.},$$

og som efter Ligningsformen berøre hinanden efter en speciel lineær Congruenz, hvis Direktricer have forenet sig i xy-Planets uendelig bortfjernede Linie, afbilde sig som en Skare Kugle-Complexer, der characteriseres derved, at alle Kugler af samme Complex have ligestore Radier.

25. *Forskjellige Afbildninger.* En Flade f og alle dens Tangenter i et givet Punkt afbilde sig som en Flade F og alle Kugler, der berøre samme i et givet Punkt.

En paa f liggende Linie afbilder sig som en Kugle, der berører F efter en Curve.

Er f en Linieflade, saa er F en Kugle-Envellop — en Rørflade. Hvis specielt f er en 2den Grads Flade og som Følge deraf indeholder to System retliniede Generatricer, saa lader F sig paa to Maader opfatte som Kugle-Envellop, og det er indlysende, at vi paa denne Viis *erholde den almindeligste Flade, der besidder denne Egenskab (Cycliden).*

En develloppabel Flade transformerer sig i Omhyllings-Fladen af en Skare Kugler, af hvilke to consecutive stedse berøre hinanden — det vil sige, i en imaginær Linieflade, hvis Generatricer skjære den uendelig bortfjernede imaginære Cirkel. Disse Liniefladeг ere, ved man, just de, som *Monge* characteriserer derved, at de kun besidde eet System Krumnings-Curver.

26. Det er som bekjendt en umiddelbar Consequence af den Plückerske Opfatning, at naar ($l_1 = 0$) og ($l_2 = 0$) ere Ligningerne for to lineære Complexer, saa fremstiller:

$$l_1 + \mu\ l_2 = 0,$$

forudsat at μ betegner en Parameter, en Skare lineære Complexer, der indeholde en fælles lineær Congruenz. Vort Afbildnings-Princip transformerer denne Sætning i følgende:

De Kugler K, der skjære to givne Sphærer S_1 og S_2 under givne Vinkler V_1 og V_2, staa i samme Forhold til uendelig mange Sphærer S. Der gives, svarende til den omtalte Linie-Congruenzes to Direktricer, to S, der berøres af alle K.

Den variable Linie-Complex: ($l_1 + \mu\, l_2 = 0$) skjærer Complexen ($H = 0$) efter en lineær Congruenz, hvis Direktricer beskrive en 2den Grads Flade — Gjennemsnittet af de tre Complexer: $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, $H = 0$ — og følgelig omhylle de just omtalte Kugler S en Cyclide, der forresten i dette Tilfælde er degenereret i en Cirkel, hvorefter samtlige S skjære hinanden.

Her ville vi ogsaa fæste Opmærksomheden paa, at vor Kugle-Afbildning tillader af interessante discontinuerlige Linie-Grupper at udlede tilsvarende Kugle-Grupper, ligesom omvendt. Exempelviis udlede vi af den bekjendte Theori for 3die Grads Fladens 27 rette Linier Existencen af Grupper paa 27 Kugler, af hvilke hver berører ti af de øvrige.

Paa den anden Side give til Exempel Kugle-Stabler eiendommelige discontinuerlige Arrangements af en lineær Complexes Linier.

§ 10.

Transformation af Opgaver vedrørende Kugler i Linie-Problemer.

27. Vi ville i denne Paragraph løse nogle bekjendte simple Problemer vedrørende Kugler, idet vi betragte de gjennem vort Transformations-Princip tilsvarende Linie-Problemer.

Problem I. Hvormange Kugler berøre fire givne Sphærer?

De fire Sphærer transformere sig i fire Linie-Par $(l_1 \lambda_1)$ $(l_2 \lambda_2)$ $(l_3 \lambda_3)$ $(l_4 \lambda_4)$, og den tilsvarende Linie-Opgave er saaledes at finde de Linier, der skjære fire Linier, valgte paa en saadan Maade blandt de 8 nævnte, at en Linie er taget af hvert Par.

Linierne l og λ kunne ordnes i 16 distinkte Grupper paa fire:

$$l_1\, l_2\, l_3\, l_4 \quad \lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3\, \lambda_4$$
$$l_1\, l_2\, l_3\, \lambda_4 \quad \lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3\, l_4$$
. . . .

paa saadan Viis, at hver Gruppe kun indeholder een Linie af hvert Par. Disse 16 Grupper dannes imidlertid parviis af Linier, der ere hinandens reciproke Polarer relativt til $(H = 0)$, og følgelig ere ogsaa to sammenhørende Gruppers Transversal-Par $(t_1\, t_2)$ $(\tau_1\, \tau_2)$ hinandens Polarer relativt til $(H = 0)$. De fire sidstnævnte Linier afbilde sig saaledes som *to* Kugler, og følgelig existerer der 16 i 8 Par arrangerte Kugler, der berøre fire givne.

Problem II. Hvormange Kugler skjære fire givne Sphærer under fire givne Vinkler?

De Kugler, der skjære en given Sphære under samme Vinkel, afbilde sig som de rette Linier af to lineære Complexer, der ere hinandens reciproke Polarer relativt til $(H = 0)$. Man har altsaa at betragte fire Par Complexer $(l_1 \lambda_1)$ $(l_2 \lambda_2)$ $(l_3 \lambda_3)$ $(l_4 \lambda_4)$, og Spørgsmaalet bliver at finde de Linier, som tilhøre fire af disse Complexer, der ere valgte paa en saadan Maade, at af hvert Par er taget en.

Fire lineære Complexer have to Fælleslinier, og saaledes erholder man, ved at følge den samme Methode, som vi anvendte ved foregaaende Problems Behandling, som Løsning 16 Kugler, der ere arrangerte i 8 Par.

Vort Problem simplificeres, naar en eller flere af de givne Vinkler ere rette, idet en given Sphæres Orthogonal-Kugler afbilde sig som *een* med $(H = 0)$ i Involution liggende Complexes Linier (*n.* 24). Ere alle Vinkler rette, saa spørges der, hvormange Fælleslinier fire med $(H = 0)$ i Involution liggende lineære Complexer have. Der gives to saadanne Linier, der ere hinandens reciproke Polarer relativt til $(H = 0)$, og *følgelig gives der kun een Kugle, der skjærer fire givne orthogonalt.*

Problem III. At construere de Kugler, der skjære fem givne Sphærer under samme Vinkel.

Vort Transformations-Princip overfører dette Problem i følgende: at finde de lineære Complexer, der indeholde een Linie af hvert af fem givne Linie-Par $(l_1 \lambda_1) \ldots (l_5 \lambda_5)$.

Disse 10 Linier lade sig arrangere i 32 forskjellige Grupper paa 5, paa saadan Viis, at hver Gruppe indeholder *een* Linie af hvert Par:

$$(l_1\, l_2\, l_3\, l_4\, l_5)\ (\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3\, \lambda_4\, \lambda_5)$$

$$\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

herved er dog at bemærke, at disse Grupper parviis ere hinandens reciproke Polarer relativt til $(H = 0)$. Enhver Gruppe giver en Linie-Complex, og ialt erholdes saaledes 32, parviis conjugerte lineære Complexer, der afbilde sig som 16 lineære Kugle-Complexer. De 16 Kugler, der hver skjæres under constant Vinkel af de omtalte Systemers Kugler, ere vort Problems Løsninger.

To Linie-Grupper som:

$$l_1\, l_2\, \lambda_3\, \lambda_4\, l_5 \qquad \lambda_1\, l_2\, \lambda_3\, \lambda_4\, l_5$$

indeholde fire fælles Linier, og altsaa skjære de to tilsvarende lineære Complexer hinanden efter en lineær Congruenz, hvis Direktricer d_1 og d_2 ere de omtalte fire Liniers Transversaler.

Men Complexen $(H = 0)$ skjærer denne Congruenz efter en 2den Grads Flade, der er Billedet af en Cirkel — Gjennemsnits-Cirkelen mellem to af de søgte Kugler, men tillige mellem d_1 og

d_2's Billed-Kugler. Disse sidste Kugler kunne ogsaa defineres derved, at de berøre fire af de fem givne, og altsaa kan man ved den just angivne Construction bestemme et Antal Cirkler paa en hvilkensomhelst af de søgte Kugler.

Paa hver af de 16 Kugler, der skjære fem givne under samme Vinkel, lader sig construere fem Cirkler, forudsat at man kan construere de Kugler, der berøre fire givne.

§ 11.

Relation mellem Krumnings-Curvers og Hovedtangent-Curvers Theori.

28. Den i de foregaaende Paragrapher betragtede Transformation faar en eiendommelig Interesse gjennem følgende, efter min Opfatning særdeles vigtige Theorem.

Til en i R given Flade F's Krumnings-Curver svare i r Liniefladen, der berøre Billedfladen f efter Hovedtangent-Curver.

Fladen f's Tangenter transformere sig i Kugler, der berøre F, og den Tanke ligger saaledes nær, at til *f's Hovedtangenter svare F's Hoved-Kugler.* Dette er ogsaa Tilfældet.

f skjæres nemlig af en Hovedtangent i tre sammenfaldende Punkter, hvilket viser, at tre consecutive Generatricer af Hovedtangentens Billed-Kugle berører F. Men en saadan Kugle skjærer F efter en Curve, der i begges Berøringspunkt har en Spids, og dette er just characteristisk for Hoved-Kugler.

Bemærkes nu endvidere, at denne Spidses Retning er Tangent til en Krumnings-Curve, saa sees, at to consecutive Punkter af en Hovedtangent-Curve paa f afbilde sig som to Linier, der berøre F i consecutive Punkter af samme Krumnings-Curve. Til *f's Hovedtangent-Curver, opfattet som Punkt-Dannelser, svare saaledes imaginære Liniefladen, der berøre F efter Krumnings-Curver.*

Men Curver paa f og F ordne sig parviis sammen som conjugerte paa saadan Viis (*n. 17, e*), at den enes Punkter er Billedet af Linier, der berøre den anden Flade i Punkter af den conjugerte Curve, og *altsaa er vort Theorem beviist.*

De to følgende Exempler kunne ansees som Verifikation af denne Sætning.

En Kugle i R er Billedet af en lineær Congruenz, som hvis

Brændflade de to Direktricer er at opfatte. Nu er som bekjendt enhver Curve paa en Kugle en Krumnings-Curve, og i Virkeligheden optræde ogsaa Direktricerne som Hovedtangent-Curver paa enhver Linieflade, der tilhører en lineær Congruenz. — Et Hyperboloid f i Rummet r giver i R en Flade, som paa to Maader kan opfattes som Kugle-Envellop. Nu ere de Liniefiader i Complexen ($H = 0$), der berøre f efter dens Hovedtangent Curver, det vil sige efter dens retliniede Generatricer, selv 2den Grads Flader, og følgelig *ere Cycliden F's Krumnings-Curver Cirkler.*

Som en interessant Consequence af vort Theorem er følgende at betragte.

Kummers Flade af fjerde Orden og Classe har algebraiske Hovedtangent-Curver af 16de Orden, der danne det fuldstændige Berørings-Gjennemsnit mellem angjældende Flade og Liniefiader af 8de Orden.

Kummers Flade er nemlig Brændflade for den almindelige Linie-Congruenz af 2den Orden og Classe, der afbilder sig — forudsat at den tilhører ($H = 0$) — som en fjerde Grads Flade, der indeholder den uendelig bortfjernede Cirkel to Gange (n. 21, a).

Men Hr. *Darboux* og *Moutard*[1] have paaviist, at sidstnævnte Flades Krumningslinier ere Curver af 8de Orden, der skjære den uendelig bortfjernede imaginære Cirkel i 8 Punkter, og altsaa afbilde disse Linier sig som Liniefiader af 8de Orden. (*n. 21, b.*)

Erindres endelig, at disse Liniefladers Generatricer ere Dobbelttangenter til den Kummerske Flade, saa indsees vort Theorems Rigtighed.[2]

Det er indlysende, at ogsaa den Kummerske Flades Degenerationer, t. Ex: *Bølgefladen, den Plückerske Complex-Flade, den Steinerske Flade af* 4de Orden og 3die Classe[3], en Linieflade af 4de Grad, 3die Grads Liniefladen . . . . . have algebraiske Hovedtangent-Curver.

29. Hr. *Darboux* har paaviist, at paa en hvilkensomhelst Flade

[1] Comptes rendus. Aar 1864.

[2] Klein og Lie. Berliner Monatsbericht. 15 Decbr. 1870.

[3] Clebsch har bestemt den Steinerske Flades Hovedtangent-Curver.

kan i Almindelighed bestemmes en i det endelige Rum værende Krumningslinie — Berørings-Curven med den imaginære Develloppabel, der paa engang er omskrevet om den givne Flade og den uendelig bortfjernede imaginære Cirkel.

Som Følge heraf lader sig paa Brændfladen for en Congruenz, der tilhører en lineær Complex, i Almindelighed angive een Hovedtangent-Curve — det geometriske Sted af de Punkter, for hvilke Tangentplanet tillige er det ved den lineære Complex tilordnede Plan.

De uendelig smaa Kugler, der berøre F, bestaa nemlig af F's Punkter i Forbindelse med den ovenfor omtalte imaginære Develloppabels, og følgelig dele de rette Linier af Complexen ($H = 0$), der berøre Billedfladen f, sig i to Systemer — et System Dobbelttangenter, og paa den anden Side Indbegrebet af Linier, der berøre f i Punkterne af en vis Curve. Men denne Curve er, som Billedet af en imaginær Linieflade, der berører F efter en Krumnings-Curve, en af f's Hovedtangent-Curver.

Denne Bestemmelse af en Hovedtangent-Curve bliver dog illusorisk, naar ikke Congruenzen, men Brændfladen — eller, rettere sagt, en reductibel Deel af samme — gives vilkaarlig. Paa en Flade existerer nemlig i Almindelighed kun et endeligt Antal Punkter, hvis Tangentplan tillige er det angjældende Punkt ved en given lineær Complex tilordnede Plan.

Af Interesse er at bemærke, at en Linieflade, hvis Generatricer tilhøre en lineær Complex, indeholder uendelig mange Punkter, for hvilke Tangentplanet tillige er det ved den lineære Complex tilordnede Plan. Indbegrebet af disse Punkter danne en ved simple Operationer — Differentiation og Elimination — bestembar Hovedtangent-Curve.

Men Hr. *Clebsch* har paaviist, at naar paa en Linieflade een Hovedtangent-Curve kjendes, saa lade de øvrige sig finde ved Qvadratur.

***Bestemmelsen** af Hovedtangent-Curverne paa en Linieflade, der tilhører en lineær Complex, afhænger kun af Qvadratur.*

Idet vi anvende vort Transformations-Princip paa den anførte Sætning af Hr. Clebsch saavelsom paa den deraf udledede Consequence, erholde vi følgende Sætninger:

Naar paa en Rørflade (Kugle-Envellop) en ikke cirkulær Krumnings-Curve kjendes, saa lade de øvrige sig finde ved Quadratur.

Enkelt uendelig mange Kugler, der skjære en given Sphære S under constant Vinkel, omhylle en Rørflade, paa hvilken een Krumningslinie kan angives, og de øvrige altsaa bestemmes ved Quadratur.

At man paa den i sidste Sætning omtalte Rørflade kan finde en Krumnings-Curve, fremgaar ogsaa deraf, at Rørfladen skjærer S under constant Vinkel. Men denne Skjærings-Curve maa være en af Rørfladens Krumnings-Curver efter den bekjendte Sætning: Naar to Flader skjære hinanden under constant Vinkel, og Snit-Curven er en Krumningslinie paa den ene Flade, saa maa den ogsaa være det paa den anden; men paa en Kugle er enhver Curve Krumningslinie.

§ 12.

Samsvaren mellem Transformationer af de to Rum.

30. Vor Afbildning kan efter *n. 16* udtrykkes ved fem Ligninger, der bestemme en hvilkensomhelst Størrelse af de to Grupper:

$$(x\,y\,z\,p\,q)\ (X\,Y\,Z\,P\,Q),$$

som Funktion af Størrelser af den anden Gruppe. Underkastes nu det ene af de to Rum, f. Ex. r, en Transformation, ved hvilken Flader, der berøre hinanden, overføres i lignende Flader, saa vil den tilsvarende Transformation af det andet Rum besidde den samme Egenskab. Den omtalte Transformation af r lader sig jo nemlig udtrykke ved fem Ligninger mellem $(x_1\,y_1\,z_1\,p_1\,q_1)$ og $(x_2\,y_2\,z_2\,p_2\,q_2)$ — Indexerne 1 og 2 referere sig til Rummet r's to Tilstande — og disse Relationer overføres ved Hjælp af Afbildnings-Ligningerne mellem $(x\,y\,z\,p\,q)$ og $(X\,Y\,Z\,P\,Q)$ i Relationer mellem $(X_1\,Y_1\,Z_1\,P_1\,Q_1)$ og $(X_2\,Y_2\,Z_2\,P_2\,Q_2)$, hvilket beviser vor Paastand.

Idet vi indskrænke os til lineære Transformationer af r, finde vi mellem de tilsvarende Transformationer af R: *alle Bevægelser (Translations-Bevægelse, Rotations-Bevægelse og den helicoidale Bevægelse), Semblablitets-Transformation, Transformation ved reciproke Radier, Parallel-Transformation*[1] — *derved forstaaet Overgang fra en*

[1] Bonnets „Dilatation."

Flade til dens Parallel-Flade — en af Hr. Bonnet[1] *studeret reciprok Transformation* etc., hvilke samtlige, som svarende til lineære Transformationer af r, besidde den Egenskab at overføre Krumnings-Curver i Krumnings-Curver. Vi bevise endelig, *at til den almindelige lineære Transformation af r svarer den almindeligste Transformation af R, ved hvilken Krumningslinier ere covariante Curver.*

31. Betragte vi nu for det Første saadanne lineære Punkt-Transformationer af r, til hvilke svare lineære Punkt-Transformationer af R, saa er det klart, at vi alene kunne træffe saadanne Transformationer af R, ved hvilke den uendelig bortfjernede imaginære Cirkel forbliver uforandret, og omvendt er ogsaa sandt, at vi erholde alle disse.

En saadan lineær Punkt-Transformation af R overfører jo nemlig paa den ene Side rette Linier, der skjære hiin Cirkel i lignende Linier, paa den anden Side Kugler i Kugler, og altsaa er den tilsvarende Transformation af r paa engang en Punkt- og Linie-Transformation, det vil sige: en lineær Punkt-Transformation, hvilket var at bevise.

Den almindelige lineære Transformation af R, som ei forrykker den uendelig bortfjernede Cirkel, indeholder 7 Constanter og kan som bekjendt sammensættes af Translations- og Rotations-Bevægelser i Forbindelse med Semblablitets-Transformation. Den tilsvarende Transformation af r, der tydeligviis ogsaa afhænger af 7 Constanter, kan characteriseres derved, at den overfører en lineær Complex ($H = 0$) og en bestemt af sammes Linier — xy-Planets uendelig bortfjernede Linie — i sig selv. Man kunde ogsaa definere denne Transformation derved, at den overfører en speciel lineær Congruenz i sig selv.

Ved analytiske Betragtninger kan man paa følgende Viis bestemme den til en Translations-Bevægelse af R svarende lineære Punkt-Transformation af r. En Translations-Bevægelse udtrykkes ved Ligningerne:

$$X_1 = X_2 + A;\ Y_1 = Y_2 + B;\ Z_1 = Z_2 + C;\ H_1 = H_2,$$

som ved Benyttelse af Formlerne (17) give:

[1] Comptes rendus. Flere Gange i 50-Aarene.

$$r_1 = r_2 + a;\ s_1 = s_2 + b;\ \rho_1 = \rho_2 + c;\ \sigma_1 = \sigma_2 + d.$$

Ved Indsættelse af disse Udtryk i en ret Linies Ligninger:

$$r_1 z_1 = x_1 - \rho_1 \qquad s_1 z_1 = y_1 - \sigma_1$$

faaes som Definition for den omtalte Transformation af r:

$$z_1 = z_2;\ x_1 = x_2 + az_2 + c;\ y_1 = y_2 + bz_2 + d.$$

Ligesaa er det let at bestemme analytisk den til en *Semblablitets-Transformation* af R svarende Transformation af r. Ligningerne:

$$X_1 = mX_2;\ Y_1 = mY_2;\ Z_1 = mZ_2;\ H_1 = mH_2$$

give nemlig ved Anvendelse af (17):

$$r_1 = mr_2;\ \rho_1 = m\rho_2;\ s_1 = ms_2;\ \sigma_1 = m\sigma_2,$$

hvilke Ligninger definere en lineær Transformation af r, der ogsaa kan udtrykkes ved:

$$z_1 = z_2;\ x_1 = mx_2;\ y_1 = my_2.$$

Men disse sidste Relationer definere en lineær Punkt-Transformation, der kan characteriseres derved, at *to rette Liniers Punkter beholde sin Plads.*

Ved geometriske Betragtninger ville vi paavise, at ogsaa *Rotations-Bevægelser* af R overføres i Transformationer af det just angivne Slags. Være A Rotations-Axen og M og N de to Punkter af den imaginære Cirkel, der ei forskyves ved Rotationen. Det er indlysende, at alle imaginære Linier, der skjære A, og som gaa gjennem M eller N, beholde sin Stilling under Rotationen, og følgelig er det Samme Tilfældet med disse Liniers Billedpunkter, der danne to med xy-Planet parallele rette Linier.

32. Transformation ved reciproke Radier af Rummet R overfører Punkter i Punkter, Kugler i Kugler og endelig rette Linier af Længde lig Nul i lignende Linier; den tilsvarende Transformation af r er saaledes en *lineær Punkt*-Transformation, der overfører Complexen ($H = 0$) i sig selv. Bemærker man endvidere, at Transformation ved reciproke Radier lader en vis Kugles Punkter og retliniede Generatricer beholde sin Stilling, saa indsees, at den tilsvarende reciproke Punkt-Transformation ei forrykker to rette Liniers Punkter.

Hr. *Klein*[1] har gjort opmærksom paa, at den just omtalte Transformation kan opfattes som sammensat af to Transformationer relativt til to i Involution liggende lineære Complexer, af hvilke in casu (H = 0) er den ene, medens den anden svarer til Indbegrebet af Kugler, der skjære orthogonalt Fundamental-Kuglen for den givne Transformation ved reciproke Radier.

Efter Ovenstaaende er indlysende, at til en Flade F, som gjennem en Transformation ved reciproke Radier overføres i sig selv, svarer i Rummet r en til (H = 0) hørende Congruenz, der er sin egen reciproke Polare relativt til en med (H = 0) i Involution liggende lineær Complex. Angjældende Congruenzes Brændflade (f) er saaledes sin egen reciproke Polare relativt til begge de nævnte lineære Complexer, og følgelig decomponeres Indbegrebet af f's Dobbelttangenter i Almindelighed i tre Congruenzer, af hvilke de to tilhøre henholdsviis (H = 0) og den med samme i Involution liggende Complex.

33. Man betragte nu alle Linie-Transformationer af r, ved hvilke rette Linier, der skjære hinanden, overføres i lignende Linier[2], og paa den anden Side de tilsvarende Transformationer af R, der besidde den Egenskab at overføre Kugler i Kugler, Kugler, der berøre hinanden i lignende Kugler.

Ved den omtalte Linie-Transformation overføres Indbegrebet af en Flade f_1's Tangenter i samtlige en anden Flade f_2's Tangenter, og specielt gaa f_1's Hovedtangenter over i f_2's Hovedtangenter — dette uafhængigt af, om den betragtede Linie-Transformation er en Punkt-Transformation eller en Punkt-Plan-Transformation.

Ved den tilsvarende Transformation af R overføres den tredobbelte Uendelighed af Kugler, der berøre en given Flade F_1 i Indbegrebet af Kugler, der staa i samme Forhold til den anden Flade F_2, og specielt transformeres F_1's Hoved-Kugler i F_2's Hoved-Kugler. En simpel Consequence heraf er, at F_1 og F_2's Krumnings-

[1] Zur Theorie . . . math. Annalen, Bd. II.

[2] Her er som bekjendt to væsentlig forskjellige Tilfælde at betragte, idet Linier, der gaa gjennem Punkt, enten kunne overføres i lignende Linier, eller i Linier, der ligge i et Plan.

linier svare til hinanden i den Forstand, at naar i en hvilkensomhelst Relation:

$$\Phi(X_1\ Y_1\ Z_1\ P_1\ Q_1) = 0,$$

der gjælder langs en af F_1's Krumningslinier, indsættes $X_1\ Y_1\ Z_1\ P_1\ Q_1$'s Værdier ved: $X_2\ Y_2\ Z_2\ P_2\ Q_2$, saa faaes en Ligning, der gjælder for en af F_2's Krumnings-Curver.

Jeg vil nu paavise, at enhver Transformation af R af Formen:

$$X_1 = F_1\left(X_2\ Y_2\ Z_2\ \frac{dZ_2}{dX_2}\ \frac{dZ_2}{dY_2}\ \frac{d^2Z_2}{dX_2} \cdots \frac{d^{m+n}Z_2}{dX_2{}^m . dY_2{}^n}\right)$$

$$Y_1 = F_2\left(X_2\ Y_2\ Z_2\ \ldots\ldots\ldots \frac{d^{m+n}Z_2}{dX_2{}^m . dY_2{}^n}\right)$$

$$Z_1 = F_3\left(X_2\ Y_2\ Z_2\ \ldots\ldots\ldots \frac{d^{m+n}Z}{dX_2{}^m . dY_2{}^n}\right),$$

der overfører en hvilkensomhelst given Flades Krumningslinier i Krumningslinier for den nye Flade, gjennem min Afbildning svarer til en lineær Transformation af r.

Beviset reducerer sig uden videre til at godtgjøre, at, naar en Transformation af r overfører en hvilkensomhelst Flades Hovedtangent-Curver i Hovedtangent-Curver for den transformerte Flade, saa maa ved samme rette Linier, der skjære hinanden, overføres i lignende Linier.

At for det Første angjældende Transformation maa overføre rette Linier i rette Linier, følger af, at den rette Linie er den eneste Curve, som er Hovedtangent-Curve paa enhver Flade, der indeholder samme.

At endvidere til rette Linier, der skjære hinanden, maa svare Linier af samme relative Stilling, kan udledes deraf, at den develloppable Flade er den eneste Linieflade, som besidder den Egenskab, at gjennem hvert af dens Punkter gaar kun een Hovedtangent-Curve — at altsaa vor Transformation maa overføre develloppable Flader i develloppable Flader.

Vor Paastand er saaledes beviist.

Man kan bemærke, at der, svarende til de to væsentlig forskjellige Arter lineære *Transformationer, existerer to distinkte Classer Transformationer, for hvilke Krumnings-Curver ere covariante Curver.*

Vælger man blandt de omtalte Transformationer af R dem, der ere Punkt-Transformationer, saa faaes *den almindeligste Punkt-Transformation af R, ved hvilken Krumningslinier ere covariante Curver*, et Problem, som *Liouville* først har løst. At herunder Ligedannethed i de mindste Dele bibeholdes, følger af, at infinitesimale Kugler overføres i infinitesimale Kugler.

Parallel-Transformation vides at overføre Krumningslinier i Krumningslinier, og det er i Virkeligheden let at verificere, at den tilsvarende Transformation af r er en lineær Punkt-Transformation.

Ligningerne:

$$X_1 = X_2;\; Y_1 = Y_2;\; Z_1 = Z_2;\; H_1 = H_2 + A$$

overføres nemlig (sammenlign vore Betragtninger over Translations-Bevægelse *n. 31*) i Relationer af Formen:

$$z_1 = z_2;\; x_1 = x_2 + az_2 + b;\; y_1 = y_2 + cz_2 + d.$$

34. Hr. *Bonnet* har flere Gange betragtet en Transformation, som han definerer ved Ligningerne:

$$Z_2 = iZ_2\sqrt{1 + p^2_2 + q^2_2};\; x_1 = x_2 + p_2 z_2;\; y_1 = y_2 + q_2 z_2,$$

hvorved de to Indexer referere sig til den givne og den transformerte Flade.

Hr. Bonnet paaviser, at denne Transformation er en reciprok — i den Forstand, at den to Gange anvendt fører tilbage til den givne Flade, at den transformerer Krumningslinier i Krumningslinier, at endelig følgende Relationer:

$$\zeta_1 = iH_2,\; H_1 = -i\zeta_2 \qquad (\alpha)$$

finde Sted, forudsat at H_1 og H_2 betegne Krumnings-Radier for correspondererende Punkter, at endvidere ζ_1 og ζ_2 ere z-Ordinater for de tilsvarende Krumnings-Centra.

Den Bonnetske Transformation er, som vi strax ville paavise, Billedet af en Transformation af r relativt til den lineære Complex:

$$Z + iH = 0.$$

Erindres nemlig, at $(X = 0)$ $(Y = 0)$ $(Z = 0)$ $(H = 0)$ parviis ligge i Involution, saa findes, at Coordinaterne for to rette Linier, der ere hinandens Polarer relativt til $[Z + iH = 0]$, fyldestgjør Relationerne:

$$X_1 = X_2;\; Y_1 = Y_2;\; Z_1 = iH_2;\; H_1 = -iZ_2. \qquad (\beta)$$

Men disse Formler bestemme, naar X, Y, Z, H interpreteres som Kugle-Coordinater, en parviis Sammenhøren mellem alle Rummets Kugler og det just den samme som den Bonnetske Transformation.

En Flade F_1's Hovedkugler overføres nemlig herunder i en Flade F_2's Hovedkugler, og saaledes gjenfinde vi Bonnets Formler (α). Tænker man sig endvidere F_1 genereret af Punkt-Kugler, saa definere Ligningerne (β) F_2 som Envellop af Kugler, hvis Centra ligge i Planet ($Z = 0$), idet nemlig Ligningen ($H_1 = 0$) drager ($Z_2 = 0$) efter sig som Consequence. I Virkeligheden ere vi herved just førte til den af Hr. Bonnet angivne geometriske Construction.

(Fortsættes.)

Tordenvejr i Norge i 1870.

Af H. Mohn.

(Fremlagt i Møde den 12 Maj 1871.)

Iagttagelser af Tordenvejr bleve i 1870 udførte, efter det meteorologiske Instituts Opfordring, paa samme Maade som i de 3 foregaaende Aar.

Til Institutet er indkommet Beretninger om 1196 enkelte Tordenvejr i 1870, iagttagne af omtrent 220 forskjellige Iagttagere.

Aaret 1870 har saaledes været temmeligt rigt paa Tordenvejr, om det end ikke i denne Henseende kan maale sig med 1868.

Som antydet i min Beretning om Tordenvejr i Norge for 1869 er Studiet af Tordenvejrene i 1870 hovedsagelig blevet henvendt paa Bestemmelsen af Tordenvejrenes Hyppighed i de forskjellige Maaneder og Egne af Landet.

Fortegnelse over Tordenvejr i Norge i 1870.

Februar 3. Om Natten og Morgenen saaes mange og sterke Lyn i Aamot i Østerdalen.

Februar 25. Om Morgenen Tordenvejr ved og udenfor Aalesund.

Februar 26. Om Formiddagen Tordenvejr ved Helligvær (udenfor Bodø).

Marts 22. Om Eftermiddagen kort Tordenvejr ved Stabbens Fyr udenfor Florø.

April 22. Om Eftermiddagen kort Tordenvejr ved Brønø.

April 23. Kort efter Middag Tordenvejr paa Kysten ved Foldenfjord og Namsos.

April 24. Om Eftermiddagen Tordenvejr i Grue og Nes.

April 27. Om Eftermiddagen Tordenveir i Eidanger og ved Langesund.

Maj 11. Om Eftermiddagen Tordenvejr i Smaalenene, Aas og Hurum. Lynet slog ned i 13 Telegrafstolper i Vestby. Om Aftenen Tordenvejr paa Kysten fra Langesund til Arendal.

Maj 12. Kort Tordenvejr om Eftermiddagen i Risør.

Maj 13. Om Eftermiddagen Tordenvejr ved Kongsberg, i Land, Krødsherred, Ringsaker og Aamot. Korte Tordenvejr om Formiddagen ved Sognefjordens Munding, om Eftermiddagen i Florø.

Maj 15. Om Eftermiddagen Tordenvejr ved Christianiafjorden og i Grue.

Maj 17. Kort efter Middag Tordenvejr paa flere Steder ved Glommens Vasdrag.

Maj 18. Om Eftermiddagen Tordenvejr ved Stat.

Maj 19. Kort efter Midnat Tordenvejr paa Kysten ved Florø og paa Søndmør, en Fortsættelse af det foregaaende. Om Eftermiddagen Tordenvejr i Eidanger.

Maj 21. Om Eftermiddagen et Tordenskrald i Grue.

Maj 31. Om Eftermiddagen Tordenvejr ved Oxø.

Juni 8. Om Eftermiddagen kort Tordenvejr i Sydvaranger.

Juni 10. Henimod Midnat Tordenvejr ved Mjøsen.

Juni 11. Om Eftermiddagen Tordenvejr i Aamot.

Juni 12. Ved Middag Tordenvejr i Sydvaranger.

Juni 15. Om Eftermiddagen kort Tordenvejr i Solør, Lynet slog ned i Aasnes.

Juni 16. Om Eftermiddagen og ud over Natten Tordenvejr i Evje, Sætersdalen.

Juni 17. Om Eftermiddagen stærkt Tordenvejr over en stor Del af det sydlige Norge. Allerede om Morgenen brød Tordenvejr ud ved Lister, strax før Middag i Stod. Senere om Eftermiddagen brød det ud i Østerdalen, i Gudbrandsdalen, ved Mjøsen, i Christiania, i Smaalenene, paa Modum, i Valders, i Hallingdal og Hemsedal, paa Kongsberg og i Numedal, i Thelemarken, i Sætersdalen, i Kvinesdal, Fjotland, Suldal, paa hele Kysten fra Skiensfjorden til op imod Bergen. Vejret var denne Dag meget varmt. I Christiania viste Maximumsthermometret 24°.7, i Søndre

Aurdal gik Temperaturen før Tordenvejret op til 29° og sank efter samme til 19°, i Soggendal gik den op til 21° og paa Udsire til 19°. Lynet slog ned i Trysil, hvor en Mand sloges ihjel under en Gran, Ruder knustes, i Søndre Aurdal, hvor en Gut dræbtes, i Nærheden af Mandal, hvor en Hest ihjelsloges, i Hejrefos i Skoven, hvor Branden snart sluktes af Regnen. Paa Vestkysten ledsagedes Tordenvejret af en usædvanlig Bevægelse i Havet. Paa Udsire varede Tordenvejret fra Kl. 1 til 8 Eft. Kl. 4 indtraf en meget sterk Strømning ind og ud af Havnen og foraarsagede en Stigen og Falden af Vandet paa omtrent 2 Fod, paa samme Tid som Havet udenfor var ganske smult. Flere Makrelbaade fik sine Fortøjninger brækkede. Vinden var omløbende, fra Kl. 4 sterk Regn. Paa Lister begyndte Kl. 5 Eft., en Time før Tordenvejret, Søen at stige og falde med korte Mellemrum fra 3 til 5 Fod og holdt saaledes ved omtrent en halv Time. Baade kastedes om, og en Mængde Smaafisk af forskjellig Slags kastedes op paa Stranden som i de sværeste Vinterstorme. Fra Soggendal meldes ogsaa sterkt Sødrag om Eftermiddagen, medens Søen ellers var uden Dynning.

Juni 18. Om Morgenen Tordenvejr i Smaalenene, paa Romerike, ved Mjøsen, i Østerdalen op til Tønset. Ved Middag paa Stavangerkanten, om Eftermiddagen i Hønefos, ved Throndhjemsfjorden og paa Kysten udenfor op til Namsos.

Juni 19. Om Eftermiddagen Tordenvejr ved Christianiafjorden fra Frederiksstad til Holmestrand, samt i Ringsaker, Elverum og Aamot.

Juni 23. Om Eftermiddagen Tordenvejr i Østerdalen.

Juni 24. Om Eftermiddagen spredte Tordenvejr i Gjerdrum, Gjøvik, Hejrefos, Sand (Stavanger) og Støren.

Juni 25. Om Eftermiddagen Tordenvejr paa Kysten fra Skiensfjorden til Arendal, samt i Sand.

Juni 28. Om Eftermiddagen Tordenvejr i Brønø, Vefsen og Ranen, i Elverum og senere ved Hitteren og i Stod.

Juni 29. Tordenvejr i Kautokeino, i Sydvaranger, ved Vardø, i Ranen, i Vefsen, ved Throndhjemsfjorden og paa Kysten udenfor.

Juni 30. Om Formiddagen Tordenvejr ved Vardø og i Sydvaranger. Om Eftermiddagen Tordenvejr ved Røros, i Støren, Selbu, Throndhjem, Strinden, Bynesset, Indherred, Stod, Namsos, Overhalden, ved Præstø Fyr, Brønø, Ranen samt i Kautokeino.

Juli 1. Om Eftermiddagen Tordenvejr i Østerdalen, i Gudbrandsdalen, paa Romerike, paa Ringerike, ved Mjøsen, i Valders, i Krødsherred, i Land, i Thelemarken, ved Skiensfjorden, i Fjotland, i Suldal.

Juli 2. Ved Middag og om Eftermiddagen Tordenvejr i Hemsedal, i Land, paa Modum, i Thelemarken, ved Kongsberg, samt paa Kysten fra Arendal til Christianssand.

Juli 5. Ved Middagstid Tordenvejr paa Romerike, ved Mjøsen, i Østerdalen og senere i Støren, ved Mosterhavn og i Øxendal.

Juli 6. Tordenvejr i Eidsvold, paa Nes og i Aamot. Samme Dag Tordenvejr i den sydlige Del af det kariske Hav.

Juli 7. Tordenvejr i Sydvaranger, det kariske Hav, Modum, Romerike og Østerdalen. Den 8de Tordenvejr paa Nordvestsiden af Nowaja-Semlia paa $74\frac{1}{2}$ Grads Bredde.

Juli 9. Om Eftermiddagen Tordenvejr ved Lister, Soggendal og Egersund. Lynet slog ned $\frac{3}{4}$ Mil fra Soggendal i Fjeldet og slyngede et Par meget store Stene ud. Om Aftenen et Tordenskrald ved Reine i Vestlofoten. Samme Dag Tordenvejr ved Sydsiden af det kariske Hav ved Samojedlandet samt paa Nordvestsiden af Nowaja-Semlia.

Juli 10. Om Eftermiddagen Tordenvejr paa Ringerike, i Krødsherred, Land og Valders, paa Romerike, i Eidsvold og Østerdalen. Samme Dag atter Tordenvejr i det kariske Hav ved Samojedlandets Kyst.

Juli 11. Om Eftermiddagen Tordenvejr paa Stavangerkanten, i Land, ved Mjøsen, i Gudbrandsdalen og i Østerdalen.

Juli 12. Om Morgenen Tordenvejr ved Stavanger. Om Eftermiddagen Tordenvejr i Selbu, Tønset, Land og Vestre-Moland.

Juli 13. Om Eftermiddagen Tordenvejr ved Stavanger.

Juli 14. Om Eftermiddagen Tordenvejr med sterkt Hagel i Østerdalen.

Juli 16. Om Eftermiddagen Tordenvejr paa Kysten fra Sognefjorden til Arendal, i Sætersdalen, Aamlid og Thelemarken.

Juli 17. Om Formiddagen Tordenvejr paa Kysten fra Frederiksværn til Christianssand, samt i Sætersdalen. Om Eftermiddagen Tordenvejr i Smaalenene, Aker, Skedsmo og Stange, samt i Mo i Ranen og i Tanen.

Juli 18. Om Eftermiddagen Tordenvejr ved Christianiafjordens Munding til Langesundsfjorden, paa Kongsberg, i Valders, i Gudbrandsdalen, ved Mjøsen, i Rendalen.

Juli 20. Tordenvejr om Eftermiddagen i Solør og ved Vardø.

Juli 21. Sterkt Tordenvejr i Finmarken. Paa Landtungen mellem Snefjord og Refsbotten (østenfor Hammerfest) slog Lynet ned og ihjelslog 300 Ren og en Fjeldfinpige samt udsprængte en Kløft i Berget. Tordenvejret gik om Aftenen Kl. 11 over Tanen.

Juli 22. Om Aftenen Tordenvejr i Tanen.

Juli 23. Kort Tordenvejr paa Kongsberg.

Juli 24. Om Formiddagen Tordenvejr paa Kysten ved Bergen, i Hardanger, i Sogn, i Nordfjord, paa Søndmør. Lynet slog ned ved Hellisø Fyr. Om Eftermiddagen Tordenvejr ved Kongsberg, i Land, i Grue og i Solliden.

Juli 25. Om Eftermiddagen Tordenvejr ved Kongsberg, i Valders, ved Mjøsen, i Gudbrandsdalen, i Solør og Østerdalen.

Juli 26. Tidlig om Morgenen Tordenvejr i Land, i Birid, ved Lillehammer, i Ringsaker, Aamot, Solliden og ved Skagastølstinderne. Kort efter Middag Tordenvejr i Nordre Fron og Vaage, i Valders, ved Jotunfjeldene, i Aardal, i Hemsedal. Videre paa Søndmør, paa Throndhjemsleden, i Støren, Selbu, Throndhjem, ved Throndhjemsfjorden, i Stod, Bjørnør, Namsos (Kl. 3 til 5½), Nærø, Nesne, Hemnes (Kl. 4 til 10), Mo, Rødø (Kl. 7 til 11), Lofoten (Kl. 8 til 11, en Mand ihjelslaaet i Henningsvær) og Hadsel (Kl. 11½ til 1). Dette Tordenvejr gaar saaledes regelmæssigt nordover. Fra Lofoten berettes, at Vejret havde været meget varmt om Dagen; imod Aften Kl. 8 – 9 begyndte Tordenskyerne at komme op fra Sydvest og Vest og trak over til Nordost.

Om Eftermiddagen var ogsaa Tordenvejr i Solør, Ullensaker, Gjerdrum, Kongsberg, Siljord, Solliden og Røros.

Juli 27. Denne Dag er meget rig paa Tordenvejr. Temperaturen naaede i Christiania til Aarsmaximum, 28.°7. Der var Tordenvejr Formiddag og Eftermiddag paa hele Østsiden af Christianiafjorden, i Skibthvedt faldt Hagel saa store som Hasselnødder og nedslog Ager samt knuste Vinduesruder. I Christiania hørtes kun et enkelt Tordenskrald om Aftenen. Det tordnede om Eftermiddagen i Gjerdrum, Ullensaker, Trygstad, Eidsvold, Birid, hvor Lynet slog ned i en Gran, og hvor der faldt svære Hagel, og i nordre Fron. Ved Middagstider var Tordenvejret over Ringsaker, Vang, Løiten, Elverum, Aamot, Grue, Brandvold, Vaaler, Rendalen, hvor Lynet slog ned, Tønset, Trysil, Røros og om Eftermiddagen i Selbu. Til samme Tid iagttoges Tordenvejr ved Laurvik, i Eidanger, hvor Lynet slog ned og der faldt store Hagel, ved Hønefos, paa Ringerike, ved Kongsberg, i Land, i Sigdal, i søndre Aurdal, hvor Temperaturen naaede 26° og Lynet slog ned, i Siljord, i Fladdal, i Vinje, i Hol i Hallingdal, hvor Lynet slog ned, i vestre Slidre, i Vang, i Hemsedal. Tordenvejret gik ogsaa over Kysten fra Arendal til Oxø, over Sætersdalen, Flekkefjord, Soggendal, Suldal og Vossestranden. I Florø var der Tordenvejr baade Formiddag og Eftermiddag.

Ogsaa i det nordlige Norge var denne Dag meget Tordenvejr, i Mo i Ranen, om Aftenen til næste Morgen ved Helligvær, ved Midnat ved Svolvær, tidlig om Morgenen ved Bjarkø og Andenes, om Eftermiddagen i Alten og Kautokeino samt ved Vardø.

Juli 28. Talrige Tordenvejr, især om Eftermiddagen, ved Christianiafjordens Munding, i Smaalenene, paa Romerike, i Ringsaker, Vang, Løiten, Elverum, i Solør og Østerdalen, i Gudbrandsdalen, ved Laurvik, ved Skiensfjorden, i Land, i søndre Aurdal, paa Fillefjeld. Fremdeles om Eftermiddagen paa Kysten fra Arendal og vestover, i Homedal og Evje, i Kvinesdal, paa Kysten fra Lister til Egersund. Om Eftermiddagen Tordenvejr i Brønø.

Juli 29. Tordenvejr i Trygstad, i Rendalen og i Tønset.

Juli 30. Spredte Tordenvejr, om Morgenen i Kopervik, om Eftermiddagen paa Østsiden af Christianiafjorden, hvor en Mand dræbtes i Nærheden af Hølen, paa Romerike, ved Laurvik og Skiensfjorden, i Brandvold, i nordre Fron, ved Flekkefjord.

Juli 31. Om Eftermiddagen Tordenvejr paa Vestkysten fra Lister til Bergen, meget udbredt. Ved Laurvik, Skiensfjorden, i Sigdal og i Sætersdalen, paa Moss, ved Christiania, i Gjerdrum og i Ullensaker spredte Tordenveir om Eftermiddagen.

August 1. Om Eftermiddagen Tordenvejr paa Vestkysten fra Lister til Udsire samt i Sætersdalen. Det fortsætter om Natten.

August 2. Tidlig om Morgenen Tordenvejr paa Vestkysten fra Mandal til Stavanger samt ved Villa Fyr og Brønø. Om Eftermiddagen Tordenvejr i Stod, paa Dovre, i Gudbrandsdalen, i Lomsfjeldene, i Valders. Senere Tordenvejr i Søndmør, Romsdal og Nordmør, paa Throndhjemsleden. Ligesaa i Henningsvær i Lofoten og i Kautokeino.

August 3. Tidlig om Morgenen hørtes Torden i Selbu og Støren, i Bjørnør, paa Moss, i Tønsberg. Om Formiddagen Tordenvejr paa Udsire, om Eftermiddagen i Frederiksværn og i Eidsberg.

August 4. Om Eftermiddagen Tordenvejr i Smaalenene, paa Romerike, i Solør og i Aamot.

August 5. Tidlig om Morgenen Tordenvejr paa Vestkysten fra Soggendal til Skudesnes. Om Eftermiddagen Tordenvejr i Frederiksværn, i Land, Ringsaker, Vaaler, Elverum, om Aftenen i Rendalen og i Christiania.

August 6. Om Natten og Morgenen Tordenvejr ved Oxø og i Vestre-Moland. Om Eftermiddag Tordenvejr paa Røros samt paa Vestkysten fra Bergen til Lister. Om Aftenen paa Gardermoen og i Rendalen.

August 7. Om Morgenen Tordenvejr ved Lillesand samt paa Kysten fra Lister til Egersund.

August 12. Om Eftermiddagen Tordenvejr paa Romerike, i Solør, Ringsaker, Østerdalen, Gudbrandsdalen, Valders og i Øxendal. Fra Tronfjeld observeredes over 170 Lyn i Tiden fra Kl. 1 til 7 Efterm.

August 13. Tidlig om Morgenen i Land og i søndre Aurdal, paa Hedemarken, Romerike og i Christiania, senere i Nummedal. Om Eftermiddagen i Eidanger og ved Kongsberg, i Smaalenene og Ringsaker. Ligesaa i Sætersdalen, paa Kysten fra Farsund til Soggendal, i Kvinesdal og i Suldal.

August 14. Tidlig om Morgenen Tordenvejr ved Christiania. Kort efter Middag begyndte Tordenvejr i Ringsaker, Aamot og Elverum, senere i Land, Solør, paa Romerike, i Akershus Amt, ved Drammen, i Smaalenene og tilsidst Kl. 8 til 9 i Holmestrand og ved Torgauten Fyr. Et andet Tordenvejr trak om Eftermiddagen over Vossestranden, Hardanger og Suldal.

August 15. Om Morgenen Tordenvejr ude i Søen udenfor Oxø og Lillesand.

August 16. Om Eftermiddagen kort Tordenvejr i Evje i Sætersdalen og i Suldal.

August 17. Om Morgenen Tordenvejr ved Oxø. Om Eftermiddagen Tordenvejr paa Kysten fra Oxø til Skiensfjorden samt i Evje og i Siljord.

August 18. Om Formiddagen kort Tordenvejr ved Frederiksværn og Arendal. Om Eftermiddagen Tordenvejr paa Kysten ved Bømmelen, samt fra Flekkefjord til Lindesnes. Om Aftenen Tordenvejr fra Mandal til Arendal og Frederiksværn.

August 19. Om Eftermiddagen Tordenvejr paa Kysten fra Arendal til Lindesnes. Ved Midnat Tordenvejr i Grue.

August 21. Om Eftermiddagen et Tordenslag i Evje.

August 22. Om Eftermiddagen og Aftenen Tordenvejr i Evje og paa Kysten fra Oxø til Arendal.

August 23. Fortsættelse af det samme Tordenvejr om Morgenen i Frederiksværn.

August 24. Om Eftermiddagen hørtes Torden ved Lister, Flekkefjord, Soggendal og Kopervik.

August 25. Om Eftermiddagen Tordenvejr i Siljord og paa Vos.

August 26. Om Eftermiddagen Tordenvejr i Evje. Lynet slog ned.

August 27. Om Eftermiddagen kort Tordenvejr i Balestrand.

August 28. Om Eftermiddagen Tordenvejr paa Vestkysten fra Flekkefjord og nordover til Kopervik, samt i Søndfjord.

August 29. Om Eftermiddagen Tordenvejr i Suldal.

August 30. Om Eftermiddagen Tordenvejr i Holt og Vestre-Moland.

September 3. Ved Middag Tordenvejr ved Stavangerfjorden og i Suldal.

September 4. Ubetydeligt Tordenvejr i Aamot om Eftermiddagen.

September 5. To Tordenslag om Aftenen ved Lepsørev udenfor Aalesund.

September 6. Tordenvejr om Eftermiddagen i Strinden og ved Præstø Fyr.

September 7. Om Eftermiddagen Tordenvejr ved Lindesnes og Egersund.

September 10. Om Morgenen Tordenvejr paa Kysten fra Soggendal til Oxø.

September 11. Om Eftermiddagen Tordenvejr i Bolsø.

September 12. Et Tordenslag om Aftenen i Vestre-Moland.

September 13. Kort efter Midnat Tordenvejr paa Lister.

September 14. 2 Tordenslag ved Stavanger.

October 5. Om Aftenen kort Tordenvejr i Tanen.

October 18, 19, 20. Om Natten Lyn og Torden i Kvinesdal.

October 21. Om Morgenen et Tordenslag ved Rundø Fyr.

November 16. Om Morgenen Tordenvejr ved Farsund og Soggendal. Om Eftermiddagen Tordenvejr ved Lister, Soggendal og Kopervik.

November 17. Om Morgenen Tordenvejr ved Lister. Om Aftenen ved Lister og ved Kopervik. Om Eftermiddagen og Aftenen Tordenvejr paa Østlandet ved Frederiksværn, paa Østsiden af Christianiafjorden samt i Ringsaker.

November 18. Om Aftenen hørtes 2 sterke Tordenslag ved Tungenes og Skudesnes.

November 19. Om Morgenen Tordenvejr ved Soggendal. om Aftenen ved Hellisø Fyr.

November 25. Om Aftenen Tordenvejr ved Hellisø Fyr.

November 26. Tordenvejr ved Florø Formiddag og Eftermiddag.

December 22. Et sterkt Tordenslag ved Christianssund.

I de følgende Tabeller sees Tordenvejrenes Hyppighed i de forskjellige Egne af Landet. Inddelingen er den samme, som er fulgt i Beretningerne for 1868 og for 1869. I det Indre af Nordland nordenfor Polarcirkelen havdes i 1870 ingen Observationsstationer.

Antal enkelte Tordenvejr.

	Østlandet.		Vestlandet.		Romsdal.		Throndh. Nordld.		Arct. Nordld.		Finmark.		Hele Landet.
	Kyst.	Indland.	Kyst.	Indland	Kyst	Indland	Kyst	Indland	Kyst	Indland	Kyst	Indland	
Januar	0	0	0	0	0	0	0	0	0	:	0	0	0
Februar	0	1	0	0	1	0	0	0	2	:	0	0	4
Marts	0	0	0	0	1	0	0	0	0	:	0	0	1
April	1	4	0	0	0	0	5	0	0	:	0	0	10
Maj	6	32	0	0	4	4	0	0	0	:	0	0	46
Juni	23	139	13	8	1	1	11	38	0	:	1	6	241
Juli	51	364	64	19	3	11	6	37	20	:	2	6	583
August	37	128	54	14	4	9	4	8	1	:	0	1	260
Septbr.	4	2	8	1	1	0	1	1	0	:	0	0	18
October	0	0	0	3	1	0	0	0	0	:	0	1	5
Novbr.	4	2	17	0	2	1	0	0	0	:	0	0	26
Decbr.	0	0	0	0	2	0	0	0	0	:	0	0	2
Aar	126	672	156	45	20	26	27	84	23	:	3	14	1196
Antal Stationer	20	97	27	13	13	11	10	20	12	:	3	4	230

Antal Tordenvejr pr. Station.

	Østlandet.		Vestlandet		Romsdal.		Throndhjem Nordland.		Arctisk Nordland.		Finmarken.		Hele Landet.
	Kyst	Indland.	Kyst.	Indland.	Kyst.	Indland.	Kyst.	Indland.	Kyst.	Indland	Kyst.	Indland.	
Januar	0	0	0	0	0	0	0	0	0	=	0	0	0
Februar	0	0.01	0	0	0.08	0	0	0	0.17	=	0	0	0.017
Marts	0	0	0	0	0.08	0	0	0	0	=	0	0	0.004
April	0.05	0.04	0	0	0	0	0.50	0	0	=	0	0	0.043
Maj	0.30	0.33	0	0	0.31	0.36	0	0	0	=	0	0	0.200
Juni	1.15	1.44	0.48	0.61	0.08	0.09	1.10	1.90	0	=	0.33	1.50	1.048
Juli	2.55	3.75	2.37	1.46	0.23	1.00	0.60	1.85	1.67	=	0.67	1.50	2.530
August	1.85	1.32	2.00	1.08	0.31	0.82	0.40	0.40	0.08	=	0	0.25	1.130
Septbr.	0.20	0.02	0.30	0.08	0.08	0	0.10	0.05	0	=	0	0	0.078
October	0	0	0	0.23	0.08	0	0	0	0	=	0	0.25	0.022
Novbr.	0.20	0.02	0.63	0	0.15	0.09	0	0	0	=	0	0	0.113
Decbr.	0	0	0	0	0.15	0	0	0	0	=	0	0	0.009
Aar.	6.30	6.93	5.78	3.46	1.55	2.36	2.70	4.20	1.92	=	1.00	3.50	5.200

Antal Dage med Tordenvejr.

	Østlandet.		Vestlandet.		Romsdal.		Throndh. Nordland.		Arctisk Nordland.		Finmark.		Hele Landet.
	Kyst.	Indland.	Kyst.	Indland.	Kyst.	Indland.	Kyst.	Indland.	Kyst.	Indland.	Kyst.	Indland.	
Januar	0	0	0	0	0	0	0	0	0	=	0	0	0
Februar	0	1	0	0	1	0	0	0	1	=	0	0	3
Marts	0	0	0	0	1	0	0	0	0	=	0	0	1
April	1	2	0	0	0	0	2	0	0	=	0	0	4
Maj	3	6	1	0	3	0	0	0	0	=	0	0	9
Juni	3	10	4	1	0	0	4	5	0	=	1	4	15
Juli	8	23	11	4	3	2	2	6	3	=	2	5	26
August	14	15	10	5	2	4	2	2	1	=	0	1	25
Septbr.	2	2	5	1	2	0	1	1	0	=	0	0	10
October	0	0	0	3	1	0	0	0	0	=	0	1	5
Novbr.	1	1	6	0	0	0	0	0	0	=	0	0	6
Decbr.	0	0	0	0	1	0	0	0	0	=	0	0	1
Aar.	32	60	37	14	14	6	11	14	5	=	3	11	105

De følgende Tabeller vise de forskjellige Maaneders Middeltemperatur (M) og dens Afvigelse (Δ) fra den normale for en Række Stationer i Norge.

1870	Vardø. M	Vardø. Δ	Bodø. M	Bodø. Δ	Ytterøen. M	Ytterøen. Δ	Chrsund. M	Chrsund. Δ	Aalesund. M	Aalesund. Δ	Bergen. M	Bergen. Δ
Januar	−5.7	0.3	−1.4	0.5	−1.4	1.5	1.4	0.4	2.1	0.3	1.4	1.0
Februar	−7.7	−1.4	−3.8	−1.0	−4.1	−1.3	−0.1	−0.6	−0.2	−1.4	−1.6	−1.6
Marts	−3.9	1.1	−1.5	0.0	−0.7	0.2	1.2	0.1	2.0	0.1	1.4	−0.4
April	−0.3	1.5	3.8	2.1	5.0	2.0	5.8	1.9	5.6	1.2	6.2	1.3
Maj	0.8	−0.9	4.7	−0.3	8.1	0.4	7.4	0.3	7.3	0.0	8.5	−0.9
Juni	5.5	−0.4	10.2	−0.5	11.5	−0.6	10.8	−0.5	10.5	−0.8	11.6	−1.7
Juli	9.7	0.9	11.5	0.0	14.3	0.4	13.0	0.3	12.6	0.0	14.8	0.3
August	7.3	1.4	12.6	0.7	15.3	0.9	14.2	1.4	13.4	0.6	15.1	0.6
September			9.7	0.0	9.7	−2.4	10.4	−0.8	10.4	−1.1	10.5	−1.5
October	0.4	−0.9	2.2	−1.7	3.8	−0.9	6.3	−0.6	6.8	−0.6	6.3	−1.1
November			−0.5	−1.2	0.6	0.1	4.0	0.5	4.2	0.1	4.1	0.6
December			−2.2	−0.8	−3.0	−0.9	0.5	−1.6	0.8	−2.4	−1.5	−3.5

1870	Skudesnes. M.	Skudesnes. Δ.	Mandal. M.	Mandal. Δ.	Sandøsund. M.	Sandøsund. Δ.	Christiania. M.	Christiania. Δ.	Dovre. M.	Dovre. Δ.
Januar	1.7	0.2	−0.5	0.1	−1.8	0.1	−3.4	1.1	−7.6	2.1
Februar	−1.2	−2.2	−4.0	−3.2	−6.1	−3.8	−8.2	−4.0	−10.1	−2.0
Marts	1.4	−0.6	0.8	−0.2	−0.5	−0.2	−0.2	0.6	−4.1	2.4
April	5.5	1.1	5.5	1.4	4.8	0.8	5.3	1.2	1.7	2.6
Maj	7.5	−1.0	8.7	−0.4	9.7	0.1	10.7	0.2	5.0	0.8
Juni	10.5	−1.5	12.7	−0.5	13.6	−0.8	15.7	0.2	9.9	0.7
Juli	13.5	0.4	15.7	0.7	16.8	0.6	18.8	1.2	12.9	1.8
August	14.5	0.6	15.3	1.0	16.6	0.7	16.7	0.4	11.8	1.6
Septbr.	11.0	−1.2	10.5	−1.1	11.6	−1.1	10.6	−1.3	6.4	0.9
October	7.1	−1.3	6.4	−0.9	5.8	−1.6	4.4	−2.1	0.1	−0.2
Novbr.	4.6	0.0	3.4	0.2	3.0	0.3	1.5	0.9	−3.4	0.5
Decbr.	−0.5	−3.6	−4.1	−5.5	−4.5	−4.5	−7.0	−3.9	−10.8	2.9

De følgende Tabeller vise de maanedlige Middeltal for Vanddampenes Tryk i 1870 samt disses Afvigelser (— betegner mindre end det normale) fra de af flere Aar udledede Middelværdier.

For Kyst-Stationerne i det sydlige Norge bero de fleraarige Media paa 10 Aars Observationer, for Dovre paa 7 Aars, for Christiania paa 5 Aars, for Ytterøen paa 5 Aars, for Bodø paa 3 Aars, for Vardø paa 4 Aars Observationer.

Millimeter.

	Vardø.		Bodø.		Ytterøen.		Chrsund.		Aalesund.		Bergen.	
	M.	Δ.	M.	Δ.	M.	Δ.	M.	Δ.	M.	Δ.	M.	Δ.
Januar	2.9	0.2	3.1	—0.3	3.7	0.3	4.0	—0.1	3.8	—0.2	4.3	0.3
Februar	2.4	—0.3	2.7	—0.1	2.9	—0.3	3.4	—0.5	3.3	—0.6	3.5	—0.5
Marts	3.0	—0.2	3.1	0.0	3.4	—0.1	3.8	0.1	3.7	—0.1	3.9	0.1
April	4.1	0.4	4.5	0.4	4.8	0.3	4.7	—0.1	5.7	0.7	5.3	0.3
Maj	4.2	—0.2	4.5	—0.3	5.7	—0.2	5.9	0.2	6.1	0.2	6.3	0.4
Juni	6.0	—0.1	6.0	—0.6	7.4	0.0	7.6	0.0	7.7	0.0	8.1	0.1
Juli	7.7	0.0	7.8	—0.4	8.8	0.3	8.8	0.1	9.0	0.2	9.9	0.6
August	7.7	0.4	8.9	0.2	9.6	0.2	9.6	0.6	9.7	0.7	9.8	0.2
Septbr.			7.3	0.7	7.2	0.3	7.6	0.1	7.5	—0.3	8.0	—0.1
October			3.9	—0.6	4.5	—0.5	4.9	—0.8	5.2	—0.8	5.3	—0.7
Novbr.			3.0	—0.6	3.9	—0.2	4.4	—0.3	4.5	—0.2	4.6	0.1
Decbr.			2.9	0.1	3.2	0.0	3.7	—0.6	3.7	—0.7	3.3	—1.0

	Skudesnes.		Mandal.		Sandøsund.		Christiania.		Dovre.	
	M.	Δ.	M.	Δ.	M.	Δ.	M.	Δ.	M.	Δ.
Januar	4.5	0.1	4.1	0.0	3.7	0.1	3.2	0.4	2.3	0.0
Februar	3.3	—1.1	3.0	—1.1	2.5	—1.0	2.1	—0.7	1.9	—0.2
Marts	4.1	—0.1	3.7	—0.2	3.6	0.0	3.2	0.0	2.5	0.3
April	5.7	0.0	5.2	0.1	5.3	0.3	4.4	0.0	3.7	0.3
Maj	6.4	0.0	6.2	0.0	6.3	—0.2	5.5	0.4	4.3	0.0
Juni	7.9	—0.3	7.7	—0.8	8.2	—0.7	8.0	0.8	5.7	—0.2
Juli	9.4	0.3	10.1	0.2	10.7	0.4	10.0	1.0	8.1	0.7
August	10.0	0.4	10.4	0.2	10.0	—0.3	8.4	—1.0	7.6	0.1
Septbr.	8.4	—0.1	8.0	—0.7	8.0	—0.6	7.4	0.2	5.5	—0.4
October	5.7	—0.8	5.8	—0.9	5.5	—0.8	4.8	—0.7	3.5	—0.5
Novbr.	5.1	—0.1	5.1	0.0	4.9	0.3	4.3	0.6	3.1	0.3
Decbr.	3.6	—1.1	3.1	—1.4	3.0	—0.9	2.5	—0.5	1.9	—0.5

Tordenvejrene have i 1870 i Norge været hyppigst paa Østlandet, i det Indre af Landet. Tabellen over Antallet af Tordenvejr pr. Station viser, at de i det Hele taget have været mindre hyppige paa Kysten end i det Indre af Landet; Undtagelse danner Vestkysten, hvor det modsatte Forhold, der har været herskende de foregaaende Aar, ogsaa finder Sted i 1870. De Maaneder, der have givet de fleste Tordenvejr, ere Juli og August. Man ser af Tabellen over Temperaturens aarlige Gang i 1870, at Sommermaanederne i det Indre af Østlandet (Dovre og Christiania) have et ikke ubetydeligt Varmeoverskud. Man ser fremdeles af Fortegnelsen over Tordenvejrene i 1870, at de paa Østlandet optrædende Tordenvejr ere ofte spredte over vide Strækninger, og Iagttagelserne vise ikke i Almindelighed nogen regelmæssig fremskridende Gang hos dem henover Landet. Næsten alle ere ogsaa Eftermiddagstordenvejr. Vi slutte heraf, at den større Mængde Tordenvejr i 1870 maa henregnes til Varmetordenvejr.

Hermed stemmer ogsaa Tordenvejrenes betydelig større Hyppighed i det Indre af det Throndhjemsk-Nordlandske Parti end paa Kysten, et Forhold, der som nævnt ogsaa gjentager sig i Finmarken og tildels i det Romsdalske Parti.

Vestkysten og Landet i det Indre af disse Egne have i 1870 færre Tordenvejr end Østlandet. Som antydet i Beretningen om Tordenvejr i Norge i 1868 spille Hvirveltordenvejrene Hovedrollen paa Vestkysten. I 1870, da Hvirveltordenvejrene ere sjældnere, og da Vestkystens Varmeoverskud i Sommermaanederne er lidet, ligesom Overskuddet af Vanddampenes Tryk, synker Tordenvejrenes Hyppighed paa Vestlandet ned under hvad vi efter tidligere Aars Erfaringer skulde vente.

Kysten og Indlandet fra Sognefjorden til det Throndhjemske har i 1870 som sædvanligt ellers færre Tordenvejr end de 10 Partier, som grændse til dette Strøg.

I det arctiske Nordland er kun faa Tordenvejr, overensstemmende med det før fundne Forhold.

I Finmarken er Tordenvejrenes Hyppighed i det Indre af Landet ikke ubetydelig, saaledes som ogsaa var Tilfældet i den varme og paa Tordenvejr rige Sommer i 1868.

Vintertordenvejr ere ikke meget fremtrædende i 1870. Kun November, der udmerker sig i det sydlige Norge ved et større Varmeoverskud og tilsvarende Rigdom paa Vanddampe i Modsætning til de to foregaaende Maaneder, optræder med et ikke ubetydeligt Antal Tordenvejr i de samme Egne. December og Februar have over hele Landet været meget kolde og dampfattige. Januar er mere normal, tildels mild, men mangler dog ganske Tordenvejr. I det Hele taget vare Vintermaanederne lidet stormfulde, og mange Tordenvejr kan man derfor heller ikke vente i dem.

Bidrag til Kundskaben om Vegetationen i den lidt sydfor og under Polarkredsen liggende Del af Norge.

Efter Undersøgelser anstillede i **Ranen** i Sommeren 1870 i Selskab med Student **W. Arnell**

af

A. Blytt,

Conservator.

(Fremlagt i Mødet den 12 Mai 1871).

Lidt nordfor den 66de Breddegrad løber Ranenfjorden i østnordøstlig Retning omtrent 6 Mile ind i Landet. Ved dens Bredder ligge 3 Præstegjeld, nemlig Nesne yderst mod Havet, Hemnæs i Midten og Mo inde ved Fjordbunden.

Fjordens Indløb er beskyttet ved en Skjærgaard af klippefulde Øer, som have Toppe af 2—3000 Fods Høide. Disse Øer ere paa Havsiden næsten træløse, men paa Landsiden findes dog hist og her Krat eller Smaaskov af Birk, undertiden ogsaa enkelte Graner. Grunden er gjerne fugtig, og i de lavere Egne findes megen Torvemyr ved Foden af de nøgne Fjelde.

Ved Nesne, hvor den egentlige Ranenfjord begynder, er der ikke saalidet Skov af Birk og Graaolder. Fjordens Bredder ere indover til Hemnæs meget steile, og de nøgne Fjeldvægge minde om Fjordbredderne i Bergens Stift, skjønt Fjeldene neppe ere synderlig over 2000 Fod høie. Ved Hemnæs deler Fjorden sig: en Arm gaar mod Syd og optager den fra Røsvandet i Vefsen kommende Røsaa, en betydelig Elv, i hvis brede Dalføre findes store Granskove. Røsaaen optager blandt andre Bielve Leraaen, som løber gjennem den trange Lerskardal og kommer fra de omtrent 5000 Fod høie Oxtinder, som rage op over Snegrændsen og have ikke ubetydelige Jøkler. Den anden Arm af Fjorden løber forbi Hemnæs ind til Mo, hvor den store Dunderlandselv udgyder sig i dens inderste Vig. Denne Elv kommer fra Grændsefjeldene mod Piteå Lapmark og gjennemstrømmer den 7—8 Mile lange

Dunderlandsdal, optagende Tilløb dels fra Grændsen af Umeå Lapmark i Sydost, dels fra Grændsefjeldene mod Salten i Nord, og endelig komme maaske dens vandrigeste Bielve fra den store Bræ Svartisen, som næstefter Justedalsbræen skal være Norges største Bræ, og som breder sig ud over Fjeldene mellem Ranen og Beieren mod Nordvest. Dunderlandsdalen er i sin nedre Del aaben og venlig; længere oppe omgives baade den og dens Sidedale af høie Fjelde, hvoraf Ørtfjeldet, som stiger til mer end 4000 Fod, rimeligvis er det høieste. Der er Granskov op igjennem Dalen til lidt nordenfor Polarkredsen; siden er der Birkeskov med lidt Fure indblandet.

Professor M. N. Blytt og Gartner N. Moe besøgte i 1841 (paa deres Reise til Finmarken) Alstenø og Ranen. Blytt opholdt sig ved Hemnæs, medens Moe undersøgte Lerskardalen; men deres Ophold i disse Egne var kortvarigt og faldt desuden tidlig paa Sommeren paa en Tid, da Vegetationen især i Fjeldtrakterne endnu var lidet udviklet. Fra dette Ophold haves i Blytts Manuscripter Fortegnelse over de observerede Arter.

Forøvrig vides Ingen forhen at have botaniseret i Ranen med Undtagelse af Hr. Pastor Heltzen, fra hvem Blytt sees at have hentet adskillige Oplysninger.

I Sommeren 1870 besøgte jeg Ranen med offentlig Understøttelse i Selskab med Student W. Arnell fra Upsala. Vi stege den 1ste Juli iland paa Lygtøen og opholdt os i den første Halvdel af Maaneden ude ved Havet, idet vi undersøgte Skjærgaarden, d. v. s. Øerne Lygtø, Dønø[1], Tombø, Hugløg og de to smaa Holmer Vigholmen og Finkona, samt gjorde et Par Excursioner ved Nesne. Derpaa reiste vi ind til Mo. Efter nogle Udflugter i Omegnen af Mo tiltraadte vi den 22de Juli en længere Tur op igjennem Dunderlandsdalen og trængte gjennem denne lige ind til Rigsgrændsen paa Nasafjeld. Den 12te August reiste vi fra Mo ud til Hemnæs. Her botaniserede vi til den 19de, da vi tog ind til Korgen og Ler-

[1] Vor Tid tillod os blot at anvende en Dag paa denne store Øs Undersøgelse, og denne Undersøgelse blev derfor meget ufuldstændig.

skardalen. Den 30te reiste vi atter ud til Vigholmen, hvorfra vi foretog nogle Excursioner til Nesne, Huglø og Handnesø. Den 4de September reiste vi sydover.

Naar man til de af Arnell og mig paa denne Reise observerede Arter lægger 38, som af Blytt ere optegnede dels for Ranen, dels for Alstenø, Trenen og Lurø, tæller Floraen i Ranen og den udenfor liggende Skjærgaard af

cryptogame Karplanter	38	Arter,
Monocotyledoner	174	—
Gymnospermer	3	—
Dicotyledoner	343	—

og altsaa i Alt af Karplanter 558 Arter.

Desuden samlede vi af

Characeer	3	Arter
Løvmoser og Sphagna	289	—

Vore Levermoser ere endnu ikke bestemte.

Med et Aneroidbarometer foretog jeg følgende Maalinger af Vegetationsgrændser i Ranen, alle angivne i norske Fod:

Grangrændsen.

Ved Vesteraali i Dunderlandsdalen	1003	Fod.
— Ørtfjeldgaardene sammesteds	902	—

Birkegrændsen (Betula glutinosa).

Paa Landsiden af Hugløfjeld ude ved Havet .	947	—
Ved Vesteraali i Dunderlandsdalen	1997	—
— Dunderland i —	2003	—
Paa Bredikfjeld - —	2083	—
— Andfjeld - —	2116	—
— Nasa - —	2173	—
— Stolpefjeld i Lerskardalen	2153	—
— Tverfjeld - —	1880	—[1]

[1] Maalingen foretoges paa Sydsiden af Fjeldet, som vender lige mod de store Snemasser og Isbræer paa og ved Oxtinderne, og dette er formodentlig Grunden til at Grændsen er lavere, end man skulde vente.

Vidiegrændsen (Salix glauca & lanata).

Paa Ørtfjeld mod Syd	2882	Fod.[1]
— Bredikfjeld	3055	—
— Andfjeld	3073	—
— Nasa	2828	—
— Tverfjeld	2553	—

Snegrændsen bestemtes ikke directe ved Maaling, men jeg tror ikke at feile synderlig, naar jeg sætter den i en Høide af 4000 til 4200 Fod i de nærmest Grændsen liggende Egne, f. Ex. paa Oxtinderne og i de inderste Dele af Dunderlandsdalen. Hverken Nasafjeld, som er 3842 Fod høit, eller Tverfjeld (3997′) naa Snegrændsen; de ere, især Nasa, i store Strækninger snebare, og deres Vegetation viser ogsaa, at Snegrændsen maa ligge noget høiere. Ifølge Wahlenbergs omhyggelige Iagttagelser[2] ligger Snegrændsen omtrent 2000 Fod over Birkegrændsen; efter dette vilde den i de indre Dele af Ranen komme til at ligge 4200 F. o. H. Fra Grændserøsen paa Nasa, hvor man har en vid Udsigt saavel ind i Lapmarken som udover de norske Fjelde, ser man tydelig Havets Indflydelse paa Snelinien. De norske Fjelde skinne oventil af sammenhængende Snemasser, men paa den svenske Side ere Fjeldene, skjønt deres Høide er betydelig, for Størstedelen snebare. I de vestligere Dele af Ranen kan man neppe sætte Snegrændsen saa høit som paa Grændsefjeldene. Ryggen af Ørtfjeld ovenfor Dunderland var i en Høide af 3810 Fod endnu snebar, men store Bræer gaa lige i Nærheden omtrent 600 Fod lavere ned. At Snelinien paa Vestsiden af Svartisfjeldene maa ligge langt lavere, kan sluttes af den Omstændighed, at Isbræerne her naa ned til Havet (Melø).

Vidiegrændsen er paa langt nær ikke saa skarpt udpræget som Birkegrændsen, og deraf kommer den ikke ubetydelige Uoverensstemmelse mellem de forskjellige Maalinger. Paa de løsere Skiferfjelde mangle Salix glauca og lanata næsten ganske. I

[1] En Busk af S. lanata voxte paa Nordsiden 3242 F. o. H.

[2] Cfr. Wahlenb. berättelse om mätningar etc. för att bestämma lappska fjällens höjd under 67 graders polhöjd. Sth. 1808 p. 46.

deres Sted træder S. myrsinites, som paa Andfjeld gaar op til 2639 Fod. Betula nana gaar sammesteds til 2934'.

Birkegrændsen synker fra omtrent 2000 Fod i de østlige Egne ned til 900—1000' paa det ved Havet liggende Hugløfjeld.

At Granen saa nær sin nordlige Grændse endnu stiger til 1000', er ikke uden Interesse.

I den medfølgende Plantefortegnelse nævnes følgende fire Regioner:

1) *Granbeltet.*[1] Herhen regnes alle nedenfor Granens Grændse liggende Egne, selv de lavere Dele af de nøgne Øer ude ved Havet, hvor Granen endnu findes, skjønt yderst sparsomt og kun paa Landsiden, saasom paa Huglø og Tombø. I de østlige Egne naar Granbeltet op *til 1000 Fod.*

2) ***Birkebeltet*** naar ude ved Havet op til 1000 Fod. I de *østlige* Egne strækker det sig *fra 1000—2000 Fod.*

3) *Vidiebeltet* begynder ude ved Havet allerede i 1000 Fods Høide; i de *østlige* Egne gaar det *fra 2000 omtrent til 3000 Fod.*

4) ***Lavbeltet*** fra Vidie- til Snegrændsen, i de *østlige* Egne altsaa omtrent *fra 3000 til 4000 Fod.*

Af de i Ranen forekommende Karplanter er der 179 Arter, som selv i det sydlige Norge kun findes i de lavere Egne, og som næsten aldrig gaa over Bartræernes Grændse (og isaafald blot undtagelsesvis). Disse Arter aftage i Ranen i Antal, eftersom man fra Havet gaar ind til de indre Fjordegne. Man vil se dette af følgende Oversigt:

44 Lavlandsplanter findes kun ude paa Øerne og ved Nesne.
46 findes ude ved Havet og gaa ind til Hemnæs.
59 findes ude ved Havet og gaa ind til Mo.
18 ere kun fundne ved Hemnæs.
10 kun ved Hemnæs og Mo.
2 findes kun ved Mo.

[1] Saagodtsom alle Høideangivelser af Arternes Udbredelse i den medfølgende Fortegnelse støtte sig til Iagttagelser anstillede i de indre Fjeldtrakter, og de maa altsaa refereres til de for disse Egne opgivne Antal af Fod.

Af disse 179 Arter have følgelig 77 ingen udpræget øst- eller vestlig Udbredelse, idet de dels ere udbredte over hele Egnen, dels blot findes ved Hemnæs; af de øvrige have kun 12 en østlig Udbredelse (Hemnæs og Mo), medens ikke færre end 90 have en vestlig (Øerne, Nesne og Hemnæs).

Der gives i det sydlige Norge væsentlig to Klasser af Lavlandsplanter, nemlig de for Vestkysten eiendommelige[1] og de mere continentale[2], som kun findes paa Østlandet og for en Del ogsaa i de indre Fjordegne vestenfjelds.

Af de førstnævnte gaa kun faa længere op end til Throndhjemsfjorden. I Ranen findes kun svage Spor af denne Vestlandets Flora, nemlig Erica Tetralix, Narthecium, Blechnum Spicant og Carex pulicaris, hvoraf de tre ogsaa her have en vestlig Udbredelse, medens Blechnum gaar lige ind til Mo.

Af de Lavlandsplanter, som i det sydlige Norge have en mere continental Udbredelse, idet de sky det aabne Havs Kyster i Christianssands og Bergens Stifter, er der derimod mange, som gaa op til Ranen, men mærkelig nok synes de fleste af dem her at trives ligesaa godt, ja endog bedre ude ved Havet end i de indre Fjordegne[3].

Saaledes forekomme blandt andre følgende 17 Arter i Bergens Stift (ved Sognefjorden) kun i Fjordegnene og mangle ude ved Havet, medens de i Ranen blot ere bemærkede i de ydre Kystegne:

Trichera arvensis. Galium verum. Asperugo procumbens. Plantago media. Cerastium viscosum. Goodyera repens. Equisetum pratense. Pimpinella Saxifraga. Corydalis fabacea. Sonchus oleraceus. Fumaria officinalis. Sisymbrium officinale. Hypericum hirsutum. Potentilla argentea. Orobus vernus. Euphorbia Helioscopia. Urtica urens. Avena pubescens.

Af Arter, som i Ranen have en vestlig Udbredelse, er der

[1] Cfr. A. Blytt: Veg. i Sogn Tab. III p. 47.

[2] l. c. Tab. II p. 45.

[3] Under et 8 Dages Ophold ved Valdersund i Fosen fandt jeg ogsaa der mange Arter, som i Bergens Stift sky Havets Nærhed.

endvidere endel, som synes at mangle ganske i den vestenfjeldske Del af det sydlige Norge, medens de ere almindelige paa Østlandet. Saadanne ere blandt andre:

Lamium amplexicaule. Gentiana Amarella. Adoxa. Avena pratensis. Viola umbrosa. Heleocharis acicularis. Lolium linicola.

Følgende Arter sky Havets Nærhed i Bergens Stift (Sogn), men ere i Ranen ligesaa hyppige ude ved Havet som i de indre Egne:

Erigeron acris. Carduus crispus. Crepis tectorum. Veronica scutellata. Thalictrum flavum. Brassica campestris. Erysimum cheiranthoides og hieraciifolium. Thlaspi arvense. Viola mirabilis. Arenaria serpyllifolia. Carex digitata. Equisetum fluviatile.

Grunden til denne Havklimatets forskjellige Indvirkning paa Vegetationen i det Søndenfjeldske og det Nordenfjeldske skal jeg for Øieblikket ikke indlade mig paa at drøfte nærmere. Det forekommer mig ikke urimeligt, at de milde Vintere paa Bergenskysten, hvor nogle Graders Varme ofte vexler med Frost, maa udelukke fra denne Kyst alle Planter, som allerede begynde at vegetere ved en forholdsvis lav Varmegrad, paa samme Tid som de ere let udsatte for at skades af Frost. Jeg maa dog udtrykkelig tilføie, at det ikke er min Mening at ville gjøre denne Grund gjældende for hver enkelt af de ovennævnte Arter.

De høiere Fjelde ude ved Havet bestaa for Størstedelen af haarde granitagtige Bergarter, sjeldnere af Glimmerskifere, saasom paa Handnesø, Huglø og ved Nesne. Ved Foden af disse Fjelde findes ei ubetydelige Strækninger af lavere Land, som forhen har staaet under Havet, hvilket sees dels af de skjælfyldte Sandbanker, dels af de afrundede Pimpstenstykker, som findes i Jorden ofte temmelig langt fra den nuværende Strandbred, men neppe til nogen betydelig Høide over denne. Lavlandet er for Størstedelen dækket af Torvemyr, men mangesteds stikke lave Aase af Kalksten frem over det torvagtige Terrain. Disse Kalkberge have en meget eiendommelig Vegetation. For det Første ere de rige paa sjeldne Moser; dernæst findes der paa de tørre Kalkberge mange sydlige Planter, som man ellers søger forgjæves i disse Egne. Saadanne ere: Viburnum, Rosa canina og mollissima, Corylus Avellana, Ulmus montana, Sorbus hybrida, Orchis mascula, incarnata, Listera ovata, Arabis hirsuta, Arenaria serpyllifolia, Asplenium Ruta muraria, Polygala vulgaris, Convallaria majalis, Orobus vernus, Actæa spicata, Asperula odorata o. fl. En Eiendommelighed ved Kalkens Flora er ogsaa den relativt store Rigdom paa Orchideer, hvoraf foruden de ovenfor nævnte ogsaa findes Epipactis atrorubens, Platanthera bifolia, Gymnadenia conopsea, Peristylis viridis og Goodyera repens. Sammen med de sydligere Arter forekomme ogsaa paa Kalken (Dønø, Lygtø, Tombø, Handnesø) og Glimmerskiferne (f. Ex. paa Huglø) lige ned til Søen og ofte i største Mængde flere Fjeldplanter, som i Almindelighed mangle paa de lyngbedækkede Granitklipper; af disse fortjene følgende Arter især at fremhæves: Erigeron alpinus, Veronica saxatilis, Primula scotica, Thalictrum alpinum, Draba incana, Silene acaulis, Saxifraga oppositifolia, Dryas, Salix reticulata og Carex rupestris.

I Mo findes Kalksten hist og her fra Søen af og op igjennem Dunderlandsdalen indtil dens øvre Del, men, som det synes, kun i Dalbunden og paa de nedre Fjeldskraaninger. Fjeldene bestaa især af fastere gneislignende Glimmerbergarter, sjeldnere af løsere Glimmerskifere. Saasnart Elvene og Bækkene under sit Løb udover Fjeldsiderne naa ned der, hvor Kalkstenen begynder, forsvinde de ofte i dybe Revner og komme først nede i Dalen atter frem i Dagen. Dette er endog Tilfældet med temmelig betydelige Elve (Eiteraa, Stilvasaa). De nedre Lier, hvor Kalken findes, ere derfor gjerne meget tørre og afgive gode Localiteter for sydlige Planter, især naar de vende mod Solsiden. I disse især med Granskov bevoxede Lier finder man Daphne, Stachys silvatica, Viola mirabilis, Arabis hirsuta, Erysimum hieraciifolium, Actæa, Convallaria verticillata, Ribes rubrum, Campanula latifolia, Paris, Polypodium Robertianum, Carex ornithopoda, C. digitata o. fl. Saasnart man kommer til de fugtige Gneislier, afløses disse Planter, selv nede i Dalen, af en subalpin Flora, bestaaende af Mulgedium, Aconitum, Gnaphalium Norvegicum o. l. Pl. I de indre Dele af

Ranen gaa Fjeldplanterne selv paa Kalken langt sjeldnere ned i Lavlandene end paa de skovløse Kalkberge ude ved Havet.

Medens Størstedelen af Fjeldene i Ranen bestaar af haardere granit- og gneisagtige Bergarter, findes dog hist og her løsere Glimmerskifere. Saadanne findes f. Ex. i Dunderlandsdalen paa Bredikfjeld, Bjeldaanesfjeld, Rødfjeld og Dugurmaalshaugen, i Lerskardalen paa Tverfjeld og Skarhogen, ved Nesne paa Nesnefjeld o. s. v. Der er altid en mærkelig Forskjel mellem Vegetationen paa disse løsere Skifere og den paa de haardere Bergarter. Paa de sidste er Floraen ensformig, idet enkelte Planter, især visse Moser (Racomitrium lanuginosum o. fl.), Lavarter (Cladoniæ, Cetrariæ) og lyngagtige Planter (Vaccinia, Empetrum o. l.), ere udbredte i store Masser. Paa de løsere Skifere indtræder strax en Forandring: de sammenhængende Mos-, Lav- og Lyngtepper forsvinde, og en mere afvexlende Flora afløser dem. Enkelte Arter bemærkedes i disse Fjeldegne kun paa de løsere Skifere, saasom: Chamæorchis alpina, Carex pedata, C. capitata, C. microglochin, Elyna spicata, Oxytropis lapponica, Astragalus oroboides, Peristylis albidus, Triticum violaceum, Primula scotica, Draba nivalis, medens andre optræde i langt større Masse end ellers paa Fjeldene, f. Ex. Salix myrsinites, S. reticulata, Dryas og Carex rupestris.

Fortegnelse over de ved Ranenfjorden og paa Øerne udenfor den bemærkede Arter med Angivelse af deres Udbredelse.

Characeæ

(bestemte af Dr. Nordstedt).

Chara fragilis Desv. (f. macroptila macrostephana). Korgen, Tombø.

Nitella opaca Ag. *longifolia*. Korgen.

N. Normaniana Nordst. Paa lerede ved Flodtid oversvømmede Ører ved Udløbet af Røsaaen og ved Præstengen i Hemnæs. Et Individ fra sidstnævnte Sted danner ligesom en Overgang til N. nidifica.

Musci frondosi.[1]

(Alle Arter, om hvem det Modsatte ei udtrykkelig bemærkes, ere fundne i Frugt.)

Gymnostomum rupestre Schwægr. Handnesøen.

G. curvirostrum Hedw. Ei sjelden fra Øerne ind til den øvre Del af Dunderlandsdalen.

Anoectangium compactum Schwægr. Hist og her: Dønø, Huglø, Lygtø, Nesne, Hemnæs ved Ramflaa.

Weissia viridula Brid. (*forma gymnostoma*). Vesterfjeld i Dunderlandsdalen.

W. fugax Hedw. (*forma integrifolia*). Hist og her, saavel ude ved Havet (Tombø, Nesne), som i det Indre (Dunderlandsdalen). I Lerskardalen næsten op til Birkegrændsen. *F. subintegrifolia* paa Mofjeld.

W. Schisti Brid. Ytreheien i Mo.

W. crispula Hedw. Alm. baade i de lavere Egne og paa Fjeldene, baade ved Kysten og i det Indre.

Cynodontium gracilescens Schpr. Lerskardalen. Mo.

[1] Lector J. E. Zetterstedt har velvilligen controlleret mine Bestemmelser af Løvmoserne, hvorfor jeg herved aflægger ham min hjerteligste Tak.

Cynodontium polycarpum Schpr. Dønø. Lygtø. Tombø. Selforsfjeld.

C. virens Schpr. Under flere Former (*α primarium, β serratum, γ Wahlenbergii*) alm. gjennem hele Ranen baade i de lavere Egne og paa Fjeldene.

Dichodontium pellucidum Schpr. (steril). Ei sjelden saavel i det Indre som paa Øerne.

Trematodon brevicollis Hornsch. Ved Birkegrændsen paa Bredikfjeld i Dunderlandsdalen paa forvitrede Skifere sammen med Anacalypta latifolia β.

T. ambiguus Hornsch. Børresteinli i Hemnæs. Nesne. Selfors ved Mo. Dunderlandsdalen.

Dicranella crispa Schpr. Mo. Lerskardalen.

D. Grevilleana Schpr. Mo. Otterbranden i Hemnæs.

D. squarrosa Schpr. (steril). Gjennem hele Ranen hist og her saavel i de lavere Egne som paa Fjeldene, hvor den overskrider Birkegrændsen.

D. cerviculata Schpr. Hist og her fra Øerne indtil Mo.

D. varia Schpr. Tombø. Lerskardalen.

D. rufescens Schpr. Ytterheien ovenfor Stennæsset i Mo. Lerskardalen.

D. subulata Schpr. Hugløø. Mo. Andfjeld Gaard. Bryggefjeld.

D. heteromalla Schpr. Lygtø.

Dicranum fulvellum Sm. Nesne.

D. Starkii Web. et Mohr. Hist og her fra Øerne ind i de indre Fjeldegne, baade i Lavlandene og paa Fjeldene til meget høit over Birkegrændsen.

D. falcatum Hedw. Handnesøen. Grønfjeld. Laupen. Vesterfjeld.

D. Blyttii Br. & Schpr. Gjennem hele Ranen saavel i Lavlandene som paa Fjeldene ei sjelden; den gaar høit over Birkegrændsen.

D. montanum Hedw. (steril). Nesne.

D. longifolium Hedw. Lygtø. Handnesø. Krogstrand. Sparsomt med Frugt.

D. albicans Br. & Schpr. (steril). Paa de høiere Fjelde over Vidiegrændsen, f. Ex. paa Andfjeld, Ørtfjeld, Grønfjeld og Tverfjeld.

Dicranum elongatum Schwægr. Tem. alm. gjennem hele Ranen saavel i Lavlandene som paa Fjeldene. Paa Ørtfjeld fandtes en Overgangsform til den Følgende.

D. fuscescens Turn. Ei sj. gjennem hele Ranen fra Søen til høit over Birkegrændsen.

ε *cirrhatum* (steril). Rødfjeld.

D. scoparium Hedw. Alm. ogsaa paa Fjeldene. Nærmer sig undertiden til Foregaaende.

β *subintegrifolium*. Lygtø.

D. robustum Bl. (ifølge Schimpers Bestemmelse). I Myren ved Strandjordet i Dunderlandsdalen, steril.

D. arcticum Schpr. (D. labradoricum Hartm. non Müll.). Neppe sjelden paa Fjeldene: Hugløfjeld, Handnesøen, Nesne, Skarhogen, Ørtfjeld, Jarfjeld, Silbojavre; fleresteds med Frugt.

D. Schraderi Schwægr. Neppe sjelden saavel paa Øerne som i det Indre, baade i de lavere Egne og paa Fjeldene.

Fissidens incurvus Schwægr. Hjertaas i Dunderlandsdalen.

F. osmundoides Hedw. (steril). Saavel paa Øerne som i det Indre; paa Fjeldene til meget høit over Birkegrændsen.

F. adiantoides Hedw. (steril). Fra Øerne ind til Mo.

Anodus Donnianus Br. & Schpr. Ei alm. paa Kalken, saasom paa Tombø, ved Hemnæs, paa Selforsfjeld og ved Dunderland.

Seligeria recurvata Br. & Schpr. β *brevifolia* Zett. in litt. Storlistranden og Hjertaas i Dunderlandsdalen.

Blindia acuta Br. & Schpr. Alm.

Pottia Heimii Schpr. Alm. paa Strandkanterne ude ved Havet.

Anacalypta latifolia Nees & Hornsch. β *pilifera*. Bredikfjeld paa Skiferne ved Birkegrændsen.

Didymodon rubellus Br. & Schpr. Alm. fra Øerne ind til de indre Dale.

Distichium capillaceum Br. et Schpr. Alm.

D. inclinatum Br. & Schpr. Hist og her gjennem hele Ranen, dels paa Strandkanter, dels og især paa Klipper, ofte sammen med Gymnostomum curvirostrum.

Ceratodon purpureus Brid. Alm.

Trichodon cylindricus Schpr. Lerskardalen. Tverelven, Storforshei, Storvolden o. fl. St. i Dunderlandsdalen.

Leptotrichum homomallum Schpr. Handnesøen. Lerskardalen. Mo. Dunderlandsdalen.

L. flexicaule Hampe. Fleresteds fra Øerne ind til Dunderlandsdalen, paa Lygtø med Frugt.

γ *longifolium*. Lerskardalen. Handnesø. Tombø. Huglø. Varieteten ei med Frugt.

L. glaucescens Hampe. Ei alm.: Lerskardalen. Ytterheien ved Mo. Langflaugdalen. Mellem Almeli og Dunderland. Kjerringfjeld.

Trichostomum rigidulum Sm. Vigholmen. Lerskardalen. Tombø. Huglø. Lygtø.

Desmatodon latifolius Schpr. I Vidiebeltet paa Vesterfjeld og Grønfjeld. Lygtø.

Barbula unguiculata Hedw. Huglø.

B. fallax Hedw. Mo.

B. tortuosa Web. & Mohr. Alm.

forma minor brevifolia. Mellem Dunderland og Almeli.

B. fragilis Wils. (steril). Lygtø.

B. subulata Brid. Tombø.

B. mucronifolia Schwægr. Lygtø.

B. aciphylla Br. & Schpr. (steril). Nesnefjeld. Vesterfjeld.

B. ruralis Hedw. Fra Øerne ind til Mo.

Grimmia apocarpa Hedw. Alm.

δ *alpicola*. Paa Fjeldene, f. Ex. i Lerskarbygden.

G. maritima Turn. Alm. paa Strandklipperne lige ind til Mo.

G. torquata Grev. (steril). Alm. fra Øerne til inderst i Dunderlandsdalen.

G. funalis Schpr. Syn. (G. spiralis Hook. et Tayl.) (steril). Huglø.

forma brevipila. Nesne.

G. elatior Br. & Schpr. (steril). Dunderland.

G. Donniana Sm. Tombø. Handnesø. Hammerø ved Nesne. Hemnæs (Bl.)

G. ovata Web. & Mohr. Handnesø. Brendberget ved Hemnæs. Tverfjeld. Mo. Tombø.

Grimmia unicolor Grev. (steril). Hugløø. Nesne. Mo.

Racomitrium patens Schpr. Paa Øerne og ved Nesne.

R. aciculare Brid. Alm. gjennem hele Ranen ogsaa paa Fjeldene.

R. sudeticum Br. & Schpr. Fra Øerne ind til Grændsefjeldene tem. alm.; den gaar meget høit over Birkegrændsen.

R. heterostichum Brid. cum *forma brevipila*. Fra Øerne ind til Lerskardalen og Mo.

R. fasciculare Brid. Fra Øerne til det Indre. Ogsaa paa Fjeldene.

R. microcarpum Brid. Som Foregaaende.

R. lanuginosum Brid. Alm.

R. canescens Brid. Fra Øerne til det Indre.

forma mutica (steril). Dunderland.

γ *ericoides*. Tombø.

Hedwigia ciliata Hedw. Fra Øerne ind til Mo.

Amphoridium lapponicum Schpr. Ei alm.: Ørtfjeld. Bredikfjeld. Ramflaa ved Hemnæs. Tverfjeld. Stiger op i Birkeregionen.

A. Mougeotii Schpr. (steril). Paa Øerne, ved Hemnæs og Mo.

Ulota Drummondii Brid. Paa Older og Birk fra Øerne ind til Mo.

U. Hutchinsiæ Schpr. Alm. paa Øerne og ved Nesne.

U. curvifolia Brid. Tombø. Hemnæs.

U. Bruchii Brid. Nesne.

U. phyllantha Brid. (steril). Alm. paa Strandklipperne ude ved Havet. Den gaar ind til Hemnæs. Den findes ogsaa, men sjelden, paa Træ.

Orthotrichum gymnostomum Bruch (steril). Paa Træstammer ovenfor Selfors i Mo.

O. Blyttii Schpr. (ifølge Schimpers egen Bestemmelse). Klipper ved Mo og Hemnæsberg.

O. affine Schrad. Brendberget ved Hemnæs.

O. alpestre Hornsch. Klipper ved Strandjordet i Dunderlandsdalen.

O. speciosum Nees v. Esenb. Mo. Hemnæs. Korgen. Lygtø.

Orthotrichum rupestre Schleich. Fra Øerne alm. indtil Hemnæs.

O. stramineum Hornsch. Træstammer ovenfor Selfors i Mo.

Tetraphis pellucida Hedw. I de lavere Egne fra Øerne ind til Mo tem. alm.

Tetrodontium repandum Schwgr. I Rifterne af Skiferklipper ved Birkegrændsen paa Tverfjeld, paa den mod Lerskarbotn vendende Side. Ny for Nordeuropa.

Encalypta commutata Nees. Bredikfjeld. Jarfjeld.

E. rhabdocarpa Schwgr. Ikke sjelden fra Øerne ind til Dunderlandsdalen.

E. ciliata Hedw. Tombø. Mo. Dunderlandsdalen.

E. apophysata Nees. Ved Dunderland og mellem dette Sted og Almelien samt paa Ørtfjeld lidt over Trægrændsen.

E. brevicolla Bruch. Randalsvolden i Dunderlandsdalen i Birkebeltet.

E. procera Bruch. Langflaugdalen i Mo. Lerskardalen ved Rovhelden.

E. streptocarpa Hedw. Fra Øerne ind til Dunderlandsdalen paa Kalk, overalt steril og derfor ei fuldstændig sikker. Maaske Foregaaende.

Schistostega osmundacea Web. & Mohr. Ved Foden af Mofjeld.

Dissodon splachnoides Grev. & Arn. Handnesøen. Lerskardalen. Fra Mo hist og her op igjennem hele Dunderlandsdalen, paa Ørtfjeld til meget høit over Birkegrændsen.

Tayloria serrata Schpr. Mofjeld.

β *tenuis*. Dønø. Præstengen i Hemnæs.

Tetraplodon angustatus Schpr. Nesnefjeld. Hammerø.

T. mnioides Schpr. Fjeldene i Lerskardalen og Dunderlandsdalen. Selforsfjeld ved Mo. Fra Birkeregionen til over Vidiegrændsen.

Splachnum sphæricum L. fil. Hist og her fra Øerne ind til Lerskardalen og Dunderlandsdalen. Den stiger fra Søen op i Vidieregionen.

S. vasculosum L. Hist og her fra Øerne ind til Lerskardalen og Mo.

Splachnum luteum L. Mofjeld. Vesteraali.

Funaria hygrometrica Hedw. Alm.

Leptobryum pyriforme Schpr. Paa Øerne og i Lerskardalen.

Webera polymorpha Schpr. Andfjeld. Bredik.

var. (nærmende sig til W. acuminata Schpr.). Huglø.

W. nutans Hedw. Alm. fra Øerne ind til det Øverste af Dunderlandsdalen.

W. cucullata Schpr. Huglø. Tverfjeld. Grønfjeld. Krogstrand. Nesne.

W. cruda Schpr. Fra Øerne ind til den inderste Del af Dunderlandsdalen.

W. annotina Schwægr. Bredik.

W. Ludwigii Schpr. Alm. paa Fjeldene til over Vidiegrændsen i Lerskardalen og Dunderlandsdalen. Paa Dugurmaalshaug i Lerskardalen fandtes en sort Form. Den gaar ned til Søen ved Mo.

W. pulchella Schpr. Mo: mellem Søen og Selfors ved Veien paa Grøftekanter.

W. albicans Schpr. Fra Øerne ind til Mo; saavel nede ved Søen som over Birkegrændsen paa Fjeldene. Med Frugt paa Tombø og paa Hugløfjeld.

Bryum arcticum Br. & Schpr. Tombø.

B. purpurascens Br. & Schpr. Mo. Krogstrand. Huglø.

B. pendulum Schpr. Roxlien ved Hemnæs (Bl. Herb.). Krogstrand. Nesne. Lerskardalen.

B. inclinatum Br. & Schpr. Lerskardalen.

B. lacustre Bland. Nesne.

B. bimum Schreb. Fra Øerne ind til Mo.

B. subrotundum Brid. Lygtø paa Stranden.

B. intermedium Brid. Mofjeld.

B. cirratum Hornsch. Tombø (med en mindre Form). Mo. Bredikfjeld.

B. pallescens Schlich. Fra Øerne lige ind til Fjeldene i det Indre.

B. alpinum L. (steril). Vigholmen. Lygtø.

B. argenteum L. (steril). Lygtø. Hemnæs.

B. pseudotriquetrum Schwægr. Fra Øerne ind til Mo.

Bryum pallens Sw. Fra Nesne til Fjeldene i det Indre.

B. Duvalii Voit.? Bredikfjeld (steril og usikker).

B. turbinatum Schwægr. (steril). Fjeldet ovenfor Krogstrand. Ørtfjeld.

B. roseum Schreb. (steril). Grønfjeld.

Anomobryum julaceum Schpr. (steril). Tverfjeld omtrent ved Birkegrændsen.

Zieria julacea Schpr. Fra Øerne og Nesne, hvor den fructificerede, ind til Lerskardalen og Mo.

Minum cuspidatum Hedw. (steril). Mo.

M. affine Bland. Fra Øerne ind til den øvre Del af Dunderlandsdalen, ved Nesne med Frugt.

M. insigne Mitt. (steril). Ramflaa ved Hemnæs.

M. hornum Dill. Øerne.

M. serratum Brid. Lygtø. Tombø. Selforsfjeld. Mellem Dunderland og Almeli.

M. orthorrhynchum (Brid.) Br. & Schpr. (steril). Dugurmaalshaug i Dunderlandsdalen. Hugløø.

M. lycopodioides Hartm. Fl. (steril). Tombø.

M. spinosum Schwgr. (steril). Handnesøen. Krogstrand i Dunderlandsdalen.

M. Blyttii Br. & Schpr. (steril). Jarfjeld.

M. cinclidioides Bl. (steril). Mo. Andfjeld.

M. punctatum L. Alm. fra Øerne ind i Dunderlandsdalen.

M. subglobosum Br. & Schpr. Hugløø.

M. hymenophylloides Hueb. (steril). Paa Kalkklipper (og Glimmerskifere?) ved Hemnæs, i Lerskardalen, ved Mo og fleresteds op igjennem Dunderlandsdalen til Krogstrand.

M. Hymenophyllum Br. & Schpr. (steril). Paa samme Localiteter som Foregaaende, men sjeldnere: Bryggefjeld ved Korgen; Fjeldet ovenfor Krogstrand.

Cinclidium stygium Sw. Strandjordet (c. fr.) Bjeldaanesfjeld og Selforsfjeld.

C. arcticum Br. & Schpr. Tombø (steril). I Lerskardalen (Bryggefjeld) og især i Dunderlandsdalen fra Mo ei sjelden lige op til Andfjeld og mangesteds med Frugt.

Cinclidium subrotundum Lindb. Ved Krogstrand, Elmeteig og Andfjeld Gaard i Dunderlandsdalen.

Amblyodon dealbatus Pal. Beauv. Brendberget i Hemnæs. Tombø.

Catoscopium nigritum Schpr. Fra Øerne hist og her ind til Dunderlandsdalen. Den stiger op i Vidiebeltet.

Meesia uliginosa Hedw. Ei sjelden fra Øerne ind til den øverste Del af Dunderlandsdalen og Lerskardalen.

γ *minor*. Vesterfjeld.

Paludella squarrosa Ehrh. Ved Hemnæs, i Lerskardalen og fra Mo op igjennem hele Dunderlandsdalen, hvor den fandtes med Frugt ved Hjertaas.

Aulacomnium palustre Schwægr. (steril). Alm.

δ *polycephalum*. Stennæset ved Mo.

A. turgidum Schwægr. (steril). I Vidieregionen paa Fjeldene i det Indre. Paa Lygtøen og ved Nesne næsten i Havets Niveau.

Bartramia ithyphylla Brid. Hist og her fra Øerne ind til Dunderlandsdalen.

B. pomiformis Hedw. Alm. fra Øerne til det Indre.

B. Oederi Sw. Paa Kalk fra Øerne ind til Dunderlands- og Lerskardalen, men ei almindelig.

Conostomum boreale Sw. Alm. paa Fjeldene fra Øerne ind til Dunderlands- og Lerskardalen.

Philonotis fontana Brid. Alm. gjennem hele Egnen.

γ *falcata* Brendberget. Børresteinli i Hemnæs.

Timmia bavarica Hessl. Fleresteds i Dunderlandsdalen, saasom mellem Strandjordet og Dunderland, ved Dunderland, paa Dugurmaalshaugen og ovenfor Krogstrand.

T. norvegica Zett. (steril). Ikke sjelden paa Kalken: Tombø; Lerskardalen; fra Mo mangesteds op igjennem Dunderlandsdalen til ovenfor Krogstrand.

T. austriaca Hedw. (steril). Dønø. Ovenfor Krogstrand.

Atrichum undulatum Pal. Beauv. Alm.

A. tenellum Br. & Schpr. Handnesøen (c. fr.) Mo. Rimeligvis fleresteds.

Oligotrichum hercynicum Lam. & DC. Fra Øerne, hvor den fandtes steril, ind til Mo og Lerskardalen; i de indre Egne fructificerende.

Pogonatum urnigerum Schpr. Almindelig gjennem hele Egnen.

P. alpinum Roehl. Fra Øerne ind til Dunderlandsdalen.

β *arcticum*. Bredik og Storlistranden i Dunderlandsdalen.

ε *simplex*. Ørtfjeld høit over Birkegrændsen.

Polytrichum septentrionale Hartm. Paa Høifeldene i Dunderlands- og Lerskardalen ei sjelden fra Vidiebeltet, men især i Lavbeltet. Den varierer betydelig i Størrelse.

P. gracile Menz. Nesne. Lygtø.

P. formosum Hedw. Krogstrand. Nesne.

P. piliferum Schreb. Fra Øerne ind til Lerskardalen.

P. juniperinum Hedw. Fra Øerne ind til Dunderlandsdalen. Overskrider Birkegrændsen.

P. strictum Menz. Dunderlandsdalen.

P. commune L. Alm.

β *cubicum* Lindb.? Tombø.

Fontinalis antipyretica L. (steril). Paa Øerne.

Neckera complanata Br. & Schpr. (steril). Ikke alm.: Lygtø, Hemnæs, Mo.

β *tenella*. Handnesøen.

Homalia trichomanoides Schpr. (steril). Fjelddalen i Lerskardalen.

Myurella julacea Br. & Schpr. Tem. alm.; med Frugt paa Bredikfjeld.

M. apiculata Schpr. (steril). Huglø. Handnesø. Nesne. Langflaugdalen, Selforsfjeld og paa Fjeldet ovenfor Krogstrand.

Leskea nervosa Myr. (steril). Ikke sjelden fra Øerne ind til Dunderlandsdalen i de lavere Egne.

Anomodon longifolius Hartm. (steril). Selforsfjeld ved Mo. Dunderlandsdalen.

A. viticulosus Hook. & Tayl. (steril). Noteret for Øerne, men usikker.

Pseudoleskea atrovirens Schpr. Ei sjelden fra Øerne ind i

Dunderlandsdalen; den overskrider Birkegrændsen og fructificerer fleresteds.

Pseudoleskea catenulata Br. & Schpr. (steril). Lygtø. Dønø. Nesne.

P. tectorum (Al. Br.) (steril). Mellem Dunderland og Almeli.

Heterocladium dimorphum Br. & Schpr. (steril). Kun bemærket paa Huglø,

Thuidium delicatulum Schpr. (steril). Noteret for Mo og Hemnæs.

T. abietinum Br. & Schpr. (steril). Alm. fra Øerne til det Indre.

T. Blandowii Schpr. (steril). Krogstrand. Hemnæs.

Pterigynandrum filiforme Hedw. Alm. i de lavere Egne baade paa Sten og Træ. Med Frugt paa Dønø, ved Hammerø og Brendberget.

Lescuræa striata Schpr. β *saxicola.* Lerskardalen.

Cylindrothecium concinnum Schpr. (steril). Øerne, saasom Lygtø, Tombø.

Climacium dendroides Web. & Mohr. (steril). Alm.

Pylaisia polyantha Schpr. Mo.

Isothecium myurum Brid. Lygtø og Tombø med Frugt. Lerskardalen.

Orthothecium intricatum Br. & Schpr. (steril). Ei sjelden paa Kalk og Skifer, saasom paa Tombø, Dønø, ved Hemnæs, i Lerskardalen, ved Mo og i Dunderlandsdalen fleresteds til ovenfor Krogstrand.

O. strictum Lz. (steril). Dunderlandsdalen mellem Ilhulbækken og Storlistranden.

O. rufescens Br. & Schpr. Tem. alm. paa Kalk gjennem hele Ranen fra Øerne til Krogstrand, som oftest steril.

O. chryseum Br. & Schpr. (steril). Paa Kalk og Glimmerskifere paa Bryggefjeld ved Korgen, Selforsfjeld ved Mo, Ørtfjeld, Bredikelv og ovenfor Krogstrand i Dunderlandsdalen.

Homalothecium sericeum Br. & Schpr. (steril). Tem. alm. fra Øerne ind til det Indre.

Ptychodium plicatum Schpr. Tem. alm. fra Øerne og Nesne ind til Hemnæs, Lerskardalen og Dunderlandsdalen, hist og her med Frugt.

Camptothecium nitens Schpr. (steril). Fra Øerne ind til Hemnæs, Lerskar- og Dunderlandsdalen, men ei alm., paa Ørtfjeld høit over Birkegrændsen.

Brachythecium salebrosum Schpr. (steril). Nesne.
var. Bredikfjeld.

B. glareosum Br. & Schpr. (steril). Dønø, Korgen og paa Tverfjeld.

B. albicans Schpr. (steril). Huglø. Tombø.

B. reflexum Br. & Schpr. Alm. fra Øerne ind til Krogstrand.

B. glaciale Br. & Schpr. (steril). Huglø, Tverfjeld og Bredikfjeld.

B. rutabulum Br. & Schpr. (steril). Alm. fra Øerne ind til Krogstrand.

B. rivulare Br. & Schpr. (steril). Mo. Korgen.

B. populeum Schpr. Tombø. Brendberget.

B. plumosum Schpr. Dønø. Tombø.

Eurhynchium myosuroides Schpr. (steril). Kun bemærket paa Lygtø.

Thamnium alopecurum Schpr. (steril). Dønø mellem Gjæsfjorden og Bergsfjordvand.

Plagiothecium lætum Schpr. Dunderlandsdalen. Ørtfjeld. Korgen.

P. piliferum Br. & Schpr. (steril). Selforsfjeld. Hemnæs.

P. pulchellum Schpr. Dønø. Lygtø. Dunderlandsdalen op til Andfjeld.

P. nitidulum Br. & Schpr. Andfjeld. Krogstrand. Tombø. Lygtø. Nesne. Otterbranden ved Hemnæs. Lerskardalen.

P. Mühlenbeckii Schpr. Alm. især ude ved Havet lige ind til Dunderlandsdalens øvre Del.

P. denticulatum Schpr. Dunderlandsdalen.
var. Nesne.

P. silvaticum Schpr. Tem. alm. fra Øerne ind til Dunderlandsdalen.

Plagiothecium undulatum Br. & Schpr. Paa Øerne med Frugt, ved Hemnæs, i Lerskardalen og paa Mofjeld. Hyppigst ude ved Havet.

Amblystegium Sprucei Br. & Schpr. Grønfjeld, Bredik og Lygtø.

A. serpens Schpr. Dønø.

Hypnum Halleri L. fil. Paa Kalk alm. saavel paa Øerne som i de indre Dele.

H. chrysophyllum Brid. (steril). Otterbranden ved Hemnæs. Tombø.

var. minor. Bredik.

H. stellatum Schreb. (steril). Fra Øerne ind til Mo.

En *spædere Form* i Børresteinli ved Hemnæs.

H. polygamum Schpr. Paa Øerne. Ny for Norge.

H. exannulatum Gümb. Alm. gjennem hele Ranen ogsaa paa Fjeldene.

β *latifolium* Zett. in litt. Tverfjeld.

H. vernicosum Lindb. (H. pellucidum Wils.) (steril). Krogstrand. Mo.

H. sulcatum Schpr. (steril). Krogstrand.

H. uncinatum Hedw. Alm. fra Øerne til det Indre.

H. revolvens Sw. Neppe sjelden fra Øerne ind til Mo; paa Tombø med Overgangsformer til den Følgende.

H. intermedium Lindb. Fra Øerne ind til Dunderlandsdalen.

H. falcatum Brid. (H. commutatum Hedw. β falcatum Schpr.) Fra Øerne ind til Korgen og Dunderlandsdalen, fleresteds med Frugt.

H. filicinum L. (steril). Alm. paa Øerne, ved Nesne og Korgen.

H. rugosum Ehrh. (steril). Alm.

H. fastigiatum Brid. Tem. alm. paa Kalkklipperne i Dunderlandsdalen.

H. hamulosum Br. & Schpr. Paa Øerne, saasom paa Tombø, Handnesø og Lygtø.

H. Sauteri Br. & Schpr. Tombø paa Kalkklipper mellem Huseby og Tombsvigen. Ny for Norge!

H. callichroum Brid. (steril). Øerne, saasom Handnesø, Lygtø og Huglø.

Hypnum Bambergeri Schpr. (steril). Nesne. Hammerø.

H. cupressiforme L. (steril). Alm. især ude ved Havet. Den gaar ind til Lerskardalen.

H. Heufleri Jur. (steril). Skarhogen i Lerskardalen paa Klipper nær Toppen, høit over Birkegrændsen.

H. Lindbergii (steril). Lygtø. Ørtfjeld.

H. molluscum Hedw. (steril). Fra Øerne ind til Mo paa Kalk. En Varietet paa Tombø.

H. Crista-castrensis L. Alm.

H. palustre L. Ikke sjelden. Dønø. Nesne. Lerskardalen. Mo. Dunderlandsdalen. Ogsaa paa Fjeldene.

H. alpestre Sw. Tombø. Handnesø. Korgen. Vesterfjeld og Messingaaen i Dunderlandsdalen.

H. arcticum Somf. Hugløfjeld. Hemnæs. Lerskardalen. Dunderlandsdalen. Den overskrider Birkegrændsen.

H. ochraceum (Turn.) Wils. (steril). Bryggefjeld ved Korgen, Messingaaen og paa Ørtfjeld i en Bæk nær Snegrændsen.

H. cordifolium Hedw. (steril). Mo. Nesne.

H. giganteum Schpr. (steril). Lygtø. Tombø. Strandjordet og over Birkegrændsen paa Kjærringfjeld i Dunderlandsdalen.

H. sarmentosum Wg. Neppe sjelden fra Øerne til det Indre.

H. cuspidatum L. (steril). Paa Øerne.

H. Schreberi Willd. (steril). Alm. fra Øerne ind til Mo.

H. stramineum Dicks. Ei sjelden fra Øerne ind til Krogstrand.

H. trifarium Web. & Mohr. (steril). Huglø i Havets Niveau. Fjeldene i Lerskardalen i Vidieregionen.

H. turgescens Schpr. (steril). Fugtige Kalkklipper paa Lygtøen mellem Kobberdal og Sandager.

H. badium Hartm. Ikke sjelden: Tombø. Hugløfjeld. Nesne (c. fr.). Otterbranden ved Hemnæs. Grønfjeld o. fl. St. i Lerskardalen. Dunderlandsdalen mangesteds op til Andfjeld. Den stiger fra Søen op i Vidiebeltet.

H. scorpioides Dill. (steril). Fra Øerne ind til Mo. Den gaar op i Vidiebeltet.

Hylocomium splendens Schpr. Alm.

H. umbratum Ehrh. (steril). Mofjeld. Ørtfjeld og Messingen i Dunderlandsdalen.

H. Oakesii Sull. (steril). Tem. alm. fra Øerne ind i Dunderlandsdalen. Den overskrider Vidiegrændsen.

H. squarrosum Schpr. (steril). Alm. fra Øerne til det Indre.

H. triquetrum Schpr. Alm.

H. loreum Schpr. Alm. især ude ved Havet. Den gaar ind til Korgen og Mo.

Andreæa petrophila Ehrh. Alm. fra Øerne til over Vidiegrændsen paa Andfjeld.

A. alpestris Schpr. Fjeldene i Lerskardalen og Dunderlandsdalen.

A. obovata Thed. Fjeldene i Lerskardalen og Dunderlandsdalen til meget høit over Birkegrændsen.

A. Hartmani Thed. Ørtfjeld.

A. alpina Turn. Nesne.

A. rupestris Schpr. Dønø.

A. Blyttii Schpr. Fjeldene i Lerskar- og Dunderlandsdalen. En udmærket Hanform med kloagtig krummede Blade fandtes ved Rigsgrændsen paa Nasa over Vidiegrændsen.

Sphagna.

Ingen Sphagnum fandtes med Frugt.

Sphagnum acutifolium Ehrh. Alm. fra Øerne til det Indre.

S. fimbriatum Wils. Fra Øerne ind til Mo.

S. cuspidatum Ehrh. Dunderlandsdalen. Tombø.

S. squarrosum Pers. Tombø.

S. rigidum Schpr. Fra Øerne ind til det Indre.

S. Lindbergii Schpr. Handnesøen. Kjærringfjeld i Dunderlandsdalen. Hemnæs.

S. molluscum Bruch. Tombø. Handnesø. Lygtø. Præstengen og Brendberget ved Hemnæs.

S. subsecundum Nees & Hornsch. Handnesø. Dugurmaalshaug i Lerskardalen.

Sphagnum cymbifolium Dill. Alm. fra Øerne ind til Mo.

S. auriculatum Schpr. Handnesø. Tombø.

Equisetaceæ.

Equisetum arvense L. Alm. i Gran- og Birkebeltet; undertiden som β *alpestre* lige op i Lavbeltet.

E. pratense Ehrh. Paa Øerne.

E. silvaticum L. Alm. til op i Vidiebeltet, undertiden næsten til Vidiegrændsen.

E. palustre L. Alm. i Granregionen.

E. fluviatile L. Paa Øerne, ved Mo og i Dunderlandsdalen. Kun i Granregionen.

β *limosum*. Alm.; Overgangsformer til Hovedarten observeredes.

E. hiemale L. Alstenø og Ranen (Bl.) Dunderland. Almelien. Jarfjeld til op i Vidieregionen.

E. variegatum Schleich. Ei sjelden fra Øerne ind til Grændsefjeldene. Fra Søen op i Lavbeltet.

E. scirpoides Mich. Alstenø (Bl.) Lerskardalen, Mo og Dunderlandsdalen fra Granregionen op i Lavbeltet.

Filices.

Polypodium vulgare L. Øerne. Nesne. Mo. Kun i de lavere Egne, sjelden i det Indre.

P. Phegopteris L. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet.

P. rhæticum L. Alm. paa Fjeldene fra de øvre Birkelier til op i Lavbeltet.

P. Dryopteris L. Alm. i det Mindste til op i Birkebeltet.

P. Robertianum Hoffm. Paa Kalk i Granregionen: Brendberget; Selforsfjeld; mellem Dunderland og Strandjordet.

Woodsia ilvensis R. Br. Øerne, Hemnæs og Mo i Granbeltet.

W. hyperborea R. Br. I Gran- og Birkebeltet fra Øerne ind til Dunderlandsdalen ikke sjelden.

Aspidium Lonchitis Sw. Fra Øerne ind til Mo ei sjelden, især paa Kalk. Gaar op næsten til Birkegrændsen.

Polystichum Filix mas Roth. Tem. alm. til op i Birkebeltet.

P. spinulosum DC. Alm. i de to nedre Regioner.

β dilatatum.

Cystopteris fragilis Bernh. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet.

C. montana Bernh. Nesne i Birkebeltets øvre Del. Ved Korgen fra Granregionen til op i Vidieregionen paa Bryggefjeld. Dunderlandsdalen fleresteds fra Granbeltet til op i Vidiebeltet.

Asplenium Filix femina Bernh. Alm.; den forsvinder ne[illegible]for Birkegrændsen.

A. Trichomanes L. Alstenø (Bl.) Hammerø ved Nesne. Ytterheien ved Mo. I Birkebeltet ovenfor Dunderland.

A. viride Huds. Alm. paa Kalken, ogsaa paa Glimmerskiferne. Fra Søen op i Vidiebeltet, fra Øerne ind til Dunderlands- og Lerskardalen.

A. septentrionale L. Alstenø (Bl.)

A. Ruta muraria L. Sjelden paa Øerne, saasom paa Alstenø (Bl.) og ved Gjæsfjorden paa Dønø.

Pteris aquilina L. Sjelden i Granregionen: Alstenø (Bl.) Hammerø. Børresteinli. Ytterheien.

Blechnum Spicant Roth. Øerne. Hemnæs. Mo nede ved Søen. Gaar op i Birkeregionen. Ei bemærket paa Kalk.

Struthiopteris germanica Willd. Ved Nesne (ikke paa Øerne), Hemnæs, Korgen og Mo til op i Dunderlandsdalen. Den nærmer sig Birkegrændsen.

Allosurus crispus Bernh. Alstenø (Bl.) Hammerø nede ved Søen. Nesnefjeld. Ørtfjeld fleresteds i Birke- og Vidieregionen.

Botrychium Lunaria Sw. Øerne. Nesne. Mo. I Gran- og Birkebeltet.

B. boreale Milde. Alstenø (Bl.) Nesnefjeld. Bredik. Ørtfjeldgaardene. I Birkebeltet og den øverste Del af Granbeltet.

Ophioglossum vulgatum L. Alstenø (Bl.).

Lycopodiaceæ.

Lycopodium Selago L. Alm. fra Søen til Snegrændsen.

L. annotinum L. Alm. Som

β alpestre til op i Vidiebeltet.

Lycopodium alpinum L. Alm. paa Fjeldene til Snegrændsen. Stiger undertiden (saasom i Dunderlandsdalen) ned i Granregionen.

L. complanatum L. Dunderlandsdalen ved Vesteraali, Stilvasaaen og Dunderland. Høinesset i Ranen (Bl.) Kun i Granbeltet.

L. clavatum L. Øerne. Mo. Gaar fra Søen op i Vidiebeltet.

β *lagopus*. Nesnefjeld. Bjeldaanesfjeld.

Selaginella spinulosa Al. Br. Alm. Fra Søen op i Vidiebeltet, undertiden til Vidiegrændsen.

Gramineæ.

Alopecurus geniculatus L. Alm. i Granregionen.

A. fulvus Sw. Korgen. Rufsvold i Dunderlandsdalen; beggesteds langt nedenfor Granens Grændse.

Phleum pratense L. Alstenø (Bl.) Mo nede ved Søen.

P. alpinum L. Alstenø (Bl.) Ved Hemnæs, Korgen og i Mo fra Granregionen op i Vidiebeltet.

Phalaris arundinacea L. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet.

Hierochloa borealis R. S. Øerne. Lerskardalen. Alm. i Mo. Fra Søen op i Vidieregionen og if. Arnell lige op i Lavbeltet.

Anthoxanthum odoratum L. Alm. i alle fire Regioner.

Milium effusum L. Alm. fra Søen op til Birkegrændsen.

Catabrosa aquatica Pal. Beauv. Øerne. Hemnæs. Mo nede ved Søen. Kun i Granbeltet.

C. algida Fr. Alm. paa Høifjeldene i Lerskardalen og Dunderlandsdalen, især i Lavbeltet, men ogsaa i Vidieregionen. Paa Andfjeld gaar den ned lige til Birkegrændsen.

Agrostis vulgaris With. Alm. i Granbeltet og rimeligvis ogsaa noget høiere op.

A. alba L. Øerne. Hemnæs. Mo. Paa Strandkanterne.

A. canina L. Alstenø (Bl.) Nesne. Hemnæs.

β *mutica*. Tverfjeld ved Birkegrændsen.

A. rubra L. Paa Fjeldene i Lerskardalen og Dunderlandsdalen, hvor den ved Storli, Messingsæter o. fl. St. gaar lige ned i Dalbunden (Granregionen). Stiger op i Lavbeltet.

Calamagrostis chalybæa Fr. Herb. norm. Fasc. XV n. 93. Alm. i Skovene ved Korgen og hist og her op igjennem Lerskardalen til Foden af Tverfjeld. Paa Bryggefjeld og Grønfjeld gaar den op i Birkeregionen. Den er ny for Norges Flora!

Beskrivelse: *Roden* noget krybende, udsendende 1—flere Straa. *Straaene* 3—5' høie, 3-knudede, nedenfor Toppen rue, forøvrig jevne, ved Grunden lidt opstigende, siden rankt oprette, *ugrenede* (eller med en lang slapt hængende blomsterbærende Gren fra det øvre Bladhjørne). *Bladene* flade, 3''' brede, rue; *Skederne* kortere end Ledstykkerne, næsten jevne; *Skedehinderne* middels lange. *Toppen* 3—6' lang, ægformet aflang, ikke mellembrudt, opret eller oventil lidt slap, i yngre Tilstand rød- og gulspraglet. *Topstilken* især oventil ru; *Topgrenene* fler- (omtr. 6-) koblede, stærkt rue, under Blomstringen *retvinklet* udsperrede, senere (og i tørret Tilstand) opret sammenknebne. *Bægerbælgklapperne* lidt ulige store, mørkt purpurrøde, oventil i Kanterne gulagtige, efter Blomstringen lukkede, *kort*spidsede, paa Ryggen rue. *Kronbælgen* urteagtig, i Toppen hindeagtig, kortere end Bægerbælgklapperne, *noget længere* end Haarene, med en *nær Grunden fæstet knæbøiet* Stak, der omtrent er *af Kronbælgens Længde* eller lidt længere.

C. Epigeios Roth. Ei sjelden fra Øerne ind til Mo i Granregionen.

C. stricta Hartm. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet, undertiden til Vidiegrændsen.

C. Pseudophragmites (Link.) Rchb. Bl. N. Fl. p. 89. Alm. fra Søen lige op i Lavbeltet, hvor den dog blot bemærkedes steril, men undertiden i Mængde. En Varietet, som nærmer sig C. lanceolata, ved Hemnæs. En bredbladet Varietet (mer rigblomstret, men forresten aldeles lig Fr. Herb. norm. Fasc. XIV n. 90) paa Bryggefjeld i Birkebeltet.

Phragmites communis Trin. Nesne.

Aira cæspitosa L. Alm. fra Søen næsten op til Vidiegrændsen.

β *ochroleuca*. Hyppig i Dunderlandsdalen i de lavere Egne.

A. alpina L. I Vidieregionen og Lavbeltet ei sjelden fra Øerne

(Alstenø (Bl.) og Handnesø) ind til Dunderlands- og Lerskardalen. Ved Krogstrand ned til Elven (800′).

Aira flexuosa L. Alm.; paa Øerne og Fjeldene som

β *montana*, der stiger op til og stundom over Vidiegrændsen.

Vahlodea atropurpurea Fr. Fra den øvre Del af Birkeregionen op i Lavbeltet paa Fjeldene i Dunderlandsdalen.

β *pallida*. Med bleggrøn Top. Birkelierne paa Nasa.

Trisetum subspicatum Pal. Beauv. I Birke-, Vidie- og Lavbeltet paa Fjeldene i Lerskar- og Dunderlandsdalen, især paa de løsere Glimmerskifere fra Birkegrændsen af. Ved Foden af Tverfjeld lige ned i Dalen (500′). Alstenø (Bl.)

Avena elatior L. Alstenø (Bl.). Huglø. Vigholmen. Børresteinli ved Hemnæs. Kun nede ved Søen.

A. pubescens L. I de lavere Egne paa Øerne og ved Nesne.

A. pratensis L. Alstenø (Bl.)

Poa annua L. Alm. til Birkegrændsen.

P. laxa Hænke. I Vidie- og Lavbeltet paa Fjeldene i Lerskardalen.

P. alpina L. Alm. fra Søen lige op i Lavbeltet.

β *vivipara*. Fjeldene i Dunderlands- og Lerskardalen; fra Birkebeltet op i Lavbeltet.

P. trivialis L. Alm. i Granregionen.

P. nemoralis Wg. Med flere Varieteter alm. fra Søen op i Vidiebeltet.

P. cæsia Hartm. Fl. Tem. alm. fra Søen op i Vidiebeltet.

P. pratensis L. Med flere Varieteter alm. fra Søen lige op i Lavbeltet.

P. hybrida Gaud. Sj. i Granregionen: Korgen i Skoven ved Røsaaen og under Bryggefjeld. Under Mofjeld. Krogstrand (800′). Allerede noteret for Ranen af Bl.

Glyceria maritima Wahlbg. Alm. paa Strandkanterne.

G. distans Wahlenb. Tombø. En liden Form.

Melica nutans L. Alm. fra Søen til Birkegrændsen.

Molinia cærulea Mønch. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet.

Dactylis glomerata L. Øerne.

Festuca ovina L. Alm. (paa Øerne især som β) fra Søen lige op i Lavbeltet.

β *vivipara*. Især paa Øerne og Fjeldene.

F. rubra L. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet.

forma inter F. duriusculam et rubram intermedia. Stennæset i Mo.

F. elatior L. (F. pratensis Huds.) Alstenø (Bl.) Tombø.

Lolium linicola Sond. Ranen (Bl.)

Triticum repens L. Alm. i Granregionen.

T. violaceum Hornem. Ørnefjeld ved Nesne. Selforsfjeld ved Mo i Granens Region. I Vidiebeltet paa Ørtfjeld og Dugurmaalshaug i Dunderlandsdalen. Tverfjeld fra Dalbunden (500′) til over Birkegrændsen. Kun paa Skifere.

T. caninum Schreb. Alm. i Gran- og Birkebeltet, næsten til Birkegrændsen.

Elymus arenarius L. Paa Strandkanterne paa Øerne, ved Hemnæs og Mo.

Nardus stricta L. Alm. fra Søen lige op i Lavbeltet.

Cyperaceæ.

Carex dioica L. Alm. i Gran- og Birkebeltet.

C. parallela Somf. Tverfjeld ved Birkegrændsen. Bjeldaanesfjeld fra Birkeregionens øvre Del op i Vidiebeltet.

C. pulicaris L. Ei alm.: Alstenø (Bl.) Tombø. Hugløtil øverst i Birkelierne. Handnesø. Nesne. Hemnæsberg.

C. capitata L. I Vidieregionen paa Skiferfjeldene i Dunderlandsdalen: Dugurmaalshaugen, Rødfjeld, Andfjeld; paa Nasa over Vidiegrændsen.

C. pauciflora Lightf. Alm. i Gran- og Birkebeltet.

C. microglochin Wg. Rødfjeld paa Skifere i Vidiebeltet; Tverfjeld fra Bunden af Dalen (500′) og Skarhogen, beggesteds paa Skifere til lidt over Birkegrændsen.

C. rupestris All. Alm. paa Kalk og Skifere. Paa Øerne gaar den lige ned til Søen. Den stiger lige op i Lavbeltet.

C. chordorrhiza Ehrh. Tem. alm. fra Søen lige op i Vidiebeltet.

Carex incurva Lightf. Alm. paa Strandkanterne, især i Mængde ude ved Havet. I Mo til flere hundrede Fod over Søen.

C. Deinbolliana Gay. Paa Strandkanterne sj.: Alstenø (Bl.) Osstranden paa Tombø. Vigholmen.

C. microstachya Ehrh. Roxlien ved Hemnæs over Grangrændsen (β *humilis* Bl.) Ved Elven under Andfjeld (1000'). Vesteraali (400' *forma macra*).

C. helvola Bl. Dunderlandsdalen: i Vidiebeltet mellem Kjærringfjeld og Messingen, Elvebredden ved Krogstrand. Lerskardalen: alm. i Vidiebeltet paa Fjeldene; under Skarhogen lige ned til Elven (500').

C. paradoxa Willd. Stormyren paa Tombø. Hugløø.

C. lagopina Wg. Alm. paa Fjeldene i Vidie- og Lavbeltet. Den gaar lige ud til Nesne og Huglø og findes undertiden langt nede i Birkeregionen.

β *gracilescens* Th. Fr. paa Bredikfjeld.

C. norvegica Willd. Strandkanter: Tombsvigen paa Tombø. Refsnes ved Nesne. Otterbranden ved Hemnæs.

C. glareosa Wg. Strandkanterne paa Øerne og ved Nesne.

C. leporina L. Ei sj. i Granregionen fra Huglø ind til Mo.

C. festiva Dew. Nævermohei i Dunderlandsdalen paa Engene ved Elven (1—200').

C. stellulata Good. Alm. i Gran- og Birkebeltet.

C. Personii Sieb. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet.

C. canescens L. Alm. i Gran- og Birkebeltet, undertiden næsten til Vidiegrændsen.

C. loliacea L. I Lerskardalen, ved Mo og i Dunderlandsdalen hist og her i Gran- og Birkebeltet.

C. rufina Dr. I Vidiebeltets øvre Del nær Toppen af Skarhogen i Lerskardalen.

C. alpina Sw. Alm. ofte lige ned til Søen. Den stiger op i Lavbeltet.

C. Buxbaumii Wg. *alpicola.* Tem. alm. fra Øerne, men især i Birkebeltet og Vidiebeltets nedre Del paa Fjeldene i Lerskar- og Dunderlandsdalen. Den gaar fleresteds lige ned til Søen.

β *heterostachya.* Tverfjeld.

Carex atrata L. Alm. i Birke- og Vidiebeltet, undertiden til Vidiegrændsen. Fleresteds næsten ned til Søen.

β *rectiuscula.* Bredikfjeld i Birkebeltet.

C. rigida Good.[1] Alm. fra Birkebeltet op i Lavbeltet. Paa Dønø ned til Søen. Meget variabel.

C. hyperborea Dr. Mellem Dugurmaalshaugen og Jarfjeld i Dunderlandsdalen noget over Birkegrændsen.

C. pulla Good. Tem. alm. paa Fjeldene i Lerskar- og Dunderlandsdalen. Fra Birkeregionen op i Lavbeltet. Ved Dunderland og Vesteraali ned i Granbeltet.

C. vulgaris Fr. Alm. i Gran- og Birkebeltet til Birkegrændsen.

C. juncella Th. Fr. Tem. alm. fra Øerne til det Indre. Ogsaa paa Fjeldene, men neppe over Birkegrændsen.

C. limula Fr. Tombø. Vesteraali. I Granbeltet.

C. salina Wg. Paa Øerne og ved Nesne.

β *hæmatolepis* (Dr.) ved Nesne.

C. subspathacea (Wormskj.) Lygtø ved Horn. Tombø ved Osstranden.

C. aquatilis Wg. Stormdalen og Krogstrand i Birkebeltet ved Elven.

C. borealis Lang. En ved Elvebredden ved Krogstrand funden Form synes at høre herhen.

C. maritima Müll. Handnesø. Nesne. Præstengen ved Hemnæs.

C. pilulifera L. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet.

C. flava L. Alm. i Gran- og Birkebeltet.

C. Oederi Ehrh. Alm. i Granbeltet.

C. fulva Good. Øerne. Nesne. I de lavere Egne.

C. vaginata Tausch. Alm. fra Søen op i Lavbeltet.

C. panicea L. Alm. i Gran- og Birkebeltet.

C. pallescens L. Alm. i Gran- og Birkebeltet.

C. limosa L. Alm. i Gran- og Birkebeltet.

C. irrigua (Sw.) Hoppe. Alm. i Gran- og Birkebeltet.

C. rariflora Sw. I Birke- og Vidiebeltet ei almindelig: Bjeld-

[1] Af Carices distigmaticæ haves flere vakre Former, som jeg ved en anden Leilighed maaske skal beskrive.

aanesfjeld, Burek paa Nasa, Grønfjeld. Elvebredden ved Krogstrand (800′).

Carex ustulata Wg. Fra Dønø og Nesne ikke sj. i Birke- og Vidiebeltet ind til Grændsen. Ved Messingsæter i Dunderlandsdalen ned til Elven (400′), ligesaa ned til 6—800′ ved Foden af Tverfjeld.

C. capillaris L. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet, undertiden til Vidiegrændsen.

C. ornithopoda Wilid. Tem. alm. paa Kalken og Skiferne paa Øerne, ved Mo og i Dunderlandsdalen. I Gran- og Birkeregionen; ovenfor Dunderland næsten til Birkegrændsen; paa Bjeldaanesfjeld endog over den.

C. digitata L. Hist og her paa Kalk i Granbeltet fra Øerne ind i Dunderlandsdalen.

C. pedata (L.) Wg. I Vidie- og Lavbeltet paa Skiferfjeldene ei almindelig: Handnesø. Ørnefjeld og Nesnefjeld ved Nesne. Dugurmaalshaugen, Messingen, Rødfjeld og Bjeldaanesfjeld i Dunderlandsdalen.

C. filiformis L. Ei sj. i Gran- og Birkebeltet fra Øerne ind i Dunderlandsdalen.

C. glauca Scop. var. (C. stylosa Hartm. Fl.) Øerne.

C. vesicaria L. I Korgen og Mo i Gran- og Birkebeltet.

β *alpigena*. Ørtfjeld i Granskoven.

γ *brachystachya* Bl. Tverfjeld.

C. ampullacea Good. Alm. i Gran- og Birkebeltet.

Elyna spicata Schrad. I Vidie- og Lavbeltet paa Skiferfjeldene ei alm.: Handnesø. Ørnefjeld og Nesnefjeld. Bredikfjeld. Bjeldaanesfjeld. I Lerskardalen paa Dugurmaalshaugen, Skarhogen og Tverfjeld, paa sidste Sted lige ned i Dalbunden (500′).

Blysmus rufus Link. Fra Øerne ind til Mo, men kun nede ved Søen.

Scirpus pauciflorus Lightf. Tem. alm. i Granbeltet.

S. cæspitosus L. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet.

Heleocharis palustris R. Br. Fra Øerne ind til Mo. I Granbeltet.

Heleocharis uniglumis Koch. Fra Øerne ind til Mo, men kun nede ved Søen.

H. acicularis R. Br. Korgen.

Eriophorum alpinum L. Tem. alm. i Gran- og Birkebeltet.

E. vaginatum L. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet.

E. callithrix Cham. Krogstrand i fugtige Lier nede i Dalen.

E. capitatum Host. Fra Nesne ind til Lerskar- og Dunderlandsdalen især i Birke-, Vidie- og Lavbeltet; undertiden, f. Ex. i Dunderlandsdalen og ved Korgen, lige ned i Granskovene i Dalbunden.

E. angustifolium Roth. Alm. fra Søen næsten op til Vidiegrændsen.

E. latifolium Hoppe. Tem. alm. fra Øerne lige ind til Foden af Andfjeld i Dunderlandsdalen. Gaar omtrent op til Granens Grændse.

Alismaceæ.

Triglochin maritimum L. Fra Øerne ind til Mo paa Strandkanterne.

T. palustre L. Alm. i Gran- og Birkebeltet.

Scheuchzeria palustris L. Strandjordet og Bjeldaanes i Dunderlandsdalen.

Juncaceæ.

Juncus conglomeratus L. Øerne. Nesne.

J. balticus Willd. Øerne. Nesne.

J. filiformis L. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet.

J. castaneus Sw. I Birke- og Vidiebeltet paa Fjeldene i Lerskardalen. Ved Foden af Tverfjeld lige ned i Dalbunden (500'). Alstenø (Bl.)

J. triglumis L. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet.

J. biglumis L. Fra Birkebeltet op i Lavbeltet paa Fjeldene. saavel ude ved Havet (Huglø, Handnesø) som især i det Indre. Alstenø ned til Søen (Bl.)

J. trifidus L. Alm. fra Søen op i Lavbeltet.

Juncus articulatus L. Alm. i Gran- og Birkebeltet.

J. alpinus Vill. Fra Øerne ind til Lerskardalen. Ei bemærket over Grangrændsen.

J. supinus Moench. Alstenø (Bl. β fluitans). Korgen. Dunderlandsdalen.

J. bulbosus L. β *littoralis* Wg. Fra Øerne ind til Hemnæs paa Strandkanterne.

J. buffonius L. Alm. i Granbeltet fra Øerne ind til Mo.

Luzula pilosa Willd. Alm. fra Søen til høit op i Birkelierne.

L. parviflora Desv. Alstenø og Lerskardalen (if. Bl.) Mangler i hans Herb. fra disse Steder.

L. Wahlenbergii Rupr. Paa Hugløfjeld høit over Birkegrændsen. Mangesteds paa Fjeldene i Lerskar- og Dunderlandsdalen fra Birkebeltet op i Lavbeltet.

L. campestris DC. et β *multiflora*. Alm. fra Søen op til Vidiegrændsen.

L. hyperborea R. Br. (if. Bl. N. Fl. L. arcuata confusa Hartm.) I den øvre Del af Vidiebeltet og i Lavbeltet paa Fjeldene i Lerskar- og Dunderlandsdalen. Paa Andfjeld næsten ned til Birkegrændsen.

L. arcuata Hook. Som Foregaaende.

L. spicata Desv. Alm. fra Søen op i Lavbeltet.

Narthecium Ossifragum Huds. Paa Øerne og ved Hemnæs i Gran- og Birkebeltet.

Melanthaceæ.

Tofieldia borealis Wg. Tem. alm. fra Søen op i Lavbeltet.

Liliaceæ.

Allium oleraceum L. Alstenø (Bl.) Finkona. Vigholmen. Brendberget. Børresteinli. Kun i de laveste Egne.

Smilaceæ.

Paris quadrifolia L. I Granregionen ei alm. fra Øerne ind til Lerskardalen og Bredik i Dunderlandsdalen.

Convallaria verticillata L. Alm. fra Søen til og over Birkegrændsen.

C. majalis L. Øerne.

Majanthemum bifolium DC. Ved Hemnæs og Mo i Granbeltet.

Orchideæ.

Corallorrhiza innata R. Br. I Gran- og Birkebeltet i Mo. Alstenø, Tvervandet og Lerskardalen (Bl.)

Orchis mascula L. Alstenø (Bl.) I Enerkrat paa Kalk mellem Kobberdal og Sandager paa Lygtøen samt ved Bergsfjorden paa Dønøen.

O. incarnata L. (Bl. N. Fl.) Paa fugtige kalkholdige Steder fleresteds paa Øerne og ved Nesne, saavel med mørke- som lyserøde Blomster.

O. maculata L. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet.

Gymnadenia conopsea R. Br. Paa Kalk og Skifere paa Øerne, i Lerskar- og Dunderlandsdalen. Fra Søen stiger den op i Vidiebeltet. Var. med hvide Blomster.

Platanthera bifolia Rchb. Øerne. Mo. I Granbeltet.

Peristylis viridis Lindl. Paa Kalk og Skifer fra Øerne ind til Lerskar- og Dunderlandsdalen, hyppigst i Birke- og Vidieregionen, hvorfra den dog undertiden (f. Ex. paa Øerne) gaar lige ned til Søen.

P. albidus Lindl. Alstenø ned til Søen (Bl.) Hugløs. Nesne til over Birkegrændsen. I Birke- og Vidiebeltet paa Fjeldene i Lerskardalen og især i Dunderlandsdalen. Paa Skifere.

Chamærepes alpina Spr. I den øvre Del af Birkebeltet og i Vidieregionen ei sj. paa Skiferfjeldene: Nesnefjeld. Tverfjeld. I Dunderlandsdalen ovenfor Krogstrand, paa Dugurmaalshaugen, Rødfjeld, Messingen og Bjeldaanesfjeld.

Listera ovata R. Br. Tombø paa Kalk nær Huseby. Noteret for Alstenø og Ranen af Blytt.

L. cordata R. Br. Hist og her i Gran- og Birkebeltet fra Øerne ind til Lerskardalen og Dunderlandsdalen.

Epipactis atrorubens (Wg.) Paa Kalk hist og her paa Øerne, ved Brendberget nær Hemnæs og i Birkebeltet ved Dunderland.

Goodyera repens R. Br. Handnesøen.

Potameæ.

Potamogeton natans L. Øerne.

P. rufescens Schrad. Øerne? Korgen.

P. gramineus L. Færgestedet ved Dunderland. Rufsvold.

?*P. nitens* Web. Korgen.

P. marinus L. Ranen (Bl.) Øerne. Korgen.

P. pectinatus L. Alstenø og Ranen (Bl.)

Zanichellia polycarpa Nolte β *repens* Hartm. Præstengen ved Hemnæs og Røsaaens Udløb paa lerede ved Flodtid under Vand staaende Steder.

Zosteraceæ.

Zostera marina L. Øerne. Nesne. Ranen. (Bl.)

β *angustifolia*. Nesne.

Ruppia rostellata Koch. Nesne. Præstengen ved Hemnæs.

Lemnaceæ.

Lemna minor L. Alstenø (Bl.)

Typhaceæ.

Sparganium affine Schnizl. Alstenø og Ranen (Bl.? under Navn af S. natans). Huglø․ Otterbranden ved Hemnæs.

S. hyperboreum Læst. Tem. alm. fra Øerne (Tombø) og Nesne ind til Hemnæs, Korgen, Mo og Dunderlandsdalen. Fra Søen op i Birkeregionen.

Coniferæ.

Juniperus communis L. Alm. fra Søen op næsten til Vidiegrændsen, paa Fjeldene som β *nana*.

Pinus silvestris L. Alm., men sparsomt ude ved Havet. Den gaar lidt over Grangrændsen.

Pinus Abies L. Alm., men sparsomt ude ved Havet. Ved Røsaaen og Dunderlandselven danner den store Skove. I Dunderlandsdalen sees de øverste Grantræer omtrent ved Bjeldaanæs, noget nordenfor Polarcirkelen. Dens Høidegrændser ere ovenfor anførte (p. 127).

Callitrichineæ.

Callitriche verna L. (sensu collectivo)[1]. Alm. til op i Vidiebeltet.

C. autumnalis L. Korgen[2].

Myriceæ.

Myrica Gale L. Alstenø, Lurø, Hestnæsset i Ranen (Bl.).

Betulaceæ.

Betula glutinosa Wallr. Alm. Dens Høidegrændser ere ovenfor anførte (p. 127).

B. alpestris Fr. Huglø. Bjeldaanæsfjeld. Ørtfjeld. I Birkeregionen.

B. nana L. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet. Dens Høidegrændse paa Andfjeld er 2934′.

Alnus incana W. Alm. næsten til Birkegrændsen.

Cupuliferæ.

Corylus Avellana L. Som liden Busk sparsomt paa Øerne If. Bl. ved Skei paa Alstenø og paa Lurø.

Ulmaceæ.

Ulmus montana Sm. Alstenø; Fuglevigfjeld og Svartisdalen i Ranen (Bl.) Tombo (buskagtig). Hammerø i Nesne og Børresteinli i Hemnæs, paa sidste Sted træagtig indtil flere hundrede Fod over Søen.

[1] Saavel C. verna Kütz. som C. polymorpha Lönnr. forekomme, men jeg kan ei angive Udbredelsen for hver især.

[2] Denne Art er ved en Feiltagelse anført som forekommende i Sogn (Veg. i Sogn p. 105), hvilket herved berigtiges.

Urticaceæ.

Urtica urens L. Øerne. Ranen (Bl.).

U. dioica L. Alm. i Gran- og Birkebeltet.

Salicineæ.

Salix Lapponum L. Alm. fra Søen til Vidiegrændsen (cfr. p. 128).

S. glauca L. Alm. fra Søen til Vidiegrændsen.

S. lanata L. Alstenø (Bl.) Fra Nesne ind til Lerskar- og Dunderlandsdalen især i Birke- og Vidiebeltet; enkelte Gange lige ned i Granskoven, saasom i Bunden af Dunderlandsdalen kun et Par hundrede Fod over Søen.

S. caprea L. Alm. i Gran- og Birkebeltet.

S. cinerea L. Øerne.

S. aurita L. Øerne.

S. pentandra L. Alm. i Granregionen.

S. nigricans Sw. Alm. i Gran- og Birkebeltet.

S. phylicifolia L. Alstenø og Ranen (Bl.) I Mo og Lerskardalen fra Granregionen op i Vidiebeltet.

S. hastata L. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet.

S. myrsinites L. Alm. paa Skiferne og Kalken fra Øerne ind til Dunderlands- og Lerskardalen. Den findes ofte i de laveste Egne og stiger paa Andfjeld op til 2639'.

S. ovata Ser. Tombø næsten nede ved Søen (♀).

S. herbacea L. Alm. fra Søen op i Lavbeltet.

S. polaris Wg. I Vidie- og Lavbeltet paa Fjeldene i Lerskar- og Dunderlandsdalen.

S. arbuscula L. Bjeldaanæsfjeld øverst i Birkebeltet.

S. reticulata L. Alm. paa Kalk og Skifere fra Søen op i Lavbeltet.

Populus tremula L. Alm. i Gran- og Birkebeltet.

Chenopodeæ.

Chenopodium album L. Alstenø og Ranen (Bl.) Tveraaen i Lerskardalen. Vesteraali. I Granbeltet.

Atriplex hastata L. Alm. paa Strandkanterne.
Salicornia herbacea L. Alstenø (Bl.)

Polygoneæ.

Oxyria digyna Campd. Alm. fra Søen op i Lavbeltet.
Koenigia islandica L. I Vidiebeltet og Lavbeltet paa Fjeldene i Lerskardalen (Bryggefjeld, Tverfjeld ned til Birkegrændsen, Grønfjeld, Skarhogen) og Dunderlandsdalen (Andfjeld, Nasa).
Polygonum viviparum L. Alm. fra Søen op i Lavbeltet.
P. Persicaria L. Ranen (Bl.)
P. aviculare L. Alm. i Granbeltet.
P. Convolvulus L. Ranen (Bl.) Øerne. Lerskardalen. I Agre.
Rumex domesticus Hartm. Alm. i Granbeltet.
R. Acetosa L. Alm. fra Søen op til Vidiegrændsen.
β *alpestris.* I Fjeldlierne.
R. Acetosella L. Alm. i Granbeltet.

Daphnoideæ.

Daphne Mezereum L. Paa Kalk. Børresteinli ved Hemnæs. Fra Selfors i Mo tem. alm. op gjennem Dalen i Granregionen til Færgestedet ved Dunderland.

Plantagineæ.

Plantago major L. Alm. i Granbeltet.
P. media L. Alstenø (Bl.)
P. lanceolata L. Vi saa den paa Øerne. Alstenø og Lurø (Bl.).
P. maritima L. Paa Strandkanterne fra Øerne ind til Mo.

Plumbagineæ.

Armeria maritima Willd. Øerne.

Valerianeæ.

Valeriana officinalis L. (sensu collectivo). Alm. i Gran- og Birkebeltet, paa Kalk som *V. officinalis* (L.) vera, andensteds som *V. sambucifolia* Mik.

Dipsaceæ.

Succisa pratensis Moench. Alm. fra Øerne ind til Hemnæs.

Trichera arvensis Schrad. Alstenø (Bl.)

Compositæ.

Petasites frigida (L.) Ei. sj. paa Fjeldene i Lerskar- og Dunderlandsdalen i Vidie- og Lavbeltet, undertiden (saasom paa Bjeldaanæsfjeld) ned i Birkeregionen.

Tussilago Farfara L. Alm. fra Søen næsten til Birkegrændsen.

Erigeron acris L. Alm. i Granregionen.

β *Mülleri* (Lund.) Busknæs i Ranen (Bl.) Fra Ørtfjeldgaardene alm. op gjennem Dunderlandsdalen til Dunderland. I Granbeltet.

E. alpinus L. Fra Øerne, hvor den gaar lige ned til Søen, til Fjeldene i det Indre.

E. uniflorus L. Alm. i Lav- og Vidiebeltet paa Fjeldene; i Dunderlandsdalen, om jeg ei feiler, ned til Strandjordet.

Aster Tripolium L. Øerne udenfor Lurø (Bl.)

Solidaga Virgaurea L. Alm. fra Søen op til Vidiegrændsen.

Achillea Millefolium L. Alm. i de lavere Egne undtagen i Mo, hvor den kun bemærkedes ved Krogstrand og Rødfjeldgaard.

Matricaria inodora L. Alm. i Granbeltet.

Artemisia vulgaris L. Alm. i Granbeltet.

Tanacetum vulgare L. Alstenø (Bl.) Lygtø. Nesne. Brendberget ved Hemnæs. I de laveste Egne.

Gnaphalium supinum L. Fra Øerne ind til det Indre især i Birke-, Vidie- og Lavbeltet, undertiden ned i Granregionen.

G. silvaticum L. Ved Hemnæs, Korgen og Mo i Granregionen.

G. norvegicum Gunn. Fra Øerne (Huglø) ind til det Indre alm. i Birke- og Vidiebeltet, hvorfra den stiger ned i Granregionen.

Antennaria dioica Gærtn. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet, undertiden næsten til Vidiegrændsen.

A. alpina (L.) ♀. I Vidie- og Lavbeltet paa Fjeldene i Lerskar- og Dunderlandsdalen, undertiden ned i Birkebeltet. Alstenø (Bl.)

Senecio vulgaris L. I de lavere Egne fra Øerne ind til Motern. alm.

Saussurea alpina DC. Alm. fra Søen op i Lavbeltet.

Centaurea Cyanus L. Ranen (Bl.)

Carduus crispus L. Alm. i Granbeltet.

Cirsium palustre Scop. Mo og Korgen i Granbeltet. Ranen og Alstenø (Bl.)

C. heterophyllum All. Alm. til op i Vidiebeltet.

Leontodon autumnalis L. Alm. fra Søen op i Lavbeltet, paa Øerne og Fjeldene som

β *Taraxaci.*

Sonchus arvensis L. Alm. paa Strandkanterne.

S. oleraceus L. Ranen og Alstenø (Bl.)

Taraxacum officinale Web. Alm. fra Søen op i Lavbeltet.

Crepis tectorum L. Alm. fra Nesne ind i Dunderlandsdalen i Granbeltet. Alstenø (Bl.)

Aracium paludosum Less. Alm. i Gran- og Birkebeltet.

Mulgedium alpinum Less. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet.

Hieracium hyperboreum Fr.[1] Tombø mellem Huseby og Tombsvigen, Brendberget ved Hemnæs; beggesteds paa Kalk. Skjæggesnæs paa Alstenø. (Bl.)

H. cymosum L. Ytterheien ved Mo. Bredikfjeld paa Skifere ved Birkegrændsen.

H. alpinum L. Alm. fra Birkeregionen op i Lavbeltet. Paa Øerne ei sj. 1—200′ o. H.

H. commutatum Lindeb. Bjeldaanæsfjeld.

H. nigrescens Fr. Lygtø (næsten typisk). Vesteraali. Kjærringfjeld. Stolpefjeld.

H. pallidum Biv. Stennæset ved Mo.

H. saxifragum Fr. Stennæset (forma). Brendberget.

H. subcæsium. Brendberget (typisk). Bredikfjeld (næsten). Dønø (ei typisk). Mo paa Kalk (Overgangsform til H. diaphanum β stenolepis Lindeb.). Alt if. Dr. Almqvist's Bestemmelse.

[1] Foruden de her nævnte Former, hvoraf endel ere bestemte af Dr. Almqvist, er der endnu nogle ubestemte.

Hieracium murorum L. Bredikfjeld. Ytterheien (ei typisk). Mofjeld (γ *medium* (Jord.)). Alstenø (Bl.).

H. vulgatum Fr. Hugløs. Bjeldaanæs og Vesteraali (Overgang til H. subcæsium if. Almqv.). Alstenø (Bl.).

H. Friesii Hartm. (forma). Messingsæter.

H. Dovrense Fr. obtusum Almqv. Tombø. Nesne. Hemnæs. Bryggefjeld. Stolpefjeld. Tverfjeld. Bredikfjeld. Vesteraali. Gaar op omtrent til Birkegrændsen.

H. Prenanthoides Vill. Fra Øerne (Alstenø (Bl.), Handnæsø) tem. alm. ind til Lerskar- og Dunderlandsdalen i Gran- og Birkebeltet.

H. elatum Fr. (Overgangsform til H. Dovrense og Prenanthoides if. Almqv.) Bredik.

H. crocatum Fr. Tverfjeld fra Foden af Fjeldet (500') op i Birkelierne.

β *angustifolium* Almqv. Tem. alm. fra Nesne ind til Tverfjeld og Dunderlandsdalen (Almeli) i Granbeltet.

H. sparsifolium Lindeb. (verum!) Nævernæs. Dunderland og Bjeldaanæs i Granbeltet.

H. umbellatum L. Ei sj. i Granbeltet.

Campanulaceæ.

Campanula latifolia L. Alstenø (Bl.). Handnæsø. Hammerø. Hemnæs. Mo og Dunderlandsdalen fleresteds, til høit op i Birkebeltet.

C. rotundifolia L. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet.

Rubiaceæ.

Galium boreale L. Alm. i Granbeltet.

G. verum L. Sannalandet i Trenen, Lurø (Bl.).

G. trifidum L. Ved Mo i Granskoven.

G. palustre L. Alm. i Granbeltet.

G. uliginosum L. Ranen (Bl.). Øerne.

G. triflorum Mich. β *viridiflorum*. I Granbeltet under Bryggefjeld og Mofjeld, ved Ytterheien og Almeli.

Galium Aparine L. Alm. i de laveste Egne.

Asperula odorata L. Skei paa Alstenø, Lurø (Bl.). Sandagerfjeld paa Lygtø. Hammerø. Brendberget. Børresteinli. Mo (fleresteds). Overalt i de lavere Egne.

Lonicereæ.

Linnæa borealis L. Alm. i Granbeltet.

Viburnum Opulus L. Øerne (Alstenø (Bl.), Lygtø). Mo. Ranen (Bl.). Kun i Granbeltet.

Gentianeæ.

Gentiana involucrata Rottb. Alstenø (Bl.). Paa Stranden ved Horn paa Lygtø, Osstranden og Tombsvigen paa Tombø og paa Vigholmen. Ved Birkegrændsen paa Nesnefjeld.

G. serrata Gunn. Paa Stranden ved Horn paa Lygtø og sandsynligvis ogsaa ved Osstranden paa Tombø.

G. nivalis L. I Lerskar- og Dunderlandsdalen fra Dalbunden (Almeli) op til Vidiegrændsen.

G. campestris L. Alm. i Granbeltet.

G. Amarella L. Alstenø (Bl.).

Menyanthes trifoliata L. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet.

Labiatæ.

Origanum vulgare L. Ytterheien i Granbeltet.

Thymus Serpyllum L. Nesne (Bl.).

Prunella vulgaris L. Alm. i Granbeltet.

Scutellaria galericulata L. Ved Hemnæs og Mo i Granbeltet.

Lamium purpureum L. Øerne. Hemnæs. Mo (sjelden).

L. amplexicaule L. Øerne.

Galeopsis Tetrahit L. Alm. i Granbeltet.

G. versicolor Curt. Alm. i Granbeltet.

Stachys silvatica L. Alm., undertiden til høit op i Birkebeltet, især paa Kalk.

S. palustris L. Ranen (Bl.).

Ajuga pyramidalis L. Tem. alm. i Granbeltet, undertiden næsten til Birkegrændsen.

Asperifoliæ.

Stenhammaria maritima Rchb. Paa Strandkanterne paa Øerne, ved Nesne og Mo.

Myosotis cæspitosa Schultz. Ranen (Bl.). Øerne.

M. silvatica Hoffm. Fra Nesne ind til det Indre alm., især i Birke- og Vidiebeltet til Vidiegrændsen, sjeldnere (saasom i Dunderlandsdalen) i Granregionen.

M. arvensis Hoffm. Alm. i Granbeltet.

Asperugo procumbens L. Huseby paa Tombø.

Echinospermum deflexum Lehm. Ranen (Bl.).

Polemoniaceæ.

Polemonium cæruleum L. Tombfjeld paa Tombø. Vigholmen. Alstenø (Bl.).

Solanaceæ.

Solanum Dulcamara L. Ranen (Bl.).

Scrophularineæ.

Scrophularia nodosa L. Fra Øerne h. o. h. ind til Dunderlandsdalen, hvor den nærmer sig Granens Grændse.

Linaria vulgaris Mill. Alstadhaug (Bl.)

Veronica serpyllifolia L. Alm. i Gran- og rimeligvis ogsaa i Birkebeltet.

V. alpina L. Alstenø (Bl.) Alm. fra Nesne ind til det Indre, fra Birkebeltet op i Lavbeltet, sjelden ned i Granbeltet (saasom i Mo). Var. paa Bredikfjeld med lyserøde Blm.

V. saxatilis L. (fil.). Alm. i Birke- og Vidiebeltet. Den gaar især ude ved Havet ofte ned i de laveste Egne.

V. officinalis L. Alm. i Gran- og Birkebeltet, næsten til Birkegrændsen.

β *glabrata* Frist. Tombø.

V. Chamædrys L. Ranen (Bl.). Øerne.

V. scutellata L. Øerne. Korgen. Dunderland. I de laveste Egne.

Euphrasia officinalis L. Alm. fra Søen til Vidiegrændsen.

Bartsia alpina L. Alm. fra Søen op i Lavbeltet.

Sceptrum Carolinum Rudb. Alm. i Mo, Dunderlands- og Lerskardalen fra Søen op i Vidiebeltet, undertiden næsten til Vidiegrændsen.

Pedicularis palustris L. Alm. i Granbeltet.

P. lapponica L. I Birke-, Vidie- og Lavbeltet paa Fjeldene i Lerskar- og Dunderlandsdalen; gaar ned til Grangrændsen.

Rhinanthus major Ehrh. Ranen (Bl.).

R. minor Ehrh. Alm. fra Søen til Birkegrændsen.

Melampyrum pratense L. Alm. fra Søen til Birkegrændsen.

M. silvaticum L. Alm. fra Søen næsten til Birkegrændsen.

Utricularieæ.

Utricularia minor L. Øerne.

Pinguicula vulgaris L. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet, undertiden til Vidiegrændsen. En Varietet med meget lyseblaa Kronflige fandtes øverst i Birkebeltet ovenfor Dunderland.

Primulaceæ.

Primula scotica Hook. Paa Kalk og Skifere ei alm. Alstenø og Dønø (Bl.), Finkona, Tombø, Handnæsø, overalt i de laveste Egne. Roxlien ved Hemnæs (Bl.). Paa Rødfjeld og Tverfjeld ved og lidt over Birkegrændsen.

Glaux maritima L. Alm. ind til Mo.

Naumburgia thyrsiflora Rchb. Eiteraa (if. Bl.). Mo i Granbeltet.

Trientalis europæa L. Alm. fra Søen til Vidiegrændsen.

Ericaceæ.

Erica Tetralix L. M. sj.: Ranen (Bl.).

Calluna vulgaris Sal. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet.

Phyllodoce cærulea Sal. Alm. fra Birkebeltet op i Lavbeltet fra Rigsgrændsen ud til Hemnæs, hvor den bemærkedes i Granregionen.

Andromeda polifolia L. Alm. i Gran- og Birkebeltet.

Andromeda hypnoides L. Alstenø (Bl.). Alm. i Vidie- og Lavbeltet paa Fjeldene i Lerskar- og Dunderlandsdalen, undertiden gaaende ned i Birkeregionen.

Arctostaphylos officinalis W. & Grab. Sj.: Øerne. Bredikfjeld og Dugurmaalshaug i Dunderlandsdalen i Vidiebeltet. Ranen (Bl.).

A. alpina Spr. Alm. fra Søen op i Lavbeltet.

Oxycoccus microcarpus Turcz. Alm. i Gran- og Birkebeltet.

Vaccinium vitis idæa L. Alm. fra Søen op i Lavbeltet.

Myrtillus nigra Gil. Alm. fra Søen til Vidiegrændsen.

M. uliginosa Dr. Alm. fra Søen til Vidiegrændsen.

Azalea procumbens L. Alm. fra Søen op i Lavbeltet.

Diapensiaceæ.

Diapensia lapponica L. Alm. i Vidie- og Lavbeltet. Paa Øerne gaar den ned i Birkebeltet til kun et Par Hundrede Fod over Søen.

Pyrolaceæ.

Pyrola rotundifolia L. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet, undertiden næsten til Vidiegrændsen.

P. media Sw. Tombø. Hammerø. Dunderland og Messingen i Gran- og Birkebeltet.

P. minor L. Alm. i Gran- og Birkebeltet til Birkegrændsen.

P. secunda L. Alm. i Granbeltet.

P. uniflora L. I Granregionen ved Hemnæs, Korgen og Mo.

Umbelliferæ.

Carum Carvi L. Alm. i Granbeltet.

Pimpinella Saxifraga L. I de lavere Egne paa Øerne og ved Hemnæs.

Haloscias scoticum Fr. Øerne, hvor den gaar op i Fjelsprækkerne temmelig langt fra Søen. Mo.

Angelica silvestris L. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet.

Archangelica littoralis Fr. Alstenø (Bl.). Øerne. Mo.

Archangelica officinalis Fr. Alm. i Birke- og Vidiebeltet til Vidiegrændsen, paa Bredikfjeld endog over den.

Cerefolium silvestre Hoffm. Alm. i Granbeltet.

Araliaceæ.

Adoxa Moschatellina L. Alstenø (Bl.).

Corneæ.

Cornus suecica L. Alm. til op i Vidiebeltet.

Crassulaceæ.

Sedum Telephium L. Ugræs i Agre ved Sandnæs i Nesne. Virkelig vild saaes den ei, og den sætter neppe modent Frø i disse Egne.

S. acre L. Alm. i Granbeltet.

S. annuum L. Alm. i Gran- og Birkebeltet.

Rhodiola rosea L. Alm. fra Søen op i Lavbeltet.

Saxifragaceæ.

Saxifraga Cotyledon L. Alm. i Gran- og Birkebeltet. Paa Tverfjeld til Birkegrændsen.

S. stellaris L. Alm. fra Søen op i Lavbeltet, tilsidst næsten stengelløs.

β *comosa.* I Vidie- og især i Lavbeltet paa Fjeldene i Dunderlandsdalen.

S. nivalis L. Alm. i Birke-, Vidie- og Lavbeltet, ofte lige ned til Søen.

S. oppositifolia L. Alm. fra Søen op i Lavbeltet.

S. aizoides L. cum β *aurantia.* I alle fire Regioner, men især i Birkebeltet alm.

S. cernua L. Tem. alm. fra Øerne (Huglø) til Grændsefjeldene i Vidie- og Lavbeltet, undertiden ogsaa i Birkeregionen.

β *corymbosa.* Flerblomstret. Kjærringfjeld.

S. rivularis L. Tem. alm. fra Øerne (Alstenø (Bl.), Huglø) til

Grændsefjeldene i Vidie- og Lavbeltet, sjeldnere i Birkebeltet; paa Bryggefjeld endog ned i Granregionen.

Saxifraga cæspitosa L. Sannæsøen paa Alstenø ned til Søen (Bl.). Handnæsø. Tombø. Hemnæs nede ved Søen. Bredikfjeld i Lavbeltet.

S. adscendens L. I Mo og Dunderlandsdalen fra Granbeltet op i Vidiebeltet.

Ribesiaceæ.

Ribes rubrum L. Alm. i Granbeltet, paa Ørtfjeld lige til Birkegrændsen.

Ranunculaceæ.

Thalictrum alpinum L. Alm. fra Søen til op i Lavbeltet.

T. flavum L. I Granbeltet: Alstenø (Bl.). Vigholmen. Hemnæs. Dunderlandsdalen tem. alm. fra Mo op til Vesteraali og Krogstrand.

Anemone nemorosa L. Alm. i Gran- og Birkebeltet.

Batrachium trichophyllum Chaix. Tombø. Døno.

B. confervoides Fr. et β *succulentum*. Korgen.

B. heterophyllum Fr. Korgen.

Ranunculus glacialis L. Alm. i Lerskar- og Dunderlandsdalen i Vidie- og Lavbeltet, hvorfra den undertiden gaar ned i Birkeregionen.

R. aconitifolius L. M. sj.: Ranen (if. Bl.).

R. Flammula L. β *reptans*. Tem. alm. i Granbeltet.

R. pygmæus Wg. Alm. i Lerskar- og Dunderlandsdalen i Vidie- og Lavbeltet. Gaar undertiden lige ned til Birkegrændsen.

R. nivalis L. Alm. især i den øvre Del af Vidiebeltet og i Lavbeltet i Lerskar- og Dunderlandsdalen, sjeldnere i Vidiebeltets nedre Del.

R. repens L. Alm. i Granbeltet.

R. acris L. Alm. fra Søen op til Vidiegrændsen, undertiden endog over den.

R. auricomus L. Ranen (Bl.). I Granbeltet paa Øerne og ved Mo.

Ficaria ranunculoides Moench. Alstenø (Bl.).

Caltha palustris L. Alm. i Granbeltet.

Trollius europæus L. Hemnæs. Korgen. Mo. Dunderlandsdalen. Ude ved Fjorden synes den at være lidt subalpin. Den gaar op i Vidiebeltet, undertiden lige til Vidiegrændsen.

Aconitum septentrionale Koell. Sparsomt paa Øerne (Alstenø (Bl.), Huglø, Handnæsø). Fra Nesne alm. ind til Grændsen, fra Søen op i Vidiebeltet. Var. med hvide Blomster i Dunderlandsdalen.

Actæa spicata L. (*forma melanocarpa*). Øerne. Hemnæs. Mo. Dunderlandsdalen. Den foretrækker Kalken og gaar høit op i Skoven uden at overskride Grangrændsen.

Papaveraceæ.

Corydalis fabacea Pers. Ranen (Bl.). Nesne (stud. med. Dometius).

Fumaria officinalis L. Ranen (Bl.). Øerne. Nesne.

Cruciferæ.

Barbarea stricta Fr. Brendberget. Almelien. Bjeldaanæs. I Granbeltet.

Turritis glabra L. Brendberget.

Arabis hirsuta Scop. Alm. paa Skifere og Kalk i Gran- og Birkebeltet, paa Ørtfjeld endog over Birkegrændsen.

A. alpina L. Alm. i Vidie- og Lavbeltet fra Øerne (Alstenø (Bl.). Huglø) ind til Grændsen. Den findes undertiden ogsaa i Birkeregionen og gaar i Dunderlandsdalen lige ned i Granbeltet i Bunden af Dalen.

Cardamine pratensis L. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet; paa Tverfjeld og Audfjeld endog i Lavbeltet, men i de høiere Egne altid steril, forplantende sig ved Knopper, der dannes i Smaabladenes Hjørner (cfr. Norm. i bot. Not. 1865 p. 25).

C. hirsuta L. Ranen (Bl.). Selfors og nær Kirken i Mo. I Granbeltet. Med mere bladet Stengel end den typiske (Overgangsform til C. silvatica Link.).

Cardamine bellidifolia L. Alstenø (Bl.). Alm. i Lavbeltet i Lerskar- og Dunderlandsdalen. Ved Elven ved Krogstrand (800').

Draba incana L. Alm. fra Søen op i Birkebeltet.

β *latifolia!* Med 2—4bladet Stengel, fjernstaaende, bredt rudeformig rundagtige, oventil grovttandede, aldeles budte Stengelblade; Bladrosetterne temmelig faabladede med aflangtlancetformede Blade; Skulperne glatte lancetformede. Lerskardalen (Moe).

D. rupestris R. Br. Fra Øerne (Alstenø (Bl.), Huglø) ind til Grændsen tem. alm. fra Søen op i Lavbeltet paa Skifere.

D. nivalis Liljebl. Bredikfjeld paa Skifere fra den øvre Del af Birkebeltet op i Lavbeltet.

Cochlearia officinalis L. Ranen (Bl.). Øerne.

Thlaspi arvense L. Alm. i Granbeltet.

Cakile maritima Scop. Ranen (Bl.). Øerne.

Sisymbrium Sophia L. Alstenø og Ranen (Bl.).

Erysimum cheiranthoides L. Øerne. Hemnæs. Mo (if. Arnell.).

E. hieraciifolium L. Alm. i Granbeltet.

Capsella Bursa pastoris Moench. Alm. i Granbeltet.

Brassica campestris L. Ei sj. fra Øerne ind til Korgen og Dunderlandsdalen i Granbeltet.

Sinapis alba L. Ranen (Bl.). Øerne. Mo (sj.). I Agre. Hyppigere end Følgende.

S. arvensis L. Alstenø og Ranen (Bl.) I Agre.

β *ambigua.* Mo.

Raphanus Raphanistrum L. Ranen (Bl.). Øerne.

Subularia aquatica L. Korgen.

Nymphæaceæ.

Nymphæa alba L. }
Nuphar luteum Sm. } Ranen (Bl.). Vi saa dem ei.

Droseraceæ.

Drosera rotundifolia L. Alm. i Granbeltet. I Lerskardalen næsten til Birkegrændsen.

Drosera longifolia et β *obovata*. Alm. i Gran- og Birkebeltet. I Lerskardalen til Birkegrændsen.

Parnassia palustris L. Alm. fra Søen til Vidiegrændsen.

Violarieæ.

Viola palustris L. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet.

β *epipsila*. I Granbeltet ei sj.

V. suecica Fr. Dunderlandsdalen ved Andfjeld o. fl. St. til 1000′.

V. umbrosa Fr. Alstenø og Ranen (Bl.).

V. mirabilis L. Alstenø (Bl.). Brendberget. Børresteinli. Tem. alm. paa Kalk i Granregionen fra Mo op gjennem Dunderlandsdalen til Færgestedet ved Dunderland.

V. biflora L. Alm. fra Søen op i Lavbeltet.

V. silvatica Fr. Tem. alm. i Gran- og Birkebeltet.

V. canina L. et β *montana*. Alm. i Gran- og Birkebeltet.

V. tricolor L. Ei sj. i Granbeltet fra Øerne ind til Mo.

Portulaceæ.

Montia fontana L. Alm. i Granbeltet.

Alsinaceæ.

Spergula arvensis L. Alm. i Granbeltet.

Sagina nodosa Fenzl. α *glabra*. Øerne. Nesne. Hemnæs. I Granbeltet.

S. saxatilis Wimm. Hemnæs og Mo fra Søen op i Vidiebeltet. Paa Tverfjeld endog høit over Vidiegrændsen.

S. nivalis Lindbl. Andfjeld, Kjærringfjeld, Burek paa Nasa og Tverfjeld i Vidie- og Lavbeltet.

S. procumbens L. Fra Øerne ind til Hemnæs og Korgen i Granbeltet.

Alsine biflora Wg. Især i Vidie- og Lavbeltet, men ogsaa i Birkebeltet, saasom paa Ørtfjeld, Jarfjeld, Tverfjeld o. fl. St. i Lerskar- og Dunderlandsdalen.

Halianthus peploides Fr. Øerne. Hemnæs. Mo.

Arenaria trinervia L. Sj. i Granbeltet: Øerne. Mo.

Arenaria serpyllifolia L. Sj. i Granbeltet: Øerne. Mo.
A. norvegica Gunn. Skjæggesnæs paa Alstenø (Bl.).
Stellaria nemorum L. Alm. fra Søen til høit op i Vidiebeltet.
S. media With. Alm. i Granbeltet.
β *salina!* Med tykke kjødfulde Blade. Paa Strandkanter.
S. graminea L. Hemnæs. Nesne. I Granbeltet.
S. Frieseana Ser. et β *alpestris.* Korgen og Mo i Granbeltet. Alstenø (β Bl.).
S. borealis Big. Ved Hemnæs (Ramflaa), Korgen, Mo og Dunderlandsdalen ei sj. fra Søen op i Vidiebeltet.
?*S. uliginosa* Murr. Ranen, Alstenø (Bl.).
S. crassifolia Ehrh. Alm. paa Strandkanterne fra Øerne ind til Mo. Sj. andensteds og aldrig langt fra Søen eller synderlig over denne.
Cerastium alpinum L. Alm. fra Søen op i Lavbeltet.
β *glabratum.* Tombø.
C. latifolium L. if. Hartm. I Lavbeltet paa Bredikfjeld, Stolpefjeld og Tverfjeld.
C. trigynum Vill. Alm. fra Nesne ind til Grændsen, fra Birkebeltet op i Lavbeltet. Alstenø ned til Søen (Bl.).
C. vulgatum L. Alm. fra Søen til høit op i Vidiebeltet.
C. viscosum L. Vigholmen. Stranden i Nesne.

Silenaceæ.

Melandrium silvestre Røhl. Alm. fra Søen til Vidiegrændsen.
Silene inflata Sw. Alm. i Granbeltet.
S. maritima With. Øerne. Alstenø høit paa Fjeldet og Ranen (Bl.)
S. rupestris L. I Gran- og Birkebeltet ei sj. fra Øerne ind til Mo.
S. acaulis L. Alm. fra Søen op i Lavbeltet.
Viscaria alpina Fr. Ranen (Bl.) Tverfjeld, Bredikfjeld, Andfjeld og Nasa fra Birkegrændsen op i Lavbeltet.
Lychnis Flos cuculi L. Ranen (Bl.). Øerne.

Hypericineæ.

Hypericum hirsutum L. Ei sj. i Stenurer: Alstenø (Bl.). Brend-

berget, Børresteinli og Ramflaa ved Hemnæs. Under Nesnefjeld paa Nordsiden og ved Hammerø. Altid i de laveste Egne.
Hypericum quadrangulum L. Sjelden i de laveste Egne: Selforsfjeld. Hammerø.

Polygaleæ.

Polygala vulgaris L. Alstenø, Lurø og Nesne (Bl.) Øerne.

Empetreæ.

Empetrum nigrum L. Alm. fra Søen op i Lavbeltet.

Euphorbiaceæ.

Euphorbia Helioscopia L. Alstenø og Ranen (Bl.) Øerne.

Geraniaceæ.

Erodium cicutarium L'Her. Skresletten i Lerskardalen (Bl.)
Geranium silvaticum L. Alm. fra Søen op til Vidiegrændsen.
G. Robertianum L. Alstenø (Bl.) Sj. paa Øerne.

Lineæ.

Linum catharticum L. Ranen (Bl.). Øerne. Børresteinli ved Hemnæs.

Oxalideæ.

Oxalis Acetosella L. Alm. i Granbeltet. Paa Hugløtil høit over Birkegrændsen.

Balsamineæ.

Impatiens Noli tangere L. Ved Hemnæs, Korgen og Mo alm. i Granbeltet.

Oenothereæ.

Epilobium montanum L. Alm. Gaar op i Birkebeltet.
E. palustre L. Som Foregaaende.
E. lineare Mühlenb. Bjeldaanæsfjeld i Birkebeltet.

Epilobium origanifolium Lam. Alm. i Gran- og Birkebeltet.

E. alpinum L. Alstenø (Bl.) I Korgen og Mo fra Søen op i Lavbeltet.

Chamænerion angustifolium Scop. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet.

Circæa alpina L. Ei sj. i Granbeltet fra Øerne ind til Mo.

Halorageæ.

Hippuris vulgaris L. Ei alm. fra Øerne (Alstenø (Bl.) Tombø) ind i Dunderlandsdalen, paa Bjeldaanæsfjeld op i Birkebeltet.

Myriophyllum alterniflorum DC. Øerne. Korgen.

Pomaceæ.

Sorbus Aucuparia L. Alm. til og undertiden lidt over Birkegrændsen.

S. hybrida L. Skei paa Alstenø (Bl.) Som lidet sterilt Træ paa Kalk under Tombfjeld paa Tombø. En smalbladet Form, som synes at danne en Overgang til S. scandica Fr.

Rosaceæ.

Rosa canina L. Ranen (Bl.) Øerne.

R. mollissima Fr. Hyppigere end Foregaaende: Øerne, Nesne, Brendberget, Børresteinli.

Rubus idæus L. Alm. i Gran- og Birkebeltet.

R. saxatilis L. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet.

R. arcticus L. Stormdalen i sandige Vidiekrat ved Elvebredden nedenfor Bergslotdalens Udløb i Birkeregionen.

R. Chamæmorus L. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet.

Fragaria vesca L. Alm. i Granbeltet.

Comarum palustre L. Alm. fra Søen til Birkegrændsen.

Potentilla anserina L. Fra Øerne ind til Mo i de laveste Egne.

P. nivea L. Sj. i Vidiebeltet paa Skifere: Ørnefjeld og Nesnefjeld, Handnæsøen, (1000—1500′).

P. argentea L. Alstenø og Ranen (Bl.)

P. maculata Pourr. Alm. fra Søen op i Lavbeltet.

β *gelida* (C. A. Mey.) I Vidie- og Lavbeltet paa Tverfjeld, Ørtfjeld, Bredikfjeld og Andfjeld.

P. Tormentilla Scop. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet.

Sibbaldia procumbens L. Fra Nesne ind til Grændsen alm. i de tre øvre Regioner, sj. langt nede i Granbeltet, (saasom i Dunderlandsdalen).

Alchemilla vulgaris L. Alm. fra Søen til Vidiegrændsen.

A. alpina L. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet. I Mo saaes den ei nedenfor Grangrændsen.

Geum urbanum L. Mo? Brendberget, Børresteinli, Hammerø, i de laveste Egne.

G. rivale L. Alm. fra Søen op i Vidiebeltet.

Dryas octopetala L. Alm. paa Kalk og Skifere fra Søen op i Lavbeltet.

Spiræa Ulmaria L. Alm. i Gran- og Birkebeltet, undertiden lidt over Birkegrændsen.

Amygdaleæ.

Prunus Padus L. Alm. næsten til Birkegrændsen.

Papilionaceæ.

Anthyllis Vulneraria L. Fra Søen op i Vidiebeltet paa Kalk og Skifere ei sjelden.

Trifolium repens L. Alm. fra Søen næsten til Birkegrændsen.

T. pratense L. Alm. i Granbeltet.

Lotus corniculatus L. Alm. fra Søen, undertiden til høit op i Vidiebeltet.

Phaca frigida L. Tvervandet i Nordranen (Bl.)

Oxytropis lapponica Gaud. Ei alm. i Vidie- og Lavbeltet paa Skifere: Ørnefjeld. Nesnefjeld (1000—1500′). Dunderlandsdalen paa Dugurmaalshaugen, Rødfjeld, Bjeldaanæsfjeld og Bredikfjeld. Lerskardalen paa Skarhogen og Tverfjeld, hvorfra den gaar ned i Birkebeltet i Lerskarbotn og Foden af Tverfjeld (6—800′).

Astragalus oroboides Horn. Sj. paa Skifere: Ovenfor Selfors i Granbeltet. Dugurmaalshaug ved Dunderland i Vidiebeltet. Grønfjeld, Tverfjeld og Dugurmaalshaug i Lerskardalen i Birke- og Vidiebeltet. Roxlien ved Hemnæs (Bl.)

Astragalus alpinus L. Fra Øerne (Huglø) ind til Grændsen ei sj. fra Birkebeltet op i Lavbeltet; ved Hemnæs og i Dunderlandsdalen lige ned i Granbeltet.

Vicia silvatica L.
V. Cracca L. } Almindelige i Granbeltet.
V. sepium L.

V. sativa L. Alstenø og Ranen (Bl.).

Lathyrus maritimus Big. Ranen (Bl.).

L. pratensis L. Tem. alm. i Granbeltet.

Orobus vernus L. Sj.: Alstenø (Bl.). Tombø. Børresteinli.

Ueber eine Classe geometrischer Transformationen.

Von **Sophus Lie.**

(Fortsetzung).

Im ersten Theile dieser Abhandlung habe ich, wie ich glaube, die erste vollständige analytisch-geometrische Interpretation aller Raum-Transformationen gegeben, bei denen Berührung eine invariante Beziehung ist. Ich betrachtete insbesondere eine derartige Verwandtschaft — ich bezeichne dieselbe der Kürze wegen als eine *Kugel-Abbildung* —, welche die Geraden eines Raumes r[1] in die Kugeln des Raumes R überführte — dieses so zu verstehen, dass alle Flächen-Elemente, welche zwei consecutive Punkte einer Geraden enthielten, in die Elemente einer Kugel übergingen. Ich begründete hierauf einen genauen und nach meiner Auffassung fundamentalen Zusammenhang zwischen Linien-Geometrie und Kugel-Geometrie und demzufolge zwischen mehreren projectivischen und metrischen Theorien. Insbesondere zeigte es sich, dass die Haupttangenten-Curven einer Fläche f sich in die Krümmungslinien der Bildfläche F transformirten.

Dritter Abschnitt.

Zur Theorie partieller Differential-Gleichungen zwischen drei Variablen.

In diesem Abschnitte werde ich versuchen einerseits die von *Plücker* in seinem letzten Werke eingeführten geometrischen Begriffe, andererseits die eben besprochenen Entwickelungen für die Theorie partieller Differential-Gleichungen zu verwerthen. Man erkennt leicht, dass eine partielle Differential-Gleichung von beliebiger Ordnung, deren Charakteristiken Haupttangenten-Curven

[1] Ich folge der Terminologie des ersten Theils, auf den ich auch sonst verweise.

auf den Integralflächen sind, durch die obengenannte Transformation in eine Differential-Gleichung derselben Ordnung, deren Charakteristiken Krümmungslinien sind, übergeführt wird. Es gründet sich hierauf ein interessanter Parallelismus zwischen mehreren wichtigen Classen partieller Differential-Gleichungen. An der Seite derselben stellen sich, wie wir später sehen werden, gewisse Differential-Gleichungen, deren Charakteristiken geodätische Curven sind.

Die folgenden Entwickelungen werden gewissermassen einen particulären Charakter haben, insofern ich mich nur mit *besonderen* Classen Differential-Gleichungen beschäftige. Doch möchte ich hervorheben, dass der hier eingeschlagene Weg: die Behandlung nehmlich von partiellen Differential-Gleichungen an erweiterte geometrische Begriffe anzuknüpfen eine Methode zu sein scheint, aus welcher man Fortschritte in der von *Monge* aufgebauten Disciplin erwarten darf.

Ueber einige partielle Differential-Gleichungen erster Ordnung.

Zunächst betrachte ich drei in einander transformirbare Classen partieller Differential-Gleichungen erster Ordnung, die ich der Kürze wegen mit den Symbolen D_{11}, D_{12}, D_{13} bezeichnen werde.

1) D_{11}. Die Charakteristiken sind Haupttangenten-Curven auf den Integralflächen. Die Gleichungen D_{11} entsprechen, wie ich später zeigen werde, gewissermassen den Linien-Complexen und Linien-Congruenzen.

2) D_{12}. Die Charakteristiken sind Krümmungslinien. Eine jede D_{12} entspricht entweder einem Kugel-Complex oder einer Kugel-Congruenz.

3) D_{13}. Die Charakteristiken sind geodätische Curven. Bezeichnet H eine beliebige, bekannte Funktion von x, y, z und wie gewöhnlich p, q die partiellen Derivirten von z hinsichtlich x und y, so lässt eine jede D_{13} sich folgenderweise schreiben:

$$\frac{dH}{dx}\,p + \frac{dH}{dy}\,q - \frac{dH}{dz} = \sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{dH}{dx}\right)^2+\left(\frac{dH}{dy}\right)^2+\left(\frac{dH}{dz}\right)^2-1}.$$

Diese Gleichungen sind, wie zu bemerken ist, nur vom *zweiten* Grade hinsichtlich p und q.

Aus dem Inhalte dieses Capitels hebe ich noch hervor, dass die Bestimmung der geodätischen Curven einer Fläche gewissermassen darauf hinauskommt, eine particuläre D_{12} zu integriren. Demzufolge lässt sich die bisherige Theorie geodätischer Curven für die neue Theorie der Plückerschen Complexen verwerthen.

§ 13.

Partielle Differential-Gleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken Haupttangenten-Curven auf den Integralflächen sind.

35. Wir haben gefunden (§ 3, 9), dass wenn die charakteristischen Curven einer partiellen Differential-Gleichung erster Ordnung von den Geraden eines Linien-Complexes umhüllt werden, so sind die Charakteristiken Haupttangenten-Curven auf den Integralflächen. Es ist andererseits leicht zu erkennen, dass einer jeden Linien-Congruenz eine *lineare* partielle Differential-Gleichung erster Ordnung entspricht, deren zweifach unendlich viele Charakteristiken — die Geraden der Congruenz nehmlich — als Haupttangenten-Curven auf den Integralflächen auftreten. Umgekehrt werden wir beweisen, dass es sonst keine weiteren partiellen Differential-Gleichungen erster Ordnung giebt, welche die besprochene Eigenschaft besitzen, als die genannten beiden Arten.

Schreiben wir eine allgemeine partielle Differential-Gleichung erster Ordnung in der Form:

$$F(x\,y\,z\,p\,q) = 0,$$

so müssen wir F, als Funktion von x, y, z, p, q aufgefasst, in allgemeinster Weise so bestimmen, dass in einem beliebigen Punkte einer Integralfläche die Richtung der Charakteristik mit derjenigen der Trajectorie zusammenfällt. Die beiden besprochenen Richtungen liegen nehmlich hinsichtlich der beiden entsprechenden Haupttangenten harmonisch, und wenn sie also zusammenfallen, so werden sie zugleich mit der einen Haupttangente identisch. Nach *Monge* bestimmen aber:

$$\frac{dF}{dp}dy - \frac{dF}{dq}dx = 0, \left(\frac{dF}{dx} + p\frac{dF}{dz}\right)dx + \left(\frac{dF}{dy} + q\frac{dF}{dz}\right)dy = 0$$

bezüglich die Richtungen der Charakteristik und der Trajectorie, und also kommt unser Problem darauf hinaus, das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{dF}{dp}\left(\frac{dF}{dx} + p\,\frac{dF}{dz}\right) + \frac{dF}{dq}\left(\frac{dF}{dy} + q \cdot \frac{dF}{dz}\right) = 0 \qquad (1)$$

zu bestimmen. Diese Gleichung lässt sich nach den gewöhnlichen Methoden integriren; da wir jedoch hierdurch die Lösung in einer Form erhalten, die sich nicht unmittelbar interpretiren lässt, so wird es vortheilhafter sein, einen indirekten Weg einzuschlagen.

36. Setzen wir nun zunächst voraus, dass die gesuchte partielle Differential-Gleichung ($F = 0$) keine lineare ist, so entsprechen derselben bekanntlich dreifach unendlich viele Charakteristiken, und also befriedigen diese Curven nur *eine* Gleichung von der Form:

$$f(x\, y\, z\, dx\, dy\, dz) = 0.$$

Setzen wir hier statt y und z die äqvivalenten Ausdrücke:

$$y = \frac{(y\,dx - x\,dy) + x\,dy}{dx}, \quad z = \frac{x\,dz - (x\,dz - z\,dx)}{dx},$$

so erhält die Gleichung der Charakteristiken ($f = 0$) die Form:

$$\chi\,[dx\, dy\, dz\, (x\,dz - z\,dx)\, (y\,dx - x\,dy)\, \varphi(x)] = 0$$

und zwar wissen wir, dass wenn $\varphi(x)$ eine Constante ist, und nur dann, werden die Charakteristiken von den Geraden eines Linien-Complexes umhüllt. Indem man nun nach den gewöhnlichen Regeln unter den Gleichungen:

$$\chi = 0,\ \chi'_{dx} = \rho p,\ \chi'_{dy} = \rho q,\ \chi'_{dz} = -\rho$$

die Grössen dx, dy, dz eliminirt, wobei ρ wegfällt, erhält man die ursprüngliche partielle Differential-Gleichung ($F = 0$) in der Form:

$$\pi\,[x\, y\, z\, p\, q\, \varphi(x)] = 0,$$

und zwar fragt es sich hier, ob der Ausdruck π der Gleichung (1) in anderen Fällen genügen kann, als wenn $\varphi(x)$ eine Constante ist.

Führt man auf π die durch (1) angegebenen Operationen aus, so bleibt nach einer Reduktion, die sich darauf gründet, dass π, in dem angegebenen Falle die Gleichung (1) befriedigt, nur zurück:

$$\frac{d\pi}{dp}\,\frac{d\pi}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

eine Gleichung, die in drei zerfällt:

$$\frac{d\pi}{dp} = 0; \frac{d\pi}{d\varphi} = 0; \frac{d\varphi}{dx} = 0.$$

Ist erstens $\frac{d\pi}{dp}$ gleich Null, so kommt p gar nicht in der Gleichung ($\pi = 0$) vor, und also lässt sich dieselbe auf die *lineare* Form:

$$q = \Phi(x\,y\,z)$$

bringen; diesen Fall haben wir aber beilaüfig ausgeschlossen. Die Gleichungen $\left(\frac{d\pi}{d\varphi} = 0\right)$ und $\left(\frac{d\varphi}{dx} = 0\right)$ sagen bezüglich, dass π nicht die Grösse φ enthält, und dass φ eine Constante ist, und somit ist meine anfängliche Behauptung theilweise erwiesen.

Wir gehen nun zu dem Falle über, dass ($F = 0$) eine lineare partielle Differential-Gleichung ist. Es giebt alsdann zweifach unendlich viele Charakteristiken, und es ist leicht zu erkennen, dass dieselben gerade Linien sein müssen, wenn die fragliche Eigenschaft eintreten soll. Betrachten wir nehmlich einen Punkt p, die durch denselben gehende Charakteristik c und endlich eine variable, unendlich nahe Charakteristik c′. Es ist klar, dass die Tangentenebene der entsprechenden Integralfläche im Punkte p mit c′ variirt; es soll aber diese Ebene die Curve c in diesem Punkte osculiren, und also muss c die Eigenschaft besitzen, dass ihren Punkten eine unbestimmte Osculationsebene entspricht. Dieses ist aber nur mit der geraden Linie der Fall.

Die obenstehenden Resultate lassen sich folgenderweise zusammenfassen:

Es giebt zwei distinkte Classen partieller Differential-Gleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken Haupttangenten-Curven auf den Integralflächen sind; die eine besteht aus linearen Differential-Gleichungen, deren geradlinige Charakteristiken eine Congruenz bilden. Die zweite Classe entspricht den Plückerschen Linien-Complexen, in dem Sinne, dass die Charakteristiken einer solchen Differential-Gleichung von den Geraden eines Complexes umhüllt werden. Alsdann kommt die Aufgabe der Integration darauf hinaus: die allgemeinste Fläche zu finden, deren zweifach unendlich viele Haupttangenten des einen Systems einem gegebenen Linien-Complexe gehören. Den Inbegriff dieser beiden Classen bezeichnen wir mit dem Symbole D_{11}.

§ 14.

Partielle Differential-Gleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken Krümmungslinien auf den Integralflächen sind.

37. Wir wissen, dass unsere Kugel-Abbildung die Elemente einer Fläche f in die Elemente einer Fläche F überführt. Es wird hierbei offenbar ein paarweises Zusammengehören zwischen allen Curven der beiden Flächen festgestellt, und zwar entsprechen sich insbesondere die Haupttangenten-Curven auf f und die Krümmungslinien auf F. Hieraus folgt, dass zwei Flächen f_1 und f_2, die einander nach einer Haupttangenten-Curve berühren, im Allgemeinen in Flächen F_1 und F_2 übergehen, die in demselben gegenseitigen Verhältnisse längs einer Krümmungslinie stehen. Dieser Satz erleidet jedoch eine wichtige Ausnahme, die freilich im Folgenden nicht in Betracht kommt, und um Alles möglichst klar zu stellen gehe ich hierauf etwas näher ein.[1]

Nach § 5, 14 wissen wir, dass wenn die beiden Raüme r und R durch ein Gleichungs-System:

$$F_1(x\,y\,z\,X\,Y\,Z)=0,\quad F_2(x\,y\,z\,X\,Y\,Z)=0$$

reciprok auf einander bezogen sind, so bildet ein Flächen-Element des einen Raumes, welches einen elementaren Complex-Kegel berührt, sich im anderen Raume als ein ähnliches Element ab. Nun giebt es offenbar im Allgemeinen in jedem Raume *vierfach* unendlich viele Elemente von dieser ausgezeichneten Lage. Wenn aber die elementaren Complex-Kegel des Raumes r *ebene* Strahl-Büschel sind, so giebt es in r nur *dreifach* unendlich viele solche Elemente — ich bezeichne sie mit dem Buchstaben e —, welche den *vierfach* unendlich vielen, ausgezeichneten Elementen E des Raumes R entsprechen. *Einem Elemente e entsprechen alsdann einfach unendlich viele Elemente E.*

So ist insbesondere der Fall mit unserer Kugel-Abbildung. Durch jeden Punkt in r geht nur *ein* ausgezeichnetes Element, dasjenige nehmlich, welches dem betreffenden Punkte durch den linearen Complex $(H=0)$ zugeordnet wird. Andererseits sind die ausgezeichneten Elemente E diejenigen, welche der Gleichung:

[1] Die folgende Discussion hätte richtiger ihren Platz im ersten Theile gefunden.

$$1 + P^2 + Q^2 = 0$$

genügen, hier vorausgesetzt, dass P und Q wie früher die partiellen Derivirten von Z hinsichtlich X und Y bezeichnen. Wie eine geometrische Betrachtung zeigt, *sind es die einfach unendlich vielen Elemente E, die sich an eine Gerade von Länge gleich Null anschliessen, welche demselben Elemente e des Raumes r entsprechen.*

38. Nach den obenstehenden Entwickelungen können wir den folgenden Satz aussprechen:

Wenn zwei Flächen f_1 und f_2 einander nach einer Haupttangenten-Curve berühren, und die Tangenten dieser Curve nicht dem linearen Complexe ($H = 0$) gehören, so berühren die Bildflächen F_1 und F_2 einander nach einer Krümmungslinie. In dem ausgeschlossenen Falle gehören alle Tangenten der Flächen f_1 und f_2, die durch einen Punkt der gemeinsamen Haupttangenten-Curve gehen, dem Complexe ($H = 0$), und alsdann kann man nur schliessen, dass die Bildflächen F_1 und F_2 in einer gemeinsamen Developpablen, welche den unendlich entfernten imaginären Kreis enthält, eingeschrieben sind (§ 25, 69, b).

Berücksichtigt man indessen, dass es keine partielle Differential-Gleichung giebt, deren krummlinige Charakteristiken sämmtlich von Geraden des *linearen* Complexes ($H = 0$) umhüllt werden, so lässt sich schliessen (§ 5, 13), dass unsere Kugel-Abbildung eine jede D_{11} in eine partielle Differential-Gleichung, deren Charakteristiken Krümmungslinien sind, überführt. Andererseits erhalten wir in dieser Weise alle Differential-Gleichungen von dieser Eigenschaft, weil der folgende Satz nach dem Obenstehenden ohne Ausnahme gilt:

Zwei Flächen F_1 und F_2, die einander nach einer Krümmungslinie berühren, geben in r Bildflächen, die sich nach einer gemeinsamen Haupttangenten-Curve berühren.

Es gehen also die im vorangehenden Paragraphen erhaltenen Resultate in die folgenden über.

Es giebt zwei distinkte Classen partieller Differential-Gleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken Krümmungslinien auf den Integralflächen sind. Gleichungen der ersten Classe können dadurch charakterisirt werden, dass sie als vollständiges Integral den Inbegriff *von zweifach unendlich vielen Kugeln — eine Kugel-Congruenz — gestatten. Das allgemeine Integral wird also von Röhrenflächen gebildet, und hierbei sind deren kreisförmige Krümmungslinien Charakteristiken. Die zweite Classe entspricht den Kugel-Complexen. Die Aufgabe, eine solche Differential-Gleichung zu integriren, kommt geometrisch darauf hinaus: die allgemeinste Fläche zu finden, deren zweifach unendlich viele Haupt-Kugeln des einen Systems einem gegebenen Complexe angehören. Den Inbegriff dieser beiden Classen werde ich mit dem Symbole D_{12} bezeichnen.*

39. In seinem Werke: *Partielle Differential-Gleichungen* pg. 127—129 stellt Herr *Du Bois-Reymond* die Aufgabe, die wir eben erledigt haben. Er macht darauf aufmerksam, dass wenn die Charakteristiken Krümmungslinien sind, so ist dieses auch mit den Trajectorien der Fall. Alsdann schneiden aber Charakteristiken und Trajectorien einander orthogonal und dadurch wird das besprochene Problem (§ 13, 35) darauf zurückgeführt, die partielle Differential-Gleichung:

$$\frac{dF}{dx}\left[\frac{dF}{dq}+q\left(p.\frac{dF}{dp}+q\frac{dF}{dq}\right)\right]-\frac{dF}{dy}\left[\frac{dF}{dp}+p\left(p\frac{dF}{dp}+q\frac{dF}{dq}\right)\right]+\frac{dF}{dz}\left[p\frac{dF}{dq}-q\frac{dF}{dp}\right]=0$$

zu integriren. Herr Du Bois-Reymond führt diese Integration in einigen einfachen Fällen aus, und aüssert dabei die Vermuthung, dass auch der allgemeine Fall keine erheblichen analytischen Schwierigkeiten bieten würde. Sei damit, wie es will. Jedenfalls scheint mir die obenstehende Lösung interessant.

Hier mag auch die Bemerkung ihren Platz finden, dass wenn zwei Flächen f_1 und f_2 mit einander eine Berührung n^{ter} Ordnung nach einer Haupttangenten-Curve haben, so stehen die Bildflächen im Allgemeinen imselben gegenseitigen Verhältnisse längs einer Krümmungslinie. Demzufolge wird eine partielle Differential-Gleichung n^{ter} Ordnung, deren Charakteristiken des einen Systems Haupttangenten-Curven auf den Integralflächen sind, durch unsere Kugel-Abbildung in eine Gleichung derselben Ordnung übergeführt, deren Charakteristiken des einen Systems Krümmungslinien sind.

§ 15.

Partielle Differential-Gleichungen erster Ordnung, deren Charakteristiken geodätische Curven auf den Integralflächen sind.

40. Die Entwickelungen dieses Paragraphen gründen sich auf den bekannten Satz: Wenn zwei Flächen I und U mit einander eine Berührung n^{ter} Ordnung nach einer Krümmungslinie haben, so stehen ihre Centerflächen C_i und C_u imselben gegenseitigen Verhältnisse hinsichtlich einer gemeinsamen geodätischen Curve.

Betrachtet man nun einerseits die Intergralflächen I einer D_{12} und unter denselben die Flächen U eines vollständigen Integrals, andererseits die zugehörigen Centerflächen C_i und C_u, so sieht man leicht (§ 5, 13), dass die Flächen C_i einer partiellen Differential-Gleichung erster Ordnung D_{13} genügen, deren Charakteristiken geodätische Curven sind, und hierbei bilden die Flächen C_u ein vollständiges Integral.

Allgemeiner können wir sagen, dass den Integralflächen einer partiellen Differential-Gleichung n^{ter} Ordnung D_{n2}, deren Charakteristiken des einen Systems Krümmungslinien sind, Centerflächen entsprechen, welche einer Differential-Gleichung derselben Ordnung D_{n3} genügen, und zwar sind die Charakteristiken des einen Systems geodätische Curven.

Nach dem Obenstehenden entspricht jeder D_{n2} eine Differential-Gleichung, deren Charakteristiken geodätische Curven sind; das Umgekehrte ist dagegen nicht wahr, und demzufolge sind die D_{n3} nicht die einzigen partiellen Differential-Gleichungen, welche die Eigenschaft besitzen, dass ihre Charakteristiken geodätische Curven sind.

41. Wir werden die allgemeine Form der Gleichungen D_{13} bestimmen und ferner zeigen, *dass jeder D_{13} eine Schaar Flächen:*

$$F(X\,Y\,Z) = H = \text{Const.}$$

entspricht, welche eine jede Integralfläche nach äqvidistanten Curven schneiden; hierbei sind die zugehörigen Orthogonal-Curven die Charakteristiken der betreffenden Fläche.

Sei denn gegeben im Raume r ein beliebiger Linien-Complex und in R der entsprechende Kugel-Complex, die sich beide durch eine Gleichung:

$$F(X\,Y\,Z\,H) = 0$$

darstellen lassen; hierbei muss man X, Y, Z, H einerseits als Linien-Coordinaten (§ 9, 24) hinsichtlich vier paarweise in Involution liegender linearer Complexe, andererseits als Kugel-Coordinaten auffassen. *Indem wir nun den Mittelpunkt (X Y Z) einer beliebigen Kugel (X Y Z H) des besprochenen Kugel-Complexes als das Bild der Geraden (X Y Z H) auffassen, erhalten wir eine Abbildung des Linien-Complexes [F (X Y Z H) = 0] im Punkt-Raume R,* bei welcher einer jeden Complex-Linie ein bestimmter Punkt entspricht, während es eine Zahl Complex-Gerade giebt, die sich als derselbe Punkt abbilden — soviele nehmlich wie der Grad der Gleichung [F (X Y Z H) = 0] hinsichtlich H. Den Complex-Linien, die durch einen Punkt gehen, entsprechen die Punkte einer Curve C, und es ist einleuchtend, dass *alle C einen Curven-Complex bilden, der zu unserem Linien-Complexe in der reciproken Beziehung steht,* die wir im ersten Abschnitte betrachtet haben.

Setzt man [§ 9, 22 (18)] in die Gleichungen einer Geraden:

$$rz = x - \rho, \quad sz = y - \sigma$$

die Werthe:[1]

$$\rho = \tfrac{1}{2}(X + iY), \quad s = \tfrac{1}{2}(X - iY),$$
$$\sigma = \tfrac{1}{2}(Z \pm H), \quad r = -\tfrac{1}{2}(Z \mp H)$$

ein, so bestimmen die hervorgehenden Relationen:

$$-(Z \mp H)z = 2x - (X + iY)$$
$$(X - iY)z = 2y - (Z \pm H),$$

in denen man H als die durch [F (X Y Z H) = 0] bestimmte Funktion von X, Y, Z auffasst, die eben besprochene Abbildung der beiden Raüme. Indem man nun (§ 3, 6) hinsichtlich X, Y, Z differentiirt:

$$-(dZ \mp dH)z = -(dX + idY)$$
$$(dX - idY)z = -(dZ \pm dH),$$

und zwischen diesen beiden [und den ursprünglichen] Gleichungen x, y, z eliminirt, erhält man die *Differential-Gleichung des Curven-Complexes in R:*

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 + (idH)^2 = 0,$$

oder wie man auch schreiben kann:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dH^2,$$

[1] In den Formeln der Paragraphen 8 und 9 kann man *immer* statt A, B und λ 1 setzen.

eine Gleichung, deren geometrische Bedeutung ist, dass die beiden Kugeln (X Y Z H) *und* ($X + \varDelta X$, $Y + \varDelta Y$, $Z + \varDelta Z$, $H + \varDelta H$) *einander berühren, dass also die entsprechenden Geraden sich schneiden.*

Die elementaren Complex-Kegel:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \left(\frac{dH}{dX}\,dX + \frac{dH}{dY}\,dY + \frac{dH}{dZ}\,dZ\right)^2$$

berühren, wie ihre Gleichung zeigt, den unendlich weit entfernten, imaginären Kreis in den beiden Durchschnittspunkten desselben mit der Ebene:

$$\frac{dH}{dX}\,dX + \frac{dH}{dY}\,dY + \frac{dH}{dZ}\,dZ = 0,$$

und also sind sie Umdrehungs-Kegel, deren Axe die Richtungs-Cosinus: $\frac{dH}{dX}$, $\frac{dH}{dY}$, $\frac{dH}{dZ}$ besitzt. Wir erhalten somit die folgende übersichtliche Vorstellung von diesem Curven-Complexe:

Die elementaren Complex-Kegel, deren Scheitel auf einer beliebigen Fläche aus der Schaar ($H = Const.$) liegen, sind Umdrehungs-Kegel, deren Axe die entsprechende Normale der genannten Fläche ist. Die Winkel-Öffnung dieser Kegel variirt, wie die Gleichung: $dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dH^2$ zeigt, in solcher Weise, dass die unendlich nahen Flächen ($H = C$) und ($H = C + \varDelta C$) auf den Erzeugenden dieser Kegel Segmente derselben Grösse abschneiden.

Man betrachte nun eine beliebige auf ($H = C$) gelegene Curve K und die den Punkten derselben zugehörigen elementaren Complex-Kegel, deren infinitesimale Durchschnitts-Curven mit der Fläche ($H = C + \varDelta C$) eine Umhüllungs-Curve K′ bestimmen; bekanntlich gehört der zwischen K und K′ gelegene Flächen-Streifen einer Integralfläche. Durch Wiederholung dieser Operation findet man auf den successiven Flächen ($H = C$) eine Schaar Curven K, deren Inbegriff eine Integralfläche bilden, und es folgt aus dem Obenstehenden, dass alle K äqvidistante Curven sind. Nun stehen immer die Tangente einer K und die Axe des zugehörigen Complex-Kegels senkrecht auf einander, und also berührt dieser Kegel die betreffende Integralfläche nach einer Richtung, die ebenso K's Tangente orthogonal schneidet. *Die Charakteristiken und die Curven K bilden, wie früher behauptet, ein Orthogonal-System.* Die Curven

K sind aber äqvidistant, und also finden wir den Satz wieder, dass die Charakteristiken einer D_{13} geodätische Curven auf den Integralflächen sind.

Um die der Differential-Gleichung:

$$W = dX^2 + dY^2 + dZ^2 - \left(\frac{dH}{dX} dX + \frac{dH}{dY} dY + \frac{dH}{dZ} dZ\right)^2 = 0$$

zugehörige partielle Differential-Gleichung zu bestimmen, muss man unter den Gleichungen:

$$\frac{dW}{dX} = \rho P, \frac{dW}{dY} = \rho Q, \frac{dW}{dZ} = -\rho$$

die Grössen dX, dY, dZ eliminiren, und hierbei findet man als *allgemeine Form der partiellen Differential-Gleichungen D_{13}:*

$$\frac{dH}{dX}P + \frac{dH}{dY}Q - \frac{dH}{dZ} = \sqrt{1 + P^2 + Q^2}\sqrt{\left(\frac{dH}{dX}\right)^2 + \left(\frac{dH}{dY}\right)^2 + \left(\frac{dH}{dZ}\right)^2 - 1},$$

vorausgesetzt, dass H eine beliebige, bekannte Funktion von X, Y, Z bezeichnet.

Aus unseren früheren Entwickelungen (§ 5, 14) folgt, dass die Integration einer D_{13} auf die Bestimmung der Haupttangenten-Curven des entsprechenden Linien-Complexes zurückgeführt werden kann. Die betreffenden Charakteristiken sind ja reciproke Curven hinsichtlich der Abbildungs-Gleichungen:

$$-(Z \mp H)z = 2x - (X + iY)$$
$$(X - iY)z = 2y - (Z \pm H),$$

und wenn man also die allgemeine Gleichung des einen Curven-Systems kennt, so findet man diejenige des anderen durch Differentiation und Elimination.

Die partiellen Differential-Gleichungen D_{11}, D_{12}, D_{13} (oder allgemeiner D_{n1}, D_{n2}, D_{n3}) bilden äqvivalente Probleme, indem immer drei Aufgaben dieser drei Classen derart zusammenhören, dass sie gegenseitig in einander transformirt werden können.

§ 16.

Ueber Linien-Complexe, welche infinitesimale lineare Transformationen in sich selbst besitzen.[1]

[1] Cfr. *Sur une certaine famille de courbes et de surfaces* par Klein et Lie. Comptes rendus 1870. *Ueber vertauschbare lineare Transformationen*, Math. Ann. 1871.

42. Linien-Complexe, die sich durch eine Gleichung von der Form:

$$F(X Y Z) = 0$$

darstellen lassen, bilden sich als die Kugeln ab, deren Mittelpunkte auf der Fläche $[F(X Y Z) = 0]$ liegen. Dieser Kugel-Complex wird nun offenbar durch eine *beliebige* Parallel-Transformation, oder was auf dasselbe hinauskommt, durch eine *infinitesimale* solche in sich selbst übergeführt, und also können wir nach § 12, 33 den Linien-Complex $[F(X Y Z) = 0]$ dadurch charakterisiren, dass er eine infinitesimale Transformation von der Form:

$$z_1 = z_2; \; x_1 = x_2 + az_2 + b; \; y_1 = y_2 + cz_2 + d$$

gestattet. Nun ist es bekannt, dass die Aufgabe, die allgemeine Fläche zu finden, deren Krümmungs-Centra des einen Systems auf einer gegebenen Fläche liegen, darauf hinauskommt, die geodätischen Curven dieser Fläche zu finden. Unsere frühere Theorien geben also den folgenden interessanten Satz:

Die Bestimmung der Haupttangenten-Curven des Linien-Complexes $[F(X Y Z) = 0]$ und die Auffindung der geodätischen Curven auf der Fläche $[F(X Y Z) = 0]$ sind äqvivalente Probleme.

Es ist zu bemerken, dass der Grad des Linien-Complexes gleich der Ordnung der Fläche ist; während aber die Fläche eine beliebige ist, so muss der Complex die besprochene infinitesimale Transformation in sich selbst besitzen.

Unter den linearen Tangential-Complexen des Kugel-Complexes $[F(X Y Z) = 0]$ betrachte ich den folgenden:

$$\frac{dF_0}{dX_0}(X - X_0) + \frac{dF_0}{dY_0}(Y - Y_0) + \frac{dF_0}{dZ_0}(Z - Z_0) = 0,$$

dessen Kugeln eine Tangential-Ebene der Fläche $[F(X Y Z) = 0]$ orthogonal schneiden (§ 9, 24). Eine beliebige Parallel-Transformation führt sowohl den gegebenen Complex wie den Tangential-Complex in sich selbst über, und also sehen wir, dass diese Complexe einander in einfach unendlich vielen gemeinsamen Kugeln berühren. Der Complex $[F(X Y Z) = 0]$ lässt sich in Folge dessen als Enveloppe-Gebilde von zweifach unendlich vielen linearen Complexen auffassen. Wenden wir uns zu den Linien-Vorstellungen, so können wir den entsprechenden Linien-Complex definiren als Envelopp-Gebilde von zweifach unendlich vielen linearen Complexen, die mit einem gegebenen linearen Complex ($H = 0$) in Involution liegen, und ohnedies eine gemeinsame Gerade (die Fundamental-Gerade des Raumes r) enthalten (cfr. § 9, 24).

Zweifach unendlich viele lineare Complexe, die mit einem gegebenen in Involution liegen und ohnedies eine Gerade dieses letzten Complexes enthalten, umhüllen einen Linien-Complex, dessen Haupttangenten-Curven sich dadurch bestimmen lassen, dass man die geodätischen Curven einer gewissen Fläche aufsucht.

Im nächsten Abschnitte werde ich auf den Inhalt dieser Nummer zurückkommen.

43. Durch die Entwickelungen der vorangehenden Nummer wird man darauf geführt, sich die Frage zu stellen, ob die Bestimmung der Haupttangenten-Curven sich immer vereinfachen lässt, wenn der betreffende Linien-Complex eine infinitesimale lineare Transformation gestattet. Die Antwort liegt unmittelbar in den obengenannten Arbeiten von Herrn Klein und mir. Wir haben nehmlich überhaupt die Aufmerksamheit darauf gerichtet, dass wenn bei einem Gebilde eine infinitesimale Transformation bekannt ist, so lässt sich die Bestimmung von anderen Gebilden, die mit dem gegebenen in einer durch die betreffende Transformation unzerstörbaren Beziehung stehen, im Allgemeinen durch passenden Coordinaten-Wahl vereinfachen.

Hierbei muss man diejenigen Curven anwenden, die den geometrischen Ort bilden für die infinitesimalen Wege, welche alle Punkte des Raumes während der besprochenen Transformation beschreiben. Setzen wir insbesondere voraus, dass die bekannte Transformation eine lineare ist, so werden diese Curven eben die von Herrn Klein und mir unter der Bezeichnung Raum-Curven W untersuchten. Man ordne die betreffenden, zweifach unendlich vielen Curven W auf zwei Weisen zusammen in Flächen-Schaaren:

$$U_1 = A; \; U_2 = B.$$

Es geht alsdann jede Fläche U_1 oder U_2 durch die zugehörige

Transformation in sich über. Man wähle ferner eine dritte Schaar: diejenigen Flächen

$$V = C$$

nehmlich, die aus einer beliebig gewählten durch continuirliche Anwendung der betreffenden Transformation hervorgehen, und hierbei soll C der Parameter der Transformation sein.

Führt man nun U_1, U_2 und V als Punkt-Coordinaten ein, so nimmt beispielweise die Gleichung einer jeden Fläche, die jene Transformation gestattet, die Form an:

$$F(U_1\, U_2) = 0.$$

Ebenso kann eine partielle Differential-Gleichung erster Ordnung, deren Inbegriff von elementaren Complex-Kegeln ungeändert bleibt, folgenderweise geschrieben werden:

$$F\left(U_1\, U_2\, \frac{dV}{dU_1}\, \frac{dV}{dU_2}\right) = 0,$$

was bekanntlich ein Schritt vorwärts ist. Dieses ist insbesondere der Fall mit der D_{11} eines Linien-Complexes, der selbst ungeändert bleibt.

Betrachten wir z. B. die vier paarweise in Involution liegenden linearen Complexe $(X = 0)$ $(Y = 0)$ $(Z = 0)$ $(H = 0)$ und einen Linien-Complex, dessen Gleichung die folgende ist:

$$F\left(\frac{X}{H}\, \frac{Y}{H}\, \frac{Z}{H}\right) = 0,$$

so ist es einleuchtend, dass eine jede Transformation unter den unendlich vielen:

$$X_1 = mX_2,\ Y_1 = mY_2,\ Z_1 = mZ_2,\ H_1 = mH_2$$

unseren Complex in sich überführt, und also nimmt die zugehörige D_{11} die obenstehende Form. Hierher gehört, wie im nächsten Abschnitte gezeigt werden soll, ein Complex zweiten Grades mit 17 Constanten. Die Complexe zweiten Grades mit 18 und 19 Constanten gestatten keine infinitesimale, lineare Transformation.[1]

[1] Der Linien-Complex $\left[F\left(\frac{X}{H}\, \frac{Y}{H}\, \frac{Z}{H}\right) = 0\right]$ lässt sich auch definiren als Enveloppe-Gebilde von zweifach unendlich vielen linearen Complexen, die mit zwei gegebenen linearen Complexen in Involution liegen, und zwar müssen diese beiden Complexe in derselben Beziehung zu einander stehen.

44. Ebenso ist es für die Untersuchung von räumlichen Gebilden, welche zwei infinitesimale und permutable lineare Transformationen gestatten, vortheilhaft einen besonderen Coordinaten-Wahl zu machen. Erstens nimmt man die einfach unendlich vielen Flächen

$$V = A,$$

die durch unsere Transformationen ungeändert bleiben. Man wähle ferner zwei distinkte *infinitesimale* Transformationen β, γ aus unserem geschlossenen Systeme und endlich zwei Flächen B_0 und C_0. Durch continuirliche Anwendung der Transformationen β und γ auf diese Flächen erhält man zwei Flächen-Schaaren:

$$U_1 = B, \; U_2 = C,$$

und hier sollen B und C Transformations-Constanten bezeichnen. Wählt man nun V, U_1 und U_2 zu Punkt-Coordinaten, so nimmt die D_{11} eines Linien-Complexes, der durch unsere Transformationen ungeändert bleibt, die Form:

$$F\left(V \frac{dV}{dU_1} \frac{dV}{dU_2}\right) = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung lässt sich bekanntlich auf eine Quadratur zurückführen.

Wir treffen somit eine Classe Complexe, deren Haupttangenten-Curven wir bestimmen können. Hierher gehört z. B. der Complex zweiten Grades, dessen Singularitäten-Fläche in zwei Flächen zweiten Grades zerfallen ist.

§ 17.

Trajectorie-Kreis. Trajectorie-Curve.

45. Sei gegeben ein Linien-Complex $[F(X\,Y\,Z\,H) = 0]$ und eine Gerade desselben $(X_0\, Y_0\, Z_0\, H_0)$. Nach Plücker giebt es einfach unendlich viele lineare Complexe, welche $[F(X\,Y\,Z\,H) = 0]$ in der gegebenen Complex-Linie berühren, und alle diese Tangential-Complexe haben mit dem gegebenen Complexe diejenigen Geraden desselben gemeinsam, welche der Gerade $(X_0\, Y_0\, Z_0\, H_0)$ unendlich nahe sind und zugleich dieselbe schneiden. In unserer Coordinaten-Bestimmung ist einer dieser Tangential-Complexen ausgezeichnet, der folgende nehmlich:

$$H - H_0 = \frac{dH_0}{dX_0}(X - X_0) + \frac{dH_0}{dY_0}(Y - Y_0) + \frac{dH_0}{dZ_0}(Z - Z_0).$$

Dieses überträgt sich Alles auf den Kugel-Complex $[F(X\,Y\,Z\,H) = 0]$. Nun sind es diejenigen Kugeln dieses Complexes, welche der gegebenen Kugel $(X_0\,Y_0\,Z_0\,H_0)$ zugleich unendlich nahe sind und sie *berühren,* welche allen Tangential-Complexen gehören. Setzt man in der Gleichung unseres ausgezeichneten Tangential-Complexes:

$$H - H_0 = \frac{dH_0}{dX_0}(X - X_0) + \frac{dH_0}{dY_0}(Y - Y_0) + \frac{dH_0}{dZ_0}(Z - Z_0)$$

H gleich Null, so findet man bekanntlich (§ 9, 24) den geometrischen Ort für Berührungspunkte zwischen unendlich nahen Kugeln dieses linearen Complexes. Es folgt hieraus, *dass die Kugel $(X_0\,Y_0\,Z_0\,H_0)$ des Complexes $[F\,(X\,Y\,Z\,H) = 0]$ in Punkten des Kreises:*

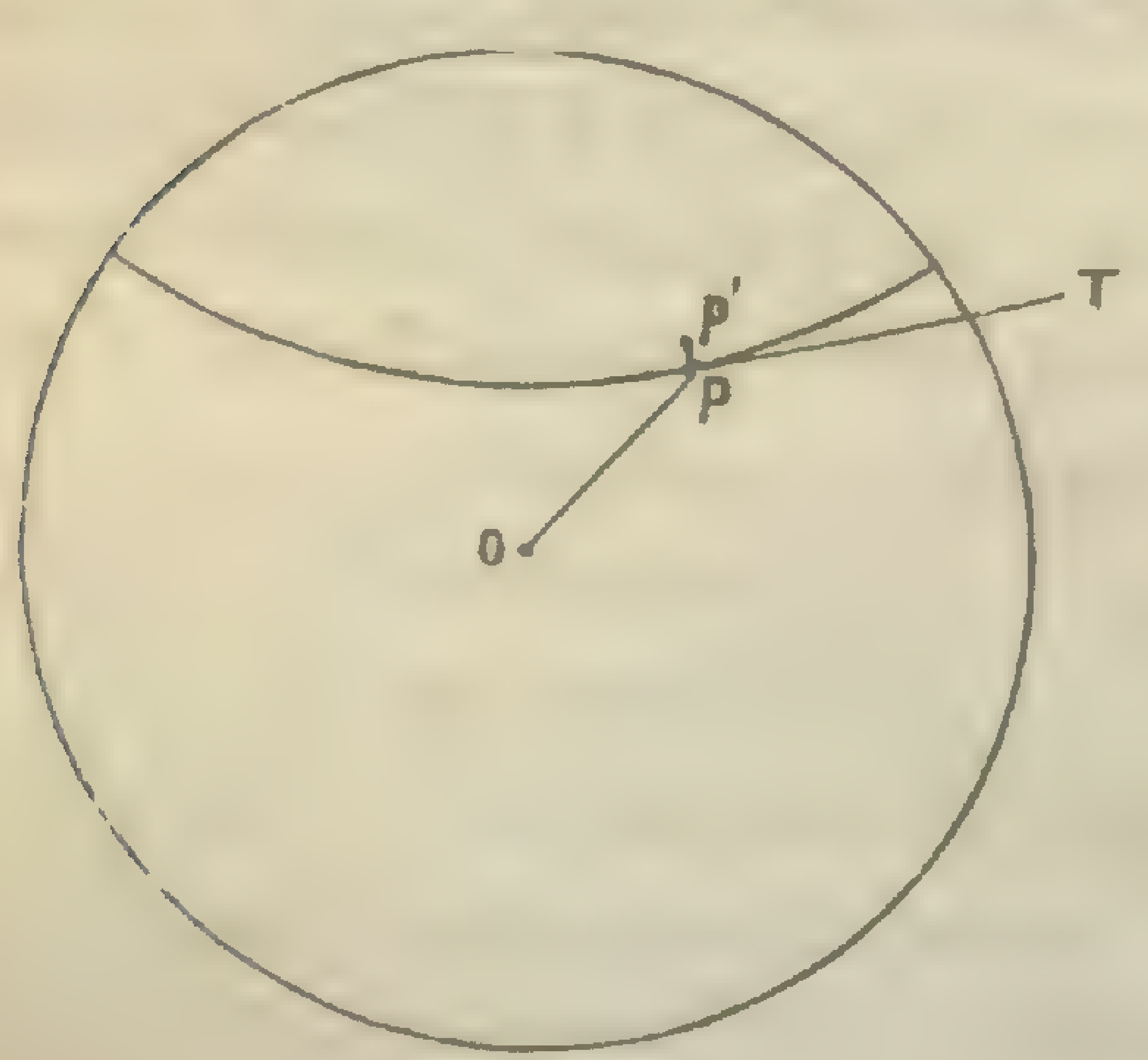
$$(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2 = H_0^2$$

$$H_0 + \frac{dH_0}{dX_0}(X - X_0) + \frac{dH_0}{dY_0}(Y - Y_0) + \frac{dH_0}{dZ_0}(Z - Z_0) = 0$$

von unendlich nahen Kugeln desselben Complexes berührt wird. Dieser Kreis befindet sich offenbar auf dem elementaren Complex-Kegel:

$$(X-X_0)^2 + (Y-Y_0)^2 + (Z-Z_0)^2 = \left[\frac{dH_0}{dX_0}(X-X_0) + \frac{dH_0}{dY_0}(Y-Y_0) + \frac{dH_0}{dZ_0}(Z-Z_0)\right]^2.$$

Erinnert man sich nun der geometrischen Bedeutung (§ 14, 38) einer D_{12}, so sieht man, dass eine jede Integralfläche[1] unseres Kugel-Complexes, welche $(X_0\,Y_0\,Z_0\,H_0)$ als Haupt-Kugel besitzt, von derselben *in einem Punkte P des besprochenen Kreises berührt wird,* und zwar behaupte ich, dass *die zugehörige Tangente P T dieses Kreises jedesmal die entsprechende Trajectorie-Richtung ist.*



Die Gerade P O — O ist der Mittel-Punkt unserer Kugel — berührt nehmlich in O eine auf der Centerfläche unserer Integralfläche gelegene geodätische Curve, deren

[1] Die Integralflächen einer D_{11} oder D_{12} bezeichne ich zuweilen der Kürze wegen als Integralflächen des zugehörigen Linien- oder Kugel-Complexes.

Tangenten die Integralfläche in den Punkten einer Charakteristik (Krümmungslinie) treffen. Bezeichnet nun P′ einen von diesen Punkten, der P unendlich nahe liegt, so osculirt die Ebene O P P′ die besprochene geodätische Curve in O, und steht in Folge dessen senkrecht auf der Ebene O P T, die zugleich den elementaren Complex-Kegel

$$(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2+(Z-Z_0)^2=\left[\frac{dH_0}{dX_0}(X-X_0)+\frac{dH_0}{dY_0}(Y-Y_0)+\frac{dH_0}{dZ_0}(Z-Z_0)\right]^2$$

nach der Geraden O P und die Centerfläche im Punkte O berührt. Die elementare Linie PP′ schneidet also die Krümmungs-Richtung P T orthogonal — P T ist die Trajectorie-Richtung. *Den besprochenen Kreis, der in Untersuchungen über Kugel-Complexe eine fundamentale Rolle spielen wird, nenne ich den Trajectorie-Kreis der Kugel* ($X_0\,Y_0\,Z_0\,H_0$).

Eine sinnliche Vorstellung des Problemes, eine gegebene D_{12} zu integriren, erhält man folgenderweise. Eine jede partielle Differential-Gleichung ersten Grades:

$$F(x\,y\,z\,p\,q)=0$$

scheidet aus den fünffach undendlich vielen Flächen-Elementen des Raumes vierfach unendlich viele aus. Die einer D_{12} entsprechenden Flächen-Elemente vertheilen sich insbesondere in dreifach unendlich viele Schaaren, deren jede von einfach unendlich vielen Elementen gebildet ist, die auf einer Kugel des gegebenen Complexes liegen und sich an den Trajectorie-Kreis desselben anschliessen.

Hier mag die Bemerkung ihren Platz finden, dass man aus der Gleichung eines Kugel-Complexes [$H=F(X\,Y\,Z)$] folgenderweise die Differential-Gleichung zwischen $X\,Y\,Z\,dX\,dY\,dZ$ finden kann, welche die Trajectorien der zugehörigen D_{12} befriedigen. Unter den beiden Gleichungen des Trajectorie-Kreises:

$$U=(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2+(Z-Z_0)^2-H_0^2=0$$

$$V=H_0+\frac{dH_0}{dX_0}(X-X_0)+\frac{dH_0}{dY_0}(Y-Y_0)+\frac{dH_0}{dZ_0}(Z-Z_0)=0$$

und den entsprechenden Differential-Gleichungen:

$$\frac{dU}{dX}dX+\frac{dU}{dY}dY+\frac{dU}{dZ}dZ=0$$

$$\frac{dV}{dX}dX+\frac{dV}{dY}dY+\frac{dV}{dZ}dZ=0$$

eliminirt man $X_0\,Y_0\,Z_0$, und so geht die gewünschte Gleichung hervor.

Um endlich die partielle Differential-Gleichung D_{12} selbst aus der Gleichung des Kugel-Complexes zu finden, könnte man in folgender Weise vorgehen. Der Trajectorie-Kreis genügt der Gleichung:

$$H_0 + \frac{dH_0}{dX_0}(X - X_0) + \frac{dH_0}{dY_0}(Y - Y_0) + \frac{dH_0}{dZ_0}(Z - Z_0) = 0, \quad (1)$$

ferner gelten für die Flächen-Elemente unserer Kugel, die sich an diesen Kreis anschliessen, welche somit der Gleichung D_{12} genügen, die folgenden Relationen:

$$X—X_0 = \frac{H_0 \,.\, P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}};\ Y—Y_0 = \frac{H_0\, Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}};\ Z—Z_0 = \frac{-H_0}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}. \quad (2)$$

Bei Einsetzung dieser Werthe in (1) findet man:

$$\sqrt{1+P^2+Q^2} + P \,.\, \frac{dH_0}{dX_0} + Q\frac{dH_0}{dY_0} - \frac{dH_0}{dZ_0} = 0,$$

und in diese Gleichung muss man statt $X_0\,Y_0\,Z_0$ setzen die aus (2) genommenen Werthe dieser Grössen, ausgedrückt durch X, Y, Z P und Q.

In den letzten analytischen Entwickelungen dachten wir uns immer H_0 als eine gegebene Funktion von $X_0\,Y_0\,Z_0$.

46. Unter den elementaren Complex-Kegeln einer D_{12}, deren Scheitel in einer Ebene liegen, giebt es einfach unendlich viele, welche diese Ebene berühren. Der Ort der betreffenden Scheitel ist eine Curve c, deren Tangente (als Trajectorie-Richtung) jedesmal senkrecht steht hinsichtlich der Berührungs Richtung des entsprechenden Complex-Kegels (die Richtung der Charakteristik). Die Curve c liesse sich auch definiren als *geometrischer Ort aller Flächen-Elemente unserer Ebene, welche der gegebenen D_{12} genügen.*

Man könnte ebenso alle elementare Complex-Kegel, deren Scheitel auf einer beliebigen Kugel liegen, betrachten und den Ort der Punkte suchen, deren zugehörige Kegel die Kugel berührt. Ich behaupte, dass auch nun *die Tangente dieser Curve und die entsprechende Berührungs-Richtung des Kegels orthogonal sind.* Zum Beweis ist nur erforderlich eine Transformation durch reciproke Radien auszuführen, in solcher Weise nehmlich, dass die Kugel in eine Ebene, der Kugel-Complex in einen neuen Kugel-Complex übergeht. Die besprochene Curve nennen wir die Trajectorie-Curve unserer Kugel, und es ist klar, wenn die Kugel dem Complexe gehört, dass dann die Trajectorie-Curve in den Trajectorie-Kreis und eine zweite Curve zerfällt. Wir können auch sagen, dass *die Trajectorie-Curve einer Kugel der geometrische Ort für alle Flächen-Elemente derselben ist, welche der gegebenen D_{12} genügen.*

Wenn die Kugel infinitesimal wird, so umhüllen diejenigen Flächen-Elemente derselben, die sich an die Trajectorie-Curve anschliessen, den betreffenden elementaren Complex-Kegel.

Der Kegel, dessen Spitze im Centrum einer beliebigen Kugel liegt und welcher die Trajectorie-Curve derselben enthält, geht, wenn die Kugel infinitesimal wird, in den entsprechenden *Normal-Kegel* über. Denkt man sich beispielweise, dass man eine D_{12} kennt, deren sämmtliche Trajectorie-Curven Kreise sind, so lässt sich schliessen, dass alle Normal-Kegel und also zugleich alle elementare Complex-Kegel *Umdrehungs-Kegel* sind. Alsdann hat unsere D_{12} die folgende Form:

$$\sqrt{1 + P^2 + Q^2} + F_1(XYZ)P + F_2(XYZ)Q + F_3(XYZ) = 0.$$

Ueber einige partielle Differential-Gleichungen zweiter Ordnung.

Partielle Differential-Gleichungen zweiter Ordnung theilen sich bekanntlich in zwei Gruppen, indem durch jeden Punkt einer Integralfläche entweder nur eine oder auch zwei Charakteristiken gehen können. Unter den Gleichungen der ersten Gruppe betrachte ich diejenigen, deren Charakteristiken Haupttangenten-Curven oder Krümmungslinien sind. Diese Gleichungen haben die folgende Form:

$$r + 2Fs + F^2t = 0 \qquad (D'_{21})$$

$$[rt - s^2]F^2 - [(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r]\sqrt{1+p^2+q^2}\,F + [1+p^2+q^2]^2 = 0 \qquad (D'_{22})$$

Ebenso betrachte ich unter den Gleichungen der zweiten Gruppe diejenigen, deren beide Schaaren Charakteristiken Haupttangenten-Curven oder Krümmungslinien sind. Die Form derselben ist:

$$rt - s^2 = F(x\,y\,z\,p\,q) \qquad (D''_{21})$$

$$r - \frac{1+p^2}{pq} s + \frac{1+q^2}{pq} F \,.\, s - F \,.\, t = 0. \qquad (D''_{22})$$

Die vier obenstehenden Gleichungen sind, wie man sieht, Specialfälle der bekannten Differential-Gleichung:

$$(rt - s^2) + Ar + Bs + Ct + D = 0. \qquad (1)$$

Man weiss, dass Gleichungen von dieser Art zuweilen ein oder zwei allgemeine erste Integrale besitzen, und es existirt sogar eine allgemeine Methode um zu entscheiden, ob dies bei einer gegebenen Gleichung der Fall ist. Dagegen hat man sich, so viel ich wüsste, nicht damit beschäftigt. die allgemeinste Form der Gleichungen (1) anzugeben, welche ein erstes Integral bezüglich zwei allgemeine erste Integrale zu geben. Es ist mir gelungen diese Bestimmung für die Gleichungen D'_{21}, D'_{22}, D''_{21}, D''_{22} durchzuführen, und ich möchte sogleich hervorheben, dass die Lösung dieser Fragen eine sehr einfache Form erhält, wenn man die Begriffe Linien-Complex, Linien-Congruenz, Kugel-Complex und Kugel-Congruenz anwendet.

§ 18.

Partielle Differential-Gleichungen zweiter Ordnung, deren Integralflächen nur eine Schaar Charakteristiken enthalten, und zwar solche, welche Haupttangenten-Curven oder Krümmungslinien sind.

47. Zunächst bestimme ich die allgemeine Form aller partiellen Differential-Gleichungen zweiter Ordnung, deren Integralflächen nur eine Schaar Charakteristiken enthalten und zwar die Haupttangenten-Curven des einen Systems der betreffenden Fläche. Bezeichnet:

$$F(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t) = 0$$

die allgemeine partielle Differential-Gleichung zweiter Ordnung und ferner, wie gewöhnlich, R, S, T die partiellen Derivirten von F hinsichtlich r, s und t, so ist bekanntlich:

$$R\,dy^2 - S\,dy\,dx + T\,dx^2 = 0$$

die Differential-Gleichung der beiden Charakteristiken. Andererseits bestimmt:

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0$$

die Richtungen der beiden Haupttangenten, und also drückt:

$$Rr + Ss + Tt = 0 \qquad (1)$$

die Forderung aus, dass die beiden Charakteristiken überall hinsichtlich der entsprechenden Haupttangenten harmonische Lage haben sollen. Es sagt ferner:

$$4RT - S^2 = 0, \qquad (2)$$

dass die beiden Charakteristiken immer zusammenfallen. Gelten also sowohl (1) als (2), so fallen die beiden Richtungen der Charakteristiken überall mit der einen Haupttangenten zusammen, und das war unsere ursprüngliche Forderung.

Die Gleichung (1) zeigt, dass F die Form:

$$F\left(x\,y\,z\,p\,q\,\frac{r}{s}\,\frac{t}{s}\right) = 0$$

besitzt, und nennen wir hier der Kürze wegen beilaüfig $\frac{r}{s}$ und $\frac{t}{s}$ ρ und τ, so geht (2) in die folgende über:

$$4\,\frac{dF}{d\rho}\,\frac{dF}{d\tau} = \left(\rho\,\frac{dF}{d\rho} + \tau\,\frac{dF}{d\tau}\right)^2 \qquad (3)$$

eine Gleichung, die sich nach den allgemeinen Methoden integriren lässt. Man findet so als allgemeine Form der Gleichungen D'_{21}

$$r + 2Ns + N^2t = 0,$$ [1]

und hierbei genügt die Richtung der Charakteristik der Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = N(x\,y\,z\,p\,q).$$

Aus dem Obenstehenden folgt, dass eine jede D'_{21} der analytische Ausdruck des folgenden Problems ist: die allgemeine Fläche zu finden, deren Haupttangenten des einen Systems nach einem gegebenen Gesetz durch die Lage des entsprechenden Flächen-Elements $(x\,y\,z\,p\,q)$ bestimmt werden.

48. Es ist bekannt, dass wenn eine Differential-Gleichung:

$$ar + bs + ct + d = 0 \qquad (1)$$

ein particuläres erstes Integral:

$$u = 0 \qquad (2)$$

[1] Das singuläre Integral der Gleichung (3) giebt die bekannte Differential-Gleichung:

$$rt - s^2 = 0$$

Dieselbe besitzt bekanntlich ein allgemeines erstes Integral.

besitzt, so sind auf einer Fläche, welche (2) und also auch (1) genügt, die Charakteristiken hinsichtlich (2) zugleich Charakteristiken des einen Systems hinsichtlich (1). Es folgt hieraus (§ 13), dass *wenn eine D'_{21} ein erstes Integral $(u = 0)$ zugiebt, so muss dasselbe eine D_{11} sein,* und hierbei muss man erinnern, dass es zwei distinkte Classen D_{11} giebt.

Wir wissen, dass eine D'_{21} oder die äqvivalente Gleichung $\left(\frac{dy}{dx} = N\right)$ jedem Flächen-Element eine Richtung zuordnet. Betrachten wir nun die Elemente einer Ebene, so bildet offenbar die continuirliche Aufeinanderfolge dieser Richtungen eine Curven-Schaar c, die in diesem Paragraphe eine wichtige Rolle spielen wird.

Man denke sich, dass unserer D'_{21} als particuläres Integral eine D_{11} entspricht, und zwar eine, deren Charakteristiken die Geraden einer Congruenz sind. In jeder Ebene des Raumes liegen einige Gerade dieser Congruenz, und offenbar müssen dieselben in der dieser Ebene zugehörigen Curven-Schaar c enthalten sein.

Man setze andererseits voraus, dass unsere D'_{21} als particuläres Integral eine D_{11}, welche einen Linien-*Complex* entspricht, zugiebt. In einer beliebigen Ebene liegen einfach unendlich viele Complex-Linien, welche eine Curve K umhüllen. Es ist einleuchtend, dass K eine von den Curven c dieser Ebene sein muss.

Einfach unendlich viele Linien-Complexe bestimmen in jeder Ebene des Raumes eine Schaar Complex-Curven K. Man wähle, was immer möglich ist, die Funktion N in solcher Weise, dass diese Curven K eben die zugeordneten Curven c sind. Alsdann erhält man eine D'_{21}, die ein erstes Integral mit arbiträren Constanten besitzt.

Es ist andererseits leicht zu erkennen, dass eine D'_{21} höchstens einfach unendlich viele erste Integrale von dieser Art besitzen kann. Man betrachte nehmlich in einer beliebigen Ebene unter den einfach unendlich vielen Curven c eine bestimmte, ferner eine Tangente g derselben und endlich eine zweite Ebene E′, welche ebenso die Gerade g enthält. In E′ liegen einfach unendlich viele Curven c′, und unter denselben wähle man eine, welche g berührt. In dieser

Weise kann man nun unbegrenzt weiter gehen, und wir finden somit, dass eine gewählte Curve c zur Construktion des betreffenden Linien-Complexes *hinreicht,* vorausgesetzt natürlicherweise, dass diese Construktion möglich ist. Meine Behauptung ist also erwiesen:

Soll eine Gleichung von der Form $[r + 2Ns + N^2t = 0]$ *ein erstes Integral besitzen, welches keine lineare partielle Differential-Gleichung ist, so kann dasselbe zwar eine arbiträre Constante, dagegen keine arbiträre Funktion enthalten.*

49. Wenn die Curven c krumme Linien sind, so können nur erste Integrale von der eben besprochenen Art auftreten. Sind dagegen alle c gerade Linien, so existirt zuweilen ein allgemeines erstes Integral. Dies ist der Fall, wenn die allen Ebenen zugeordneten Geraden-Schaaren einen Complex und nicht den Inbegriff von allen Geraden des Raumes bilden. Alsdann ist jede in dem betreffenden Complexe enthaltene Linienfläche eine Integralfläche, und demzufolge entspricht jeder, diesem Complexe zugehörigen Congruenz eine D_{11}, die ein erstes Integral darstellt[1].

Soll die Gleichung $[r + 2Ns + N^2t = 0]$ *ein allgemeines erstes Integral besitzen, so muss die gewöhnliche Differential-Gleichung zwischen* x *und* y*:*

$$\frac{dy}{dx} = N(x, y, px + qy + k, p, q)$$

sich in der Form:

$$y = \pi x + f(\pi)$$

integriren lassen, und ohnedies muss zwischen den vier Linien-Coordinaten der Geraden:

$$y = \pi x + f(\pi); \; z = px + qy + k$$

eine Relation stattfinden. Der hierdurch definirte Linien-Complex bestimmt nach dem Obenstehenden sowohl ein allgemeines erstes Integral,

[1] Man sagt gewöhnlich, glaube ich, dass wenn die Integralflächen einer Gleichung:

$$A(rt - s^2) + Br + Cs + Dt + E = 0$$

nur eine Schaar Charakteristiken enthalten, so existirt höchstens *ein* allgemeines erstes Integral. Dieses ist nicht correkt. Beispielsweise *besitzt die einem Linien-Complexe zugehörige* D'_{21} *unbegrenzt viele allgemeine erste Integrale, die wesentlich verschieden sind* *wie das allgemeine zweite Integral mit zwei arbiträren Funktionen. In diesem Falle existirt nach (§ 3, 9) zugleich ein singuläres erstes Integral, die unserem Linien-Complexe zugehörige* D_{11} *nehmlich.*

Wenn endlich die Differential-Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = N(x, y, px + qy + k, p, q)$$

eine Zahl particuläre Lösungen von der Form $(y = \alpha x + \beta)$ zugiebt, und ferner zwei Relationen stattfinden zwischen den Linien-Coordinaten der Geraden:

$$y = \alpha x + \beta,\ z = px + qy + k,$$

so besitzt die gegebene D'_{21} als particuläres Integral die der hervorgehenden Linien-Congruenz zugehörige D_{11}.

50. Alles, was wir über Gleichungen D'_{21} gefunden haben, überträgt sich nun unmittelbar auf Differential-Gleichungen D'_{22}. Wir beschränken uns auf das Folgende:

Eine jede Differential-Gleichung zweiter Ordnung, deren Integralflächen nur eine Schaar Charakteristiken enthalten und zwar solche, welche Krümmungslinien sind, lässt sich als analytischer Ausdruck des folgenden Problems auffassen: die allgemeine Fläche zu finden, deren Haupt-Krümmungs-Radius des einen Systems von der Lage des Flächen-Elements nach einem gegebenen Gesetze abhängt.

Wir schliessen hieraus, dass die Gleichung der *Haupt-Krümmungs-Radien:*

$$(rt - s^2) R^2 - [(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r] \sqrt{1 + p^2 + q^2}\ R + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0,$$

vorausgesetzt, dass man in derselben R als eine beliebig gegebene Funktion von (x y z p q) auffasst, eben die allgemeine Form einer D'_{22} ist.

Wenn eine D'_{22} *dreifach unendlich viele Kugeln als particuläre Integrale besitzt, dann und nur dann existirt ein allgemeines erstes Integral. Dasselbe entspricht den in dem besprochenen Kugel-Complexe enthaltenen Kugel-Congruenzen. Die dem Complexe zugehörige* D_{12} *ist ein singuläres erstes Integral.*

Endlich möchte ich ausdrücklich aussprechen — was freilich in dem Obenstehenden implicite liegt —, dass jeder Linien- oder Kugel-Complex eine D'_{21} oder D'_{22} bestimmt, welche ein allgemeines erstes Integral besitzt.

§ 19.

Ueber partielle Differential-Gleichungen zweiter Ordnung, deren Integralflächen zwei Schaaren Charakteristiken und zwar eben die Krümmungslinien enthalten.

51. Herr Du Bois-Reymond findet,[1] dass die allgemeinste partielle Differential-Gleichung zweiter Ordnung, deren beide, und zwar distinkte, Schaaren Charakteristiken Krümmungslinien auf den Integralflächen sind, die folgende ist:

$$r - \left(\frac{1+p^2}{pq}\right)s + F\left(\frac{1+q^2}{pq}s - t\right) = 0 \qquad (1)$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Gleichung sich auch folgenderweise schreiben lässt:

$$[pqt-(1+q^2)s]f^2+[(1+p^2)t-(1+q^2)r]f+[(1+p^2)s-pqr]=0, \quad (2)$$

vorausgesetzt, dass f wie F eine willkürliche Funktion von (x y z p q) bezeichnet. Wenn man aber in (2) statt f $d_x y$ setzt, so erhält man eben die Differential-Gleichung der Krümmungslinien einer Fläche, und also können wir sagen:

Eine jede D''_{22} lässt sich als analytischer Ausdruck des folgenden Problems auffassen: die allgemeinste Fläche zu finden, deren Krümmungs-Richtungen nach irgend einem gegebenen Gesetz durch die Lage des entsprechenden Flächen-Elements bestimmt sind.

Man bemerke wohl, dass eine jede D''_{22} in der eben angegebenen Bedeutung jeden Flächen-Elemente zwei orthogonale Richtungen zuordnet. Betrachtet man nun alle Elemente einer Fläche, so bildet die continuirliche Aufeinanderfolge der zugeordneten Richtungen zwei orthogonale Curven-Schaaren, die ich mit den Symbolen s und σ bezeichnen werde. Eine Integralfläche unserer D''_{22} lässt sich dadurch charakterisiren, dass die zugeordneten Curven s und σ eben Krümmungslinien der Fläche sind. Im Folgenden *werden die einer beliebigen Kugel zugehörigen Curven s und σ eine wichtige Rolle spielen.*

52. Aus der Form der Differential-Gleichungen D''_{22} (§ 18, 48) folgt, dass *wenn eine solche Gleichung ein particuläres erstes Integral besitzt, so muss dasselbe eine D_{12} sein,* und hierbei ist zu erinnern, dass es zwei distinkte Classen D_{12} giebt.

[1] Partielle Differential-Gleichungen, pg. 130.

Setzen wir zunächst voraus, dass unser erstes Integral D_{12} einer *Kugel-Congruenz* entspricht. Eine jede Kugel dieser Congruenz wird von den unendlich nahen Kugeln derselben Congruenz nach einfach unendlich vielen Kreisen geschnitten, und offenbar bilden diese Schnittlinien in Verbindung mit den zugehörigen Orthogonal-Curven das unserer Kugel durch die gegebene D''_{22} zugeordnete Orthogonal-System (s, σ).

Es ist leicht zu erkennen, dass es D''_{22} giebt, welche einfach unendlich viele particuläre Integrale von dieser Art besitzen. Man denke sich nehmlich einfach unendlich viele Kugel-Congruenzen und auf jeder Kugel einer solchen Congruenz die besprochenen Kreise mit den zugehörigen Orthogonal-Curven. Es werden in dieser Weise jedem Flächen-Elemente des Raumes zwei orthogonale Richtungen zugeordnet, und es ist klar, dass die D''_{22}, welche eben diese Zuordnung bestimmt, durch die gegebenen einfach unendlich vielen D_{12} befriedigt wird.

Wir setzen nun die Existenz eines allgemeinen ersten Integrals von dieser Art:

$$u - f(v) = 0$$

voraus, wobei wir der Bequemlichkeit wegen *Linien*-Vorstellungen anwenden werden. Es bezeichnet alsdann jede der Gleichungen:

$$u = \text{Const.}, \quad v = \text{Const.}$$

einfach unendlich viele lineare Differential Gleichungen D_{11}, deren zugehörige Linien-Congruenzen jedesmal einen Complex bilden, und zwar werden wir erstens den Fall erledigen, dass die beiden Congruenz-Schaaren *demselben* Complexe gehören.

Ein in dem allgemeinen Integrale enthaltenes particuläres $[u - f_0(v) = 0]$ ordnet jedem Werthe von u ein entsprechendes Werth von v zu: $(u_0 v_0)$ $(u_1 v_1)$ . . . $(u_n v_n)$. Nun repräsentirt sowohl u_n als v_n eine dem Complexe gehörige Congruenz,[1] und

[1] Es ist zu erinnern, dass jede partielle Differential-Gleichung erster Ordnung vierfach unendlich viele Flächen-Elemente bestimmt. Einer linearen D_{11} entsprechen insbesondere Elemente, die sich in zweifach unendlich viele Gruppen vertheilen: die Elemente jeder Gruppe schliessen sich an eine Gerade der zugehörigen Linien-Congruenz an.

also stellt die Gruppe $(u_n\, v_n)$ eine in dem Complexe enthaltene Linienfläche dar; demzufolge ist auch $[u - f_0(v) = 0]$ eine lineare D_{11}, deren zugehörige Linien-Congruenz unserem Complexe gehört. Die Integralflächen der Differential-Gleichungen $[u - f(v) = 0]$ sind somit Linienflächen des Complexes. Es ist aber nach § 18, 4 9 die partielle Differential-Gleichung zweiter Ordnung, welche diese Flächen befriedigen, eine D'_{21} und nicht eine D''_{21}.

Seien nun die beiden Complexe (u) und (v) verschieden. Es enthalten alsdann im Allgemeinen zwei Congruenzen u_p und v_q nur eine endliche Zahl gemeinsame Gerade, und also durchziehen die gemeinsamen Elemente der Differential-Gleichungen u_p und v_q den ganzen Raum. Wir können somit sagen, dass die Gruppe $(u_p\, v_q)$ *jedem* Punkte ein Flächen-Element zuordnet. Man erhält zweifach unendlich viele solche Zuordnungen, und wenn man unter denselben nach einem beliebigen Gesetze einfach unendlich viele auswählt, so wird jedem Punkte einfach unendlich viele Elemente zugeordnet, und zwar soll die hierdurch definirte partielle Differential-Gleichung erster Ordnung eine lineare D_{11} sein. Als nun der Inbegriff dieser D_{11} ein *allgemeines* erstes Integral bilden soll, so muss jede Zuordnung unbegrenzt vielen D_{11} gehören können, und demzufolge muss dieselbe durch einen linearen Complex vermittelt sein; dieser Linien-Complex ist nehmlich der einzige, der die Eigenschaft besitzt, dass die durch einen Punkt gehenden Geraden einen ebenen Büschel bilden. Den zweifach unendlich vielen Zuordnungen entsprechen somit zweifach unendlich viele lineare Complexe, und zur Existenz eines allgemeinen ersten Integrals ist nothwendig, dass jedesmal einfach unendlich viele dieser Complexe, die beliebig gewählt sind, eine Congruenz gemein haben, dass ferner diese Congruenz mit der Complex-Schaar variirt. Dieses ist aber absurd.

Eine D''_{21} gestattet niemals als allgemeines erstes Integral lineare Differential-Gleichungen D_{11}.

Eine D''_{22} gestattet niemals als allgemeines erstes Integral Differential-Gleichungen D_{12}, welche Kugel-Congruenzen entsprechen.

53. Setzen wir nun voraus, dass eine gegebene D''_{22} als particuläres erstes Integral eine D_{12} zugiebt, die einem Kugel-*Complexe* entspricht, und betrachten wir eine Kugel dieses Complexes. Es ist nach § 16, 42 klar, dass *der entsprechende Trajectorie-Kreis sich unter den dieser Kugel durch die gegebene D''_{22} zugeordneten Curven (s, σ) befindet.* Existiren einfach unendlich viele Integrale dieser Art, so muss, weil einfach unendlich viele Kugel-Complexe alle Kugeln des Raumes umfassen, das einer beliebigen Kugel zugeordnete Orthogonal-System (s, σ) einen, oder einige Kreise enthalten.

Soll endlich ein allgemeines erstes Integral dieser Art existiren, so wären a priori zwei Fälle denkbar. Unter den einer Kugel zugeordneten Curven (s, σ) befinden sich entweder nur eine endliche Zahl oder auch unendlich viele Kreise. Ich werde beweisen, dass der erste Fall unmöglich ist.

Setzen wir denselben voraus. Bezeichnet alsdann $[H = F(XYZ)]$ einen Kugel-Complex, dessen zugehörige D_{12} ein erstes Integral ist, so liegt der Trajectorie-Kreis einer Kugel dieses Complexes in der Ebene (§ 16, 42):

$$-H_0 = \frac{dH_0}{dX_0}(X - X_0) + \frac{dH_0}{dY_0}(Y - Y_0) + \frac{dH_0}{dZ_0}(Z - Z_0).$$

Andererseits lässt die Gleichung dieser Ebene sich auch folgenderweise schreiben:

$$-H_0 = F_1(X - X_0) + F_2(Y - Y_0) + F_3(Z - Z_0),$$

und hierbei bezeichnen F_1, F_2, F_3 Funktionen von X_0, Y_0, Z_0, H_0, die nach dem Obenstehenden durch die gegebene D''_{22} bestimmt sind. Es gelten also die Gleichungen:

$$\frac{dH_0}{dX_0} = F_1, \quad \frac{dH_0}{dY_0} = F_2, \quad \frac{dH_0}{dZ_0} = F_3,$$

die — vorausgesetzt dass sie nicht contradictorisch sind, — ein Integral mit arbiträrer *Constanten* gestatten.

Wenn eine D''_{22} ein allgemeines erstes Integral gestatten soll, so muss das einer beliebigen Kugel zugeordnete Orthogonal-System (s, σ) aus einer Schaar Kreisen und den zugehörigen Orthogonal-Curven bestehen.

Soll eine D''_{22} zwei allgemeine erste Integrale besitzen, so muss *das einer beliebigen Kugel zugeordnete Orthogonal-System (s, σ) aus zwei Kreis-Schaaren bestehen. Es gehen alsdann, nach einer Bemerkung des Herrn Bonnet, die Kreise jeder Schaar durch zwei feste Punkte.*

Es ist in einem gegebenen Falle leicht zu verificiren, ob diese Bedingungen erfüllt sind. Ich muss hier zufügen, dass ich die Frage, ob die obenstehenden nothwendigen Forderungen auch *hinreichend* sind, nicht entschieden habe. Als es mir doch, wie ich später zeigen werde, gelungen ist die allgemeinste D''_{22} anzugeben, welche ein bezüglich zwei allgemeine erste Integrale besitzt, so scheint mir diese Frage von untergeordneter Bedeutung.

§ 20.

Ueber einige Gleichungen D''_{21} und D''_{22}.

54. Um nicht im Folgenden die Darstellung abbrechen zu müssen, schicke ich hier einige Entwickelungen voraus, auf welche ich mich später mehrmals stützen werde.

Die Gleichung:

$$F(X\,Y\,Z\,H\,\lambda) = 0$$

definirt, wenn λ ein Parameter ist, X, Y, Z, H Linien- oder Kugel-Coordinaten bezeichnen, einfach unendlich viele Complexe, die *linear* sein sollen. Denselben entspricht in gewöhnlicher Bedeutung des Wortes ein Envelopp-Gebilde A, dessen Gleichung man findet, wenn man zwischen $(F = 0)$ und $\left(\frac{dF}{d\lambda} = 0\right)$ die Grösse λ eliminirt.

Um eine geometrische Vorstellung von der dem Complexe A zugehörigen D_{11} oder D_{12} zu erhalten, kann man die folgenden Betrachtungen machen. Ein Linien-Complex ordnet im Allgemeinen jedem Punkte des Raumes einfach unendlich viele Flächen-Elemente zu, die den betreffenden Complex-Kegel umhüllen. Eine Ausnahme macht nur der lineare Complex, dessen Gerade bekanntlich dreifach unendlich viele ebene Büschel bilden. Dagegen ordnet der Inbegriff von einfach unendlich vielen linearen Complexen jedem Punkte einfach unendlich viele Elemente zu, und zwar umhüllen dieselben, wie eine einfache Ueberlegung zeigen wird, jedesmal den Complex-Kegel des Enveloppe-Complexes. Zwei consecutive lineare Complexe schneiden sich nehmlich nach einer linearen Congruenz, und demzufolge lässt der Envelopp-Complex A sich auffassen als gebildet von einer Schaar Congruenzen, aus denen immer zwei consecutive demselben Complexe gehören. Betrachtet man nun insbesondere unter A's Geraden solche, die durch einen Punkt gehen, so ist es klar, dass zwei unendlich nahe unter denselben jedesmal einem von den gegebenen linearen Complexen gehören, und also ist meine Behauptung erwiesen.

Andererseits wissen wir, dass die vierfach unendlich vielen Flächen-Elemente einer D_{12} sich an die dreifach unendlich viele Trajectorie-Kreise (§ 17, 45) anschliessen. Nun schneiden die Kugeln eines linearen Complexes die zugehörige Fundamental-Sphäre S (§ 9, 24) unter constantem Winkel und zwar jedesmal nach den Trajectorie-Kreisen. Es giebt alsdann nur dreifach unendlich viele ausgezeichnete Flächen-Elemente, die sich in zweifach unendlich viele elementare Umdrehungs-Kegel von derselben Winkel-Oeffnung zusammenfassen lassen, und hierbei liegen die Kegel-Spitzen auf S, ferner sind die Kegel-Axen Radien dieser Sphäre. *Betrachten wir nun einfach unendlich viele lineare Kugel-Complexe, so liegen also auf jeder der zugehörigen Fundamental-Sphären die Spitzen von zweifach unendlich vielen Umdrehungs-Kegeln, und der Inbegriff aller dieser Kegel giebt die geometrische Definition von der dem Envelopp-Complexe zugehörigen* D_{12}.

Es ist auch bemerkenswerth, dass eine jede solche D_{12} der analytische Ausdruck des folgenden Problems ist: *alle Flächen zu finden, die eine Schaar Kugeln unter gegebenen Winkeln schneiden;* hierbei sind die Schnitt-Curven Krümmungslinien des einen Systems.

Die elementaren Kegel unserer D_{12} sind im Allgemeinen, haben wir gesagt, Umdrehungs-Kegel, und also besitzen diese Gleichungen die folgenden Form:

$$F_1 \sqrt{1+p^2+q^2} + F_2 p + F_3 q + F_4 = 0;$$

hier bezeichnen alle F Funktionen von x, y, z, die indessen gewisse Relationen befriedigen müssen. Wir werden später beweisen (§ 21, 59), dass wenn eine D''_{22} ein allgemeines erstes Integral besitzt, so gehören die betreffenden Differential-Gleichungen erster Ordnung zu der hier besprochenen Categorie.

Wir setzen nun voraus, dass die gegebenen einfach unendlich vielen linearen Complexe C mit dem linearen Complexe ($H = 0$) in Involution liegen. Jeder C wird alsdann bekanntlich von den Orthogonal-Kugeln einer gegebenen Sphäre gebildet, und also degeneriren alle elementare Umdrehungs-Kegel in Ebenen-Büschel. Die dem Envellop-Complexe zugehörige D_{12} ist somit eine lineare partielle Differential-Gleichung, deren zweifach unendlich viele Charakteristiken die gegebenen Fundamental-Sphären orthogonal schneiden. Eine solche Gleichung entspricht dem von Herrn *Bonnet* gelöste Probleme: alle Flächen zu finden, welche einfach unendlich viele gegebene Kugeln orthogonal schneiden.[1]

55. *Wir fordern, dass in der Gleichung einer* D''_{22}:

$$[pqt-(1+q^2)s]f^2+[(1+p^2)t-(1+q^2)r]f+[(1+p^2)s-pqr]=0 \quad (1)$$

f nur die Variabeln x und y enthält, und suchen dabei die allgemeinste Form dieser Grösse, für welche unsere D''_{22} *zwei allgemeine erste Integrale zugiebt.*

Die Differential-Gleichung der Charakteristiken des einen Systems:

$$\frac{dy}{dx} = f(x\,y)$$

besitzt ein Integral mit arbiträren Constanten [$\varphi(x\,y) =$ Const.], welches eine Schaar Cylinder darstellt, und nach § 19, 51 ist es

[1] Es ist bemerkenswerth, dass es sonst keine lineare D_{12} giebt. Betrachten wir nehmlich zweifach unendlich viele Curven c, die nach einem arbiträren Gesetze zu Flächen zusammengefasst, immer Krümmungslinien derselben sind, und ferner das simultane System:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

dessen Integrale eben die Curven c bestimmen. Es lässt sich beweisen, dass ($Xdx + Ydy + Zdz$) der Integrabilitäts-Bedingung genügt, dass also die Curven c eine Flächen-Schaar S orthogonal schneiden. Nun bilden einfach unendlich viele c immer eine Fläche, die eine jede S orthogonal schneidet und zwar nach einer gemeinsamen Krümmungslinie dieser Flächen. Hieraus folgt, dass eine jede auf S gelegene Curve eine Krümmungslinie derselben ist, dass also alle S Kugeln sind.

klar, dass die Gleichung (1) alle Flächen bestimmt, deren Krümmungslinien des einen Systems auf diesen Cylindern liegen.

Das einer beliebigen Kugel (§ 19, 51) zugeordnete Orthogonal-System (s, σ) wird nun offenbar von den Durchschnitts-Curven mit den Cylindern (φ = Const.) in Verbindung mit den zugehörigen Orthogonal-Curven gebildet. Es soll aber nach § 19, 53 das System (s, σ) aus zwei Kreis-Schaaren bestehen. Unsere Cylinder müssen also eine jede Kugel und also zugleich eine jede Ebene nach Kreisen schneiden, und demzufolge sind sie selbst Ebenen. Ferner sollen die Kreise der beiden Schaaren s und σ jedesmal durch zwei feste Punkte gehen, und also enthalten die Ebenen (φ = Const.) eine gemeinsame Axe. *Wir werden somit geführt auf das von Joachimsthal gelöste Problem: alle Flächen zu finden, deren Krümmungslinien des einen Systems in einem Ebenen-Büschel liegen.*

Joachimsthal hat gezeigt, dass in diesem Falle zwei allgemeine erste Integrale existiren, und wir werden finden, dass dieselben zu der in der letzten Nummer besprochenen Categorie gehören. Man ordne jeder Ebene des Büschels (φ = Const.) nach einem *beliebigen* Gesetze einen Winkel zu und betrachte alle linearen Kugel-Complexe, deren Kugeln jedesmal eine Ebene φ unter dem betreffenden Winkel schneiden. Dem Envelopp-Complexe entspricht eine D_{12}, die nach 54 ein erstes Integral ist. Man betrachte andererseits einfach unendlich viele Sphären, deren Mittelpunkte auf der Axe des Ebenen-Büschels liegen. Es ist geometrisch evident, dass die Curven, welche diese Sphären orthogonal schneiden, in den Ebenen φ liegen, und also ist die *lineare* D_{12}, deren Charakteristiken (54, Schluss) diese Curven sind, ein erstes Integral.

Es ist leicht zu sehen, dass jedes der beiden allgemeinen ersten Integralen in einer gewissen Beziehung zu zweifach unendlich vielen linearen Complexen steht. Wenn ($L_1 + \lambda L_2 = 0$) alle Ebenen des Büschels φ darstellt, so definirt die Gleichung:

$$L_1 + \lambda L_2 + \mu H = 0,$$

in welcher λ und μ Paramenter bezeichnen, die zweifach unendlich vielen Complexe, deren Kugeln jedesmal eine Ebene φ unter constanten Winkel schneiden, deren Punkt-Kugeln also in dieser Ebene liegen. Alle diese Complexe bilden eine dreigliedrige Gruppe,[1] und enthalten also einfach unendlich viele *gemeinsame Kugeln, die Punkt-Kugeln nehmlich der Axe* des Ebenen-Büschels:

$$L_1 = 0, \; L_2 = 0, \; H = 0.$$

Andererseits giebt es zweifach unendlich viele Sphären, deren Mittelpunkte auf der Axe ($L_1 = 0$, $L_2 = 0$) liegen. Die zugehörigen Orthogonal-Kugeln bilden zweifach unendlich viele lineare Complexe, welche die *Ebenen φ als gemeinsame Kugeln* enthalten. Auch hier treffen wir somit eine dreigliedrige Gruppe.

Die Beziehung zwischen den beiden Gruppen wird vielleicht noch anschaulicher, wenn wir zum Linien-Raum r übergehen, und dabei erinnern, dass einer Geraden in R, aufgefasst einmal als Punktgebilde, andermal als Ebenengebilde, im Raume r die beiden Geraden-Schaaren eines Hyperboloids entsprechen. *Unsere beide dreigliedrige Gruppen linearer Complexe stehen also in der Beziehung, dass die gemeinsamen Geraden der einen Gruppe eine Fläche zweiten Grades bilden, deren Erzeugende des zweiten Systems allen Complexen der anderen Gruppe gehören. Solche Gruppen werde ich als conjugirte bezeichnen.*[2]

Die Joachimsthalsche Theorie giebt somit die folgenden für die Geometrie der Complexe bemerkenswerthen Resultate:

Es seien gegeben zwei conjugirte dreigliedrige Gruppen linearer Complexe. Man wähle in jeder Gruppe einfach unendlich viele, und suche die beiden zugehörigen Envelopp-Complexe; denselben entsprechen zwei partielle Differential-Gleichungen D_{11} (oder D_{12}), welche immer einfach unendlich viele gemeinsame Integrale besitzen. Alle D_{11}

[1] **Plücker neue Geometrie (1868—69) pg.**

[2] Seien ($x_1 = 0$) ($x_2 = 0$) . . . ($x_6 = 0$) Herrn Kleins sechs Fundamental-Complexe (zur Theorie . . . Math. Annalen, Bd. II, pg. 198.) Die beiden Gruppen: ($x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 = 0$) ($x_4 + \gamma x_5 + \delta x_6 = 0$) stehen in der hier besprochenen Beziehung. Ein Complex der ersten Gruppe liegt nach Herrn Kleins Ausdrucke immer in Involution mit einem jedem Complexe der zweiten Gruppe. *Klein*: die allgemeine lineare Transformation der Linien-Coordinaten, n. 5.)

der einen Gruppe bilden das allgemeine erste Integral einer D''_{21}, *welche noch ein allgemeines erstes Integral zugiebt, und zwar steht dieses in derselben Beziehung zu der zweiten Gruppe.*

Wählt man in der einen Gruppe die Complexe eines Büschels, so degenerirt der Envelopp-Complex in eine lineare Congruenz.[1] Die zugehörige lineare D_{11} ist natürlicherweise ein particuläres erstes Integral, und offenbar finden sich zweifach unendlich viele solche in jedem allgemeinen Integrale. Der obenstehende Satz über gemeinsame Integrale zeigt insbesondere, dass wenn man eine *lineare* D_{11} aus jedem allgemeinen Integrale nimmt, so besitzen dieselben einfach unendlich viele gemeinsame Integralflächen, und dieses ist a priori geometrisch evident; unsere beide lineare D_{11} entsprechen ja nehmlich linearen Congruenzen, deren Direktricen-Paar ein raümliches Vierseit bilden, und es giebt bekanntlich einfach unendlich viele Flächen zweiten Grades, die ein solches enthalten.

56. Der Fall, dass in der Gleichung einer D''_{22}:

$$[pqt-(1+q^2)s]f^2+[(1+p^2)t-(1+q^2)r]f+[(1+p^2)-pqr]=0$$

f nur p und q enthält, dass also die Richtungen der Krümmungslinien jedesmal nur von der *Richtung* des Flächen-Elements abhängen, entspricht dem bekannten Probleme: *alle Flächen zu finden, die eine gegebene sphärische Abbildung besitzen.* Das Orthogonal-System (s, σ) einer beliebigen Kugel ist nun mit dem gegebenen sphärischen Bilde, auf diese Kugel übergeführt identisch, und also geben unsere frühere Resultate (53) den folgenden Satz:

Die partielle Differential-Gleichung zweiter Ordnung, die alle Flächen von einer gegebenen sphärischen Abbildung definirt, kann nur unter der Voraussetzung ein allgemeines erstes Integral gestatten, dass

[1] Die Gruppe $(x_1+\alpha x_2+\beta x_3=0)$ enthält zweifach unendlich viele solche lineare Congruenzen K, deren Direktricen auf der zugehörigen Fläche zweiten Grades liegen. Ebenso bestimmt $(x_4+\gamma x_5+\delta x_6=0)$ zweifach unendlich viele lineare Congruenzen K', deren Direktricen der zweiten Erzeugung der besprochenen Fläche gehören. Zwei Congruenzen K und K' stehen somit immer in der Beziehung, dass die beiden Direktricen-Paar ein raümliches Vierseit bilden. *Zwei solche Congruenzen liegen, werde ich sagen, in Involution.*

jene Abbildung aus einer Schaar Kreise und den zugehörigen Orthogonal-Curven besteht; zwei allgemeine erste Integrale können nur auftreten, wenn auch diese letzten Curven Kreise sind.[1]

Herr *Bonnet* hat gezeigt, dass in den angegebenen Fällen ein bezüglich zwei allgemeine erste Integrale existiren, und wir werden nun dieselben etwas näher untersuchen. Wir betrachten die Ebene eines Kreises, der dem gegebenen sphärischen Bilde gehört, und ferner alle Kugeln, welche diese Ebene unter demselben Winkel wie die Bild-Kugel schneiden. Auf den hervorgehenden linearen Kugel-Complex führen wir alle mögliche Translationen aus und erhalten so einfach unendlich viele Complexe. Indem wir in derselben Weise mit allen Kreisen des sphärischen Bild's verfahren, bekommen wir *zweifach unendlich viele lineare Kugel-Complexe* C, und es ist einleuchtend, dass wenn man unter denselben nach einem beliebigen Gesetze einfach unendlich viele auswählt, so entspricht dem Envelopp-Complexe eine D_{12}, die ein erstes Integral ist.

Wir setzen nun insbesondere voraus, dass die sphärische Abbildung aus zwei Kreisschaaren besteht, und betrachten die durch zwei feste Punkte p_1 und p_2 gehenden Kreise der einen Schaar, die offenbar Trajectorie-Kreise sind für alle Complexe C, welche unsere Bild-Kugel Q enthalten. Diese Complexe haben ausser Q alle Punkt-Kugeln der Geraden $p_1\, p_2$ gemein: sie enthalten also zugleich die hierdurch bestimmte lineare Congruenz und bilden ein Büschel, dessen Gleichung sei:

$$L_1 + \lambda L_2 = 0.$$

Giebt man nun λ einen bestimmten Werth und versteht unter μ eine Constante, so ist

$$L_1 + \lambda L_2 + \mu = 0 \tag{1}$$

die Gleichung eines Complexes, in den der gewählte durch eine Translation übergeführt wird. Wir finden somit, dass die Complexe C eine dreigliedrige, durch (1) dargestellte, Gruppe bilden. Wir werden beweisen, dass diese Gruppe eine particularisirte ist,

[1] Es liess sich sogar sehr leicht beweisen, dass auch particuläre Integrale nur in den angegebenen Fällen existiren.

und hierbei wird es vortheilhaft sein Linien-Vorstellungen zu anwenden. Die Gleichungen ($L_1 = 0$) und ($L_2 = 0$) sind hinsichtlich X, Y, Z, H linear, und somit (§ 9, 24) enthalten die entsprechenden Linien-Complexe als gemeinsame Gerade die Fundamental-Gerade des Raumes r. Ferner stellt (Const. $= 0$) alle Geraden dar, welche die letztgenannte Linie schneiden, und wir finden so, dass die gemeinsamen Geraden aller Complexe (1) eine *zerfallene* Fläche zweiten Grades, das heisst zwei ebene Büschel bilden.

Die hier auftretenden Gebilde sind also ein Degenerationsfall von den in der vorangehenden Nummer untersuchten. *Die beiden conjugirten dreigliedrigen Gruppen werden nun durch zwei Punkte* p_1, p_2 *und zwei durch dieselben gehende Ebenen* E_1, E_2 *bestimmt.* Die Complexe der einen Gruppe enthalten sämmtlich die beiden Strahlen-Büschel ($p_1 E_1$) ($p_2 E_2$); ebenso enthalten die Complexe der zweiten Gruppe die Büschel ($p_1 E_2$) ($p_2 E_1$).

Die Bonnetsche Differential-Gleichung zweiter Ordnung zur Bestimmung aller Flächen, deren sämmtliche Krümmungslinien eben sind, lässt sich als ein Degenerationsfall auffassen von der Joachimsthalschen, welche alle Flächen giebt, deren Krümmungslinien des einen Systems in einem gegebenen Ebenen-Büschel liegen. [1]

58. Als letztes Beispiel betrachte ich die Aufgabe, alle Flächen zu finden, deren Krümmungslinien des einen Systems einer gegebenen Relation von der Form:

$$\pi (x\, y\, z\, dx\, dy\, dz) = 0$$

genügen. Zur Existenz von zwei allgemeinen ersten Integralen ist es, werde ich beweisen, nothwendig und hinreichend, dass π hinsichtlich der Differentialen linear ist, dass ferner ($\pi = 0$) integrabel ist, dass endlich die Integralflächen dieser totalen Differential-Gleichung eine Kugel-Schaar ($S_1 + \lambda S_2 = 0$) sind.

Wir setzen die Existenz eines allgemeinen ersten Integrals:

$$u - f(v) = 0$$

voraus und betrachten für einen particulären Wahl der Funktion

[1] Dieses steht keineswegs in Wiederspruch mit dem von Herrn Bonnet gegebenen Satze, dass die betreffenden *Integralflächen* durch eine Transformation durch reciproke Radien in einander übergeführt werden können.

f den einem Punkte zugehörigen elementaren Complex-Kegel, der ein Umdrehungs-Kegel sein muss.[1] Die constanten Krümmungs-Richtungen aller Flächen-Elemente, welche diesen Kegel umhüllen, sind die Berührungs-Richtung des Elements mit dem Kegel und die zugehörige Orthogonal-Richtung, und zwar ist es geometrisch evident, dass *diese letzten Richtungen einen ebenen Büschel bilden, dessen Axe zugleich die Mittellinie des Umdrehungs-Kegels ist.* Die Gleichung ($\pi = 0$) ist also hinsichtlich dx, dy, dz linear, und ferner ist klar, dass *alle elementare Rotations-Kegel,* die für einen verschiedenen Wahl der arbiträren Funktion f *einem gegebenen Punkte entsprechen, dieselbe Axe haben.*

Man betrachte nun zwei particuläre Integrale:

$$u - f_1(v) = 0, \quad u - f_2(v) = 0$$

und zwei Integralflächen derselben I_1 und I_2, welche eine gemeinsame, ($\pi = 0$) genügende Curve c enthalten. Alsdann ist c eine Krümmungslinie auf den beiden Flächen, die sich in Folge dessen unter constantem Winkel schneiden. Für einen jeden Punkt der Curve c ist aber der besprochene Winkel gleich der Differenz zwischen den Winkel-Oeffnungen der beiden zugehörigen elementaren Umdrehungs-Kegel, und also hat *diese Differenz dasselbe Werth für alle Punkte unserer Curve.* Lässt nun ($\pi = 0$) sich nicht integriren, so kann man zwischen zwei beliebigen Punkten des Raumes eine Curve ziehen, welche ($\pi = 0$) genügt, und in diesem Falle existirt also höchstens ein Integral mit einer *arbiträren Constanten.*

Es bleibt zur Untersuchung der Fall, dass ($\pi = 0$) ein Integral [S (x y z) = Const.] besitzt. Das einer beliebigen Kugel zugeordnete Orthogonal-System (s, σ) besteht nun aus den Durchschnitts-Curven mit allen Flächen S zusammen mit den zugehörigen Orthogonal-Curven. Es ist aber die Kugel die einzige Fläche, welche eine beliebige Kugel nach Kreisen schneidet, und also sind die Flächen S, wie oben behauptet, Kugeln. Sollen ferner immer sowohl die Curven s als σ Kreise sind, die jedesmal durch zwei

[1] Der Beweis dieser Behauptung liegt in den Schluss-Bemerkungen des Paragraphs 17. **Vergl. auch Nummer 53.**

feste Punkte gehen, so müssen die Kugeln S unendlich viele Punkte gemein haben, das heisst, sie bilden einen Büschel ($S + \lambda S' = 0$). Wir werden also auf die Aufgabe geführt: *alle Flächen zu finden, deren Krümmungslinien des einen Systems auf einem Büschel Kugeln liegen, und bekanntlich führt eine Transformation durch reciproke Radien dieses Problem in das von Joachimsthal gelöste über.*

Nach Herrn *Bonnet* bestimmt unsere Aufgabe alle Flächen, deren sämmtliche Krümmungslinien sphärische Curven sind.

§ 21.

Bestimmung aller D''_{21} und D''_{22}, welche allgemeine erste Integrale besitzen.

59. Es hat sich gezeigt, dass wenn eine D''_{21} ein allgemeines erstes Integral:

$$u - f(v) = 0$$

zugiebt, so kann dasselbe zuweilen durch zweifach unendlich viele lineare Complexe definirt werden, und ich behaupte, *dass dieses immer der Fall ist.* Der Beweis gründet sich darauf, dass ein jedes in dem allgemeinen Integrale enthaltenes particuläres eine D_{11} (52, 53) sein muss, und zwar eine, welche einem Linien-Complex — ich nenne denselben in der folgenden Entwickelung einen *Integral-Complex* — entspricht.

Eine jede der Gleichungen:

$$u = \text{Const.}, \quad v = \text{Const.}$$

bestimmt einfach unendlich viele solche Integral-Complexe, welche wir auf alle mögliche Weisen in Paare ($u_p\ v_q$) zusammenfassen und dabei bemerken, dass eine beliebige Gruppe ($u_p\ v_q$) jedem Punkte[1] des Raumes ein, oder einige Flächen-Elemente zuordnet — gemeinsamen Tangenten-Ebenen von Complex-Kegeln, welche dieselbe Spitze haben, entsprechend. Wählt man unter den zwei-

[1] Die dreifach unendlich vielen gemeinsamen Flächen-Elemente zweier partiellen Differential-Gleichungen erster Ordnung brauchen nicht den ganzen Raum durchzuziehen; es ist nehmlich möglich, dass zweifach unendlich viele elementare Complex-Kegel zugleich beiden Gleichungen gehören. Dieser Fall kann hier nicht eintreten; zweifach unendlich viele Complex-Kegel bestimmen nehmlich einen Linien-Complex, und unsere D_{11} entsprechen ja Linien-Complexen.

fach unendlich vielen Gruppen $(u_p\, v_q)$ nach einem beliebigen Gesetze einfach unendlich viele, so ordnet diese Gruppen-Schaar jedem Punkte einfach unendlich viele Elemente zu, und zwar wissen wir, dass dieselben jedesmal den Complex-Kegel eines Integral-Complexes umhüllen.

Zwei consecutive Gruppen $(u_p\, v_q)$ $(u_{p+\Delta p}\, v_{q+\Delta q})$ ordnet jedem Punkte eine oder einige Richtungen zu, und dieselben gehören offenbar unbegrenzt vielen Integral-Complexen an. Es folgt hieraus, dass der geometrische Ort der besprochenen dreifach unendlich vielen Richtungen eine *Linien-Congruenz* sein muss, und es ist nicht schwer zu erkennen, dass wenn $(u_p\, v_q)$ constant bleibt, $(u_{p+\Delta p}\, v_{q+\Delta q})$ dagegen variirt, so erhalten wir, allen Werthen der Grösse $\frac{\Delta u_p}{\Delta v_q}$ entsprechend, einfach unendlich viele Congruenzen, deren Inbegriff einen Complex C bildet. *Die Geraden dieses Complexes, die durch einen Punkt gehen, liegen nun immer in einer Ebene,* derjenigen nehmlich, die durch die Gruppe $(u_p\, v_q)$ dem betreffenden Punkte zugeordnet wird, und also ist C ein linearer Complex. Wir können somit den folgenden Satz aussprechen:

Wenn eine D''_{21} ein allgemeines erstes Integral besitzt, so entsprechen demselben zweifach unendlich viele lineare Complexe C und zwar in solcher Weise, dass einfach unendlich viele C immer einen Envelopp-Complex geben, dessen zugehörige D_{11} ein particuläres erstes Integral ist.

Wir erledigen nun die Frage, ob zweifach unendlich viele lineare Complexe immer eine Differential-Gleichung zweiter Ordnung mit einem allgemeinen ersten Integrale bestimmen, und hierbei wird es vortheilhaft sein, Kugel-Vorstellungen zu anwenden. Einem jedem linearen Kugel-Complexe entsprechen, wissen wir (54), dreifach unendlich viele Flächen-Elemente, die sich an die betreffende Fundamental-Sphäre anschliessen. Betrachten wir also zweifach unendlich viele lineare Kugel-Complexe C, so gehört jedes Element des Raumes nur einem oder einigen C als ausgezeichnetes Element an. Man ordne nun einem jedem Flächen-Elemente die Durchschnitts-Richtung mit der Fundamental-Sphäre des zugehörigen C zu und betrachte diejenige D''_{22}, welche eben diese Zuordning (§ 19, 51) bestimmt. Dieselbe wird offenbar von einer jeden D_{12} befriedigt, die dem Envelopp-Complexe von einfach unendlich vielen C entspricht.

Zweifach unendlich viele lineare Linien- oder Kugel-Complexe bestimmen immer eine D''_{21} oder D''_{22} mit einem allgemeinen ersten Integrale.

Unsere zweifach unendlich vielen linearen Complexe, deren Gleichung mit zwei Parametern λ und μ sich folgenderweise schreiben lässt:

$$\Phi (X\, Y\, Z\, H\, \lambda\, \mu) = 0,$$

bestimmen einen Envelopp-Complex A, dessen Gleichung man findet, indem man zwischen:

$$\Phi = 0, \frac{d\Phi}{d\lambda} = 0, \frac{d\Phi}{d\mu} = 0$$

die Parameter eliminirt. Es liegt nahe zu vermuthen, dass die dem Complexe A zugehörige D_{12} ein singuläres erstes Integral darstellt, und das ist in der That auch der Fall. Betrachten wir nehmlich eine in A enthaltene Kugel Q und zugleich den entsprechenden linearen Complexe C, der sich offenbar unter A's einfach unendlich vielen linearen Tangential-Complexen in Q befindet, so ist es klar, dass dieser Kugel Q *derselbe Trajectorie-Kreis hinsichtlich A wie hinsichtlich eines beliebigen unter den früher betrachteten Envelopp-Complexen,* der von C umhüllt wird, entspricht. Es zeigt sich also, dass A's Integralflächen unsere D''_{22} genügen.

Eine D''_{22} mit einem allgemeinen ersten Integrale besitzt im Allgemeinen ohnedies ein singuläres erstes Integral.

Ich werde nun andeuten, wie man durch analytische Operationen entscheidet, ob eine gegebene D''_{22} ein allgemeines erstes Integral besitzt, wie man ferner in diesem Falle dasselbe bestimmt.

Man untersucht zuerst, ob die einer beliebigen Punkt-Kugel durch die D''_{22} zugeordneten Curven s oder σ Kreise sind. und bestimmt unter dieser Voraussetzung die elementaren Umdrehungs-Kegel, welche diese Kreise enthalten (46). Sei:

$$F (x\, y\, z\, p\, q\, \nu) = 0$$

die allgemeine Gleichung der besprochenen Kegel mit einer arbitären Constanten ν ausser der Scheitel-Coordinaten x, y, z. Man sucht nun den analytischen Ausdruck erstens von der Winkel-Oeffnung:

$$W = \Phi(x\, y\, z\, \nu),$$

ferner von der Richtung der Kegel-Axen:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}.$$

In den Funktionen X, Y, Z, die von x, y, z, ν abhängen, setzt man statt ν den Werth dieser Grösse, genommen aus der Gleichung $[W_0 = \Phi(x\, y\, z\, \nu)]$ und bildet den Ausdruck:

$$X\, d\, x + Y\, d\, y + Z\, d\, z = 0.$$

Wenn diese Gleichung sich integriren lässt, und zwar in der Form:

$$[x - F_1(H)]^2 + [y - F_2(H)]^2 + [z - F_3(H)]^2 = H^2$$

dann und nur dann existirt ein allgemeines erstes Integral. Die letzte Gleichung enthält zwei Parameter W_0 und H und stellt also die zweifach unendlich vielen Fundamental-Sphären unserer linearer Kugel-Complexe C dar. Hieraus findet man leicht die allgemeine Gleichung:

$$\pi(X\, Y\, Z\, H\, \lambda\, \mu) = 0$$

dieser Complexe, und damit ist das allgemeine erste Integral bestimmt. Endlich giebt die Elimination von λ und μ zwischen:

$$\pi = 0, \frac{d\pi}{d\lambda} = 0, \frac{d\pi}{d\mu} = 0$$

das singuläre erste Integral.

Wenn eine D''_{22} ein allgemeines erstes Integral zugiebt, so lässt sich dasselbe wie auch das zugehörige singuläre erste Integral immer angeben.

60. In der folgenden Untersuchung, deren Zweck ist alle D''_{22} mit *zwei* allgemeinen ersten Integralen zu bestimmen, werde ich mich auf den früher (55) besprochenen Begriff: Involution zwischen linearen Congruenzen stützen. Wir müssen dabei erinnern, dass wenn zwei *Linien*-Congruenzen in dieser Beziehung stehen, so bilden die beiden Direktricen-Paar ein raümliches Vierseit. Es sei andererseits Q die eine gemeinsame Kugel der entsprechenden linearen Kugel-Congruenzen und ferner p_1, p_2 die beiden auf Q gelegenen *Punkt-Kugeln* der einen Congruenz, π_1, π_2 die entsprechenden Punkt-Kugeln der anderen Congruenz. Die vier Punkte p_1, p_2, π_1, π_2 unserer Kugel stehen alsdann in der Beziehung, dass ein jeder durch p_1 und p_2 gehender Kreis einen beliebigen Kreis, der durch π_1 und π geht, orthogonal schneidet.

Dieses vorausgesetzt, betrachten wir die durch unsere D''_{22} einer beliebigen Kugel Q zugeordneten (51) orthogonalen Kreis-Schaaren, die bezüglich durch zwei Punkte p_1, p_2 oder durch zwei andere π_1, π_2 gehen. Alle Integral-Complexe, welche Q enthalten, theilen sich in zwei Systeme, und zwar ist es klar, dass der Trajectorie-Kreis eines jeden Complexes des einen Systems durch p_1 und p_2 geht, während die Complexe des zweiten Systems in derselben Beziehung zu den Punkten π_1 und π_2 stehen. Hieraus lässt sich schliessen, *dass einem Integral-Complexe des ersten Systems, der die Kugel Q enthält, ohnedies die beiden unendlich nahen Kugeln Q′ und Q″, welche Q bezüglich in p_1 und p berühren, gehören.* Indem wir in derselben Weise hinsichtlich Q′ und Q″ räsonniren, sehen wir, dass alle Complexe des einen Systems, welche eine gegebene Kugel enthalten, ohnedies wenigstens zweifach unendlich viele Kugeln gemein haben. Mehr kann es auch nicht sein; denn sonst waren sie identisch, und dann hätten wir kein allgemeines Integral. Es zeigt sich also, dass eine jede Kugel des Raumes eine Kugel-Congruenz bestimmt, und zwar giebt es zweifach unendlich viele solche, die, wenn man sie nach einem arbiträren Gesetze zu Complexen zusammenfasst, immer Integral-Complexe geben.

Ich werde zeigen, dass diese erzeugenden Congruenzen — ich nenne die des einen Systems S, diejenigen des zweiten Σ — lineare Congruenzen sind. Zu diesem Zwecke betrachte ich noch einmal die Kugel Q mit den Punkten p_1 und p_2, in denen Q′ und Q″ die gegebene Kugel berühren. Einer jeden dieser letzten Kugeln ordnet unsere D''_{22} gewisse ausgezeichnete Punkte p'_1, p'_2 und p''_1, p''_2 zu, und zwar erkennt man leicht, *dass* p'_1 *mit* p_1, p''_2 *mit* p_2 *identisch sein müssen.* Hieraus folgt durch eine einfache Ueberlegung, *dass alle einfach unendlich vielen Kugeln, welche Q in* p_1 *oder*

p_2 *berühren, unserer Congruenz S gehören;* diese Congruenzen lassen sich also in einfach unendlich vielen Schaaren von Kugeln, die jedesmal einen gemeinsamen Berührungspunkt haben, zusammenfassen, und hierbei gehört jede Kugel zwei solchen Schaaren. Die entsprechenden Linien-Congruenzen ordnen sich also in einfach unendlich viele ebene Büschel, und zwar gehört eine jede Congruenz-Linie zwei solchen Büscheln an. Dieses ist aber für die *lineare* Congruenz charakteristisch.

Wenn eine D''_{22} zwei allgemeine erste Integrale besitzt, so entsprechen derselben zwei Schaaren von zweifach unendlich vielen linearen Congruenzen S und Σ. Einfach unendlich viele S oder Σ bilden immer einen Integral-Complex.

Mit Berücksichtigung des Anfangs dieser Nummer findet man nun, dass zwei beliebige Congruenzen S und Σ immer in Involution liegen, dass also die beiden Direktricen-Paar der betreffenden Linien-Systeme jedesmal ein raümliches Vierseit bilden.

Hieraus folgt, dass die Direktricen aller S keine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit, sondern nur eine Linienfläche bestimmen. Sonst existirten ja nehmlich zwei Linien-Congruenzen — alle Direktricen unserer beiden Systeme — deren gegenseitige Beziehung eine solche wäre, dass eine jede Gerade der einen Congruenz alle Linien der zweiten träffe. Dieses ist aber unmöglich.

Die Direktricen bilden also die beiden Erzeugungen einer Linienfläche, die bekanntlich eine Fläche zweiten Grades sein muss, und also werden wir auf die in Nummer 56 untersuchten Gebilde geführt.

Zwei conjugirte dreigliedrige Gruppen linearer Complexe definiren die allgemeinste D''_{21} (oder D''_{22}) mit zwei allgemeinen ersten Integralen.

Ehe ich diesen Abschnitt schliesse, möchte ich noch beweisen, dass, wie früher behauptet, die allgemeine Form einer D''_{21} die folgende ist:

$$rt - s^2 = \Phi(x\,y\,z\,p\,q).$$

Die Differential-Gleichung der Charakteristiken einer partiellen Differential-Gleichung zweiter Ordnung: $[F(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t) = 0]$ schreibt sich bekanntlich:

$$\frac{dF}{dr}\,dy^2 - \frac{dF}{ds}\,dy\,dx + \frac{dF}{dt}\,dx^2 = 0.$$

Andererseits befriedigen die Haupttangenten-Curven die Relation:

$$t\,dy^2 + 2s\,dy\,dx + r\,dx^2 = 0.$$

Sollen also die Haupttangenten-Curven beider Systeme Charakteristiken sein, so gelten die folgende Gleichungen:

$$\frac{\frac{dF}{dr}}{t} = \frac{\frac{dF}{ds}}{-2s} = \frac{\frac{dF}{dt}}{r},$$

und wenn man hier nach den gewöhnlichen Methoden integrirt, so findet man die obenstehende Form.

Vierter Abschnitt.

Zur Theorie der Complexe.

In den beiden ersten Paragraphen dieses Abschnitts beschäftige ich mich mit den Haupttangenten-Curven des Complexes zweiten Grades. In § 24 zeige ich, dass mehrere bekannte Theorien, die sich auf zwei zuerst von Herrn *Kummer* untersuchte Flächen vierter Ordnung — die mit 16 Knotenpunkten und die mit einem Doppel-Kegelschnitt — beziehen, durch meine Kugel-Abbildung in einander übergeführt werden können. Endlich beabsichtige ich mit den Entwickelungen des letzten Paragraphs, den Zusammenhang zwischen den Ideen dieser Abhandlung und einigen Arbeiten des Herrn *Klein* darzulegen.

§ 22.

Ueber einen Linien-Complex zweiten Grades.

60. In § 17 haben wir gefunden, dass die Haupttangenten-Curven des Linien-Complexes [F (X Y Z) = 0] immer durch Differentiation und Elimination bestimmt werden können, wenn zuerst die geodätischen Curven der Fläche (F = 0) gefunden sind. Die hier auftretenden Linien-Complexe charakterisirten wird dadurch, dass sie eine infinitesimale Transformation von der Form:

$$z_1 = z_2,\; x_1 = x_2 + az_2 + b,\; y_1 = y_2 + cz_2 + d \qquad (1)$$

besitzen; es folgt hieraus, dass auch die zugehörigen Singularitätenflächen, deren Beziehung zu den Complexen bekanntlich eine durch lineare Transformationen unzerstörbare ist, durch die besprochene infinitesimale Transformation in sich übergeführt werden, und demzufolge müssen sie jedesmal von einfach unendlich vielen Curven W des entsprechenden Transformations-Cyclus erzeugt sein. Nun bestimmen die Gleichungen (1) in jeder Ebene ($z = \text{Const.}$) eine Parallel-Verschiebung, und also sind die betreffenden Curven W die Geraden einer speciellen linearen Congruenz, deren Direktricen in die unendlich weit entfernte Gerade der xy-Ebene zusammengefallen sind. *Die Singularitätenfläche eines jeden Linien-Complexes [$F(X\,Y\,Z) = 0$] ist eine Linienfläche, deren Erzeugende dieser speciellen linearen Congruenz gehören.*

Wir setzen nun insbesondere voraus, dass ($F = 0$) eine Regelfläche ist, und betrachten unter den Kugeln des Complexes ($F = 0$) alle, deren Mittelpunkte auf einer geradlinigen Erzeugenden unserer Fläche liegen. Als nun diese Kugeln durch zwei *lineare* Gleichungen zwischen X, Y, Z dargestellt werden, so bilden die entsprechenden Geraden im Raume r eine lineare Congruenz, und also enthält der *Linien*-Complex ($F = 0$) einfach unendlich viele lineare Congruenzen, deren Direktricen offenbar der entsprechenden Singularitätenfläche gehören und dabei im Allgemeinen einen reductiblen Theil (τ) derselben bilden. Es ist hier zu bemerken, dass τ das Bild der imaginären Developpablen ist, welche zugleich um die Linienfläche ($F = 0$) und den unendlich weit entfernten imaginären Kreis umgeschrieben ist. [1]

Eine Fläche zweiten Grades ($F_2 = 0$) kann bekanntlich auf zwei Weisen durch eine gerade Linie erzeugt werden, und also enthält der Linien-Complex ($F_2 = 0$) zwei Schaaren linearer Congruenzen. Es ist aber zu bemerken, dass die eben besprochene imaginäre Developpable nicht zerfällt, dass also die beiden Direktricen-Systeme eine irreductible Fläche τ bilden. Nun gehört jede Linie unseres Complexes *zwei* linearen Congruenzen an — einer

[1] Die Gleichungen $aX + bY + cZ + d = 0$, $\alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta = 0$ bestimmen eine lineare Linien-Congruenz, deren beide Direktricen sich im Raume R als diejenigen Ebenen des Büschels $aX + bY + cZ + d + \lambda(\alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta) = 0$ abbilden, welche den imaginären Kreis berühren.

aus jeder Schaar — und schneidet in Folge dessen die Fläche τ wenigstens in vier Punkten. Andererseits wissen wir, dass die Singularitätenfläche des allgemeinen Complexes zweiten Grades von vierter Ordnung ist, und somit bildet der Ort der Direktricen in unserem Falle die vollständige Singularitätenfläche.

Die Singularitätenfläche des Complexes ($F_2 = 0$) ist eine Linienfläche vierten Grades mit zwei zusammengefallenen Doppellinien; alle Complexlinien, die eine Erzeugende schneiden, treffen ohnedies die eine von zwei zugeordneten Erzeugenden.

Aus einer früheren Bemerkung in Verbindung mit dem bekannten Satze: die Flächen eines irreductiblen Orthogonal-Systems sind in eine gemeinsame imaginäre Developpable eingeschrieben, folgt dass wenn $F_2(X\,Y\,Z\,\lambda) = 0$ eine Schaar confocaler Flächen zweiten Grades darstellt, *so besitzen die Linien-Complexe $F_2(X\,Y\,Z\,\lambda) = 0$ eine gemeinsame Singularitätenfläche.*

61. Es ist bekannt, dass *Jacobi* die geodätischen Curven auf der Fläche zweiten Grades mittelst elliptischer Transcendenten bestimmt hat, und also können die Haupttangenten-Curven des Linien-Complexes ($F_2 = 0$) mittelst elliptischer Transcendenten gefunden werden. Im Folgenden werde ich alle hierher gehörigen Complexe aufzählen und dabei aus den Eigenschaften der verschiedenen Flächen zweiten Grades entsprechende Eigenthümlichkeiten des Bild-Complexes schliessen. Zum leichteren Verständnisse schicke ich einige Bemerkungen voraus.

In § 12 dachte ich mir den Raum r einer *linearen* Transformation unterworfen und betrachtete die entsprechenden Umformungen von R, unter denen ich alle Bewegungen, Semblablitäts-Transformation und Parallel-Transformation fand. Es ist nun einleuchtend, dass wenn eine gegebene Fläche oder Complex des einen Raumes durch eine infinitesimale Transformation in sich übergeführt wird, so ist dasselbe mit der entsprechenden Figur der Fall. Eine Rotationsfläche des Raumes R gestattet z. B. eine infinitesimale Rotations-Bewegung, und also können wir schliessen, dass die Bildfläche eine gewisse infinitesimale *lineare* Transformation zugiebt.

Ferner ist klar, dass wenn ein Gebilde *zwei* unabhängige, infinitesimale und zugleich *permutable* Transformationen gestattet, so ist dieses auch mit der entsprechenden Figur der Fall. In diese Categorie gehört z. B. einerseits der Inbegriff von Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer beliebigen Schraubenfläche liegen — die betreffenden permutablen Operationen sind Schrauben-Bewegung und Parallel-Transformation [1] — andererseits der entsprechende Linien-Complex wie auch die zugehörige Singularitätenfläche, welche also nach Herrn Kleins und meinen Untersuchungen entweder durch die Gleichung ($x^a\, y^b\, z^c =$ Const.) dargestellt wird, oder als Degeneration einer solchen Fläche sich auffassen lässt. Als letztes Beispiel betrachte man endlich alle Kugeln, deren Centra auf einem Rotations-Kegel liegen. Dieser Complex gestattet drei unabhängige infinitesimale Transformationen: 1) eine Semblablitäts-Transformation, deren Centrum die Kegel-Spitze ist, 2) eine Rotations-Bewegung um die Kegel-Axe, 3) eine Parallel-Transformation, und zwar ist die zweite Operation sowohl mit der ersten wie mit der letzten permutabel, während dieses nicht mit der ersten und letzten der Fall ist. Der Linien-Complex und die zugehörige Singularitätenfläche besitzen die entsprechenden Eigenschaften.

62. Im Raume R ist bei unserer Abbildung der unendlich weit entfernte, imaginäre Kreis und sonst nichts ausgezeichnet — das heisst, für eine projectivische Auffassung. Wenn wir also alle Special-Formen des Linien-Complexes [$F_2(X\,Y\,Z) = 0$] suchen, so müssen wir zunächtt erinnern, dass die projectivische Punkt-Geometrie nur *eine* Particularisation der Fläche zweiten Grades kennt — den Kegel nehmlich; ferner fragt es sich, wie viele verschiedene Lagen diese beiden Flächen hinsichtlich des genannten Kreises haben können. Nun ist es eben nach diesen Gesichtspunkten, dass die *metrische* Geometrie die Flächen zweiten Grades

[1] Es folgt hieraus, *dass man die geodätischen Curven auf einer jeden Fläche, die eine infinitesimale Schrauben-Bewegung gestattet, bestimmen kann.* (§ 16, 43). Die Krümmungslinien und Haupttangenten-Curven dieser Flächen lassen sich auch nach einer Bemerkung von Herrn Klein und mir finden.

ordnet; hierbei muss man indessen wohl bemerken, dass die gewöhnlichen Aufzählungen keine Fläche mitnehmen, die nicht reel sein kann. Zunächst stellen wir zwei Gruppen auf, je nachdem die unendlich weit entfernte Ebene eine Tangentenebene ist oder nicht.

A. Wenn F_2 nicht von der unendlich weit entfernten Ebene berührt wird, so schreibt sich die entsprechende Gleichung in der folgende Form:

$$a\,\xi^2 + b\,\eta^2 + c\,\zeta^2 = d, \tag{1}$$

vorausgesetzt dass $(\xi = 0)$ $(\eta = 0)$ $(\zeta = 0)$ die Hauptebenen sind. Durch eine Bewegung lässt die Fläche (1) sich im Allgemeinen in:

$$a\,X^2 + b\,Y^2 + c\,Z^2 = d \tag{2}$$

überführen, und zwar können wir uns auf die Betrachtung dieser letzten Fläche beschräncken; einer Bewegung des Raumes R entspricht nehmlich eine *lineare* Transformation des anderen Raumes.

Es sind nun $(X = 0)$ $(Y = 0)$ $(Z = 0)$ allgemeine lineare Complexe, (Const. $= 0$) dagegen ein specieller Complex; ferner liegen diese Complexe (§ 9, 24) paarweise in Involution, und also hängt ihr System von 13 Constanten ab; wir finden somit, dass der Linien-Complex F_2 16 wesentliche Constanten enthält. Setzt man in (2) statt X, Y, Z (§ 9, 22) die entsprechenden Werthe durch die Plückerschen Linien-Coordinaten r, ρ, s, σ:

$$X = \rho + s, \quad i\,Y = \rho - s, \quad Z = \sigma - r,$$

so findet man nach der gewöhnlichen Methode die Gleichung der Singularitätenfläche und zwar in der folgenden Form:

$$4abc\,(yz - xt)^2 - dc\,(a - b)\,(z^4 + t^4) + d\,(4ab - 2ac - 2bc)\,z^2 t^2 = 0.$$ [1]

1) Wenn die Coefficienten a, b, c, d allgemein sind, so ist die Singularitätenfläche, wie wir schon früher wissen (60), eine Linienfläche vierter Ordnung; dieselbe wie auch der Complex gestattet eine infinitesimale lineare Transformation.

2) Sei $a = b$; die Fläche F_2 ist dann ein Rotationsfläche, und also besitzt der Linien-Complex F_2 zwei permutable infinitesimale lineare Transformationen — Rotations-Bewegung und Parallel-Transformation entsprechend. Die Singularitätenfläche:

[1] Es soll die Grösse t eine homogene vierte Coordinate bezeichnen.

$$(zy - xt - \sqrt{\frac{a-c}{ac}} \cdot dzt)(zy - xt + \sqrt{\frac{a-c}{ac}} \cdot dzt) = 0$$

zerfällt in zwei Flächen zweiten Grades, die einander nach einer gemeinsamen Erzeugenden ($z = 0, t = 0$) berühren.

3) Sei $d = 0$; F_2 ist ein Kegel. Der Kugel-Complex besitzt zwei infinitesimale Transformationen, die nicht permutabel sind: Parallel-Transformation und Semblablitäts-Transformation. Die Singularitätenfläche des Linien-Complexes ist eine doppeltzählende Fläche zweiten Grades:

$$(yz - xt)^2 = 0.$$

4) Sei $d = 0$, $a = b$; F_2 ist ein Rotations-Kegel; der Kugel-Complex gestattet drei infinitesimale Transformationen: Parallel-Transformation, Rotations-Bewegung und Semblablitäts-Transformation. Die beiden ersten wie auch die beiden letzten sind permutabel; dies ist dagegen nicht der Fall mit der ersten und letzten. Der Linien-Complex besitzt die entsprechenden Eigenschaften. Die Singularitätenfläche ist auch nun eine doppeltzählende Fläche zweiten Grades.

5) Sei $c = 0$; F_2 ist ein Cylinder. Der Kugel-Complex besitzt zwei permutable Transformationen: Translations-Bewegung und Parallel-Transformation. Die Singularitätenfläche des Linien-Complexes wird von zwei doppeltzählenden Ebenen gebildet ($z^2 t^2 = 0$).

6) Sei $a = b$, $c = 0$; F_2 ist ein Rotations-Cylinder. Der Kugel-Complex gestattet drei permutable, infinitesimale Transformationen: Translation, Rotation und Parallel-Transformation. In Folge dessen ist der Linien-Complex eine Degeneration desjenigen, dessen Gerade ein Tetraeder nach constantem Doppel-Verhältnisse schneiden. Die Singularitätenfläche wird von zwei doppeltzählenden Ebenen ($z^2 t^2 = 0$) gebildet.

7) Sei $a = b = c$; F_2 ist eine Kugel. Der Kugel-Complex gestattet drei unabhängige infinitesimale Rotationen, die indessen nicht permutabel sind. Die Singularitätenfläche ist eine doppeltzählende Fläche zweiten Grades:

$$(zy - xt)^2 = 0.$$

In diese Gruppe gehören noch 9 Complexe, die in der folgenden vollständigen Aufzählung mitgenommen sind.

a) Sei F_2 eine allgemeine Fläche zweiten Grades; der Durchschnitt-Kegelschnitt mit der unendlich entfernten Ebene kann entweder eine allgemeine Lage hinsichtlich des imaginären Kreises haben (1), oder denselben in zwei verschiedenen Punkten berühren (2), oder in einem Punkte berühren und in zwei Punkten schneiden, oder in einem Punkte dreipunktig berühren und in einem Punkte schneiden, oder endlich in einem Punkte vierpunktig berühren.

b) Sei F_2 ein Kegel, dessen Spitze im endlichen Raume gelegen ist. Der Durchschnitt-Kegelschnitt mit der unendlich entfernten Ebene kann dieselben fünf verschiedenen Lagen haben. Hierher gehören (3) und (4).

c) Sei F_2 ein Kegel, dessen Spitze in der unendlich weit entfernten Ebene liegt. Der Durchschnitt-Kegelschnitt zerfällt nun in zwei distincte Gerade g. Es können diese Linien entweder eine allgemeine Lage hinsichtlich des imaginären Kreises haben (5), oder beide denselben berühren (6), oder nur die eine berühren; es können ferner die Linien g sich in einem Punkte des imaginären Kreises schneiden, und dabei kann die eine Linie eine Tangente sein.

B. Wenn die unendlich weit entfernte Ebene die Fläche F_2 berührt, so nimmt die Gleichung derselben die folgende Form:

$$a X^2 + a Y^2 + 2c Z = 0.$$

1) Die Singularitätenfläche:

$$4ab\, zt\,(xt - yz) - (a - b)\, c\,(z^4 + t^4) - 2\,(a + b)\, c\, z^2 t^2 = 0$$

ist, wenn a, b, c allgemein sind, eine Linienfläche vierten Grades.

2) Sei $a = b$; F_2 ist ein Rotations-Paraboloid. Die Singularitätenfläche besteht aus einer Fläche zweiten Grades und zwei Tangentenebenen derselben.

3) Sei $a = 0$; F_2 ist ein parabolischer Cylinder. Die Singularitätenfläche wird von zwei doppeltzählenden Ebenen gebildet.

In diese Gruppe gehören noch 6 Complexe, die in der folgenden vollständigen Aufzählung mitgenommen sind.

d) Sei F_2 eine allgemeine Fläche zweiten Grades, welche die unendlich entfernte Ebene berührt und also dieselbe nach zwei distincten Geraden g schneidet. Diese Linien können fünf verschiedene Lagen hinsichtlich des imaginären Kreises haben (Vergl. c).

e) Sei F_2 ein Kegel, der die unendlich weit entfernte Ebene berührt, und zwar nach einer doppeltzählenden Geraden g. Wenn die Kegel-Spitze ausserhalb des imaginären Kreises liegt, so kann g entweder denselben schneiden oder berühren. Wenn endlich die Kegel-Spitze auf dem imaginären Kreise liegt, so sind ebenso diese beiden Lagen möglich.

Es giebt also 25 verschiedene Complexe zweiten Grades, deren Haupttangenten-Curven von elliptischen Transcendenten oder einfacheren Funktionen abhängen.

§ 23.

Ueber die Haupttangenten-Curven des allgemeinen Complexes zweiten Grades.

63. Ein jeder Linien-Complex bestimmt (§ 3, 9; § 13) eine partielle Differential-Gleichung erster Ordnung D_{11}, deren Charakteristiken von den Geraden des Complexes umhüllt werden, und insofern existirt für einen gewissen Gesichtspunkt ein Zusammenhang zwischen der *Plückerschen* Linien-Geometrie und der *Mongeschen* Theorie partieller Differential-Gleichungen. Diese Bemerkung macht es a priori plausibel bei dem Studium der Complexe den Haupttangenten-Curven derselben eine besondere Aufmerksamkeit zu widmen, und hoffentlich wird der Inhalt des dritten Abschnitts bewiesen haben. dass eine solche Richtung der Untersuchung in der That fruchtbar ist. Insbesondere schien es mir wahrscheinlich, dass die Bestimmung der Haupttangenten-Curven des allgemeinen Complexes zweiten Grades Interesse darbieten würde, dies um so mehr, weil diese Curven für den Complex, dessen Singularitätenfläche ein Tetraeder ist, mit den von Herrn *Klein* und mir unter der Bezeichnung Curven W untersuchten identisch sind, und diese letzten Curven — als ein räumliches Analogon der logarithmischen Spirale — höchst merkwürdige

Eigenschaften besitzen. Für einen Complex mit 16 Constanten führte ich, wie im vorangehenden Paragraphe auseinandergesetzt, die betreffende Differential-Gleichung auf das von *Jacobi* gelöste Problem: die geodätischen Curven einer Fläche zweiten Grades zu finden, zurück. Endlich fand ich, dass auch der allgemeine Fall von der Integration eines bestimmbaren algebraischen Differentials abhang; die Form dieses Differentials war es mir aber noch nicht gelungen zu bestimmen als eine briefliche Mittheilung des Herrn *Klein* hinsichtlich seiner elliptischen Linien-Coordinaten mir es möglich machte dasselbe hinzuschreiben.[1]

64. Die folgenden Betrachtungen waren der Ausgangspunkt für den geometrischen Weg, der mich zu der obenstehenden Resultat führte.

a) Herr *Klein* hat gefunden, dass die *Kummersche* Fläche, vierten Grades, mit 16 Knotenpunkten gemeinsame Singularitätenfläche ist für einfach unendlich viele Complexe zweiten Grades, deren allgemeine Gleichung:

$$\frac{x_1^2}{k_1+\lambda}+\frac{x_2^2}{k_2+\lambda}+\dots\frac{x_6^2}{k_6+\lambda}=0$$

derjenigen confocaler Flächen zweiten Grades analog ist. Diese Complexe werde ich mit Herrn Klein als *confocale Complexe zweiten Grades* bezeichnen.

b) Die Kugeln, deren Centra auf einer beliebigen Fläche zweiten Grades aus einem gegebenen confocalen System liegen, bilden sich (§ 22, 60) als einfach unendlich viele Linien-Complexe ab. die eine Linienfläche vierten Grades als gemeinsame Singularitätetfläche besitzen.

c) Der bekannte Satz, dass wenn man auf einer Fläche zweiten Grades die Tangenten einer geodätischen Curve zieht, so berühren dieselben eine confocale Fläche, oder was auf dasselbe hinauskommt, dass zwei confocale Flächen zweiten Grades die vollständige Centerfläche für eine Schaar paralleler Flächen bilden, transformirt sich durch meine Kugel-Abbildung in das fol-

[1] In einer bald erscheinenden Abhandlung wird Herrn *Klein* eine elegante und vollständige algebraische Lösung des hier betrachteten Problems geben.

gende Theorem: Den unter b untersuchten confocalen Linien-Complexen entsprechen Differential-Gleichungen D_{11}, die paarweise einfach unendlich viele gemeinsame Integrale besitzen.

d) Aus Herrn *Kleins* und meinen Untersuchungen über Flächen W folgt, dass zwei Complexe zweiten Grades, deren gemeinsame Singularitätenfläche ein Tetraeder ist, jedesmal einfach unendlich viele gemeinsame Integralflächen besitzen.

Es schien mir wahrscheinlich, dass die beiden letzten Sätze, die sich auf *verschiedene* Complexe beziehen, Special-Fälle des folgenden Theorems wären:

Zwei confocale Complexe zweiten Grades besitzen einfach unendlich viele gemeinsame Integralflächen.

65. Indem ich meine Aufmerksamkeit auf die entsprechenden Kugel-Complexe und die zugehörigen D_{12} richtete, sah ich, dass wenn meine Vermuthung richtig war, *so mussten für die dreifach unendlich vielen gemeinsamen Flächen-Elemente zweier D_{12} jedesmal die beiden zugehörigen charakteristischen Richtungen orthogonal sein.* Dass diese nothwendige Forderung auch genügt, folgt aus dem bekannten Satze: Zwei partielle Differential-Gleichungen erster Ordnung besitzen einfach unendlich viele gemeinsame Integrale, wenn für die dreifach unendlich vielen gemeinsamen Flächen-Elemente jedesmal die charakteristische Richtung jeder Gleichung mit der Trajectorie-Richtung der anderen zusammenfällt.

Es war also nothwendig und hinreichend zu beweisen, dass die einer beliebigen Kugel durch unsere einfach unendlich vielen D_{12} zugeordneten Trajectorie-Curven (§ 17, 46) ein Orthogonal-System bilden, oder was auf dasselbe hinauskommt, dass dieses mit den einem beliebigen Punkte zugehörigen einfach unendlich vielen Normal-Kegeln der Fall ist (§ 17, 46). Wenn nun $(H = 0)$ ein linearer Complex des confocalen Systems ist, so sind die besprochenen Kegel, wie man leicht sieht, vom zweiten Grade, und also müssen sie vier gemeinsame Tangentenebenen, welche zugleich den imaginären Kreis berühren, besitzen. Alsdann müssen die einem belieben Punkte zugehörigen elementaren Complex-Kegel vier gemeinsame Erzeugende, deren Länge gleich Null ist, haben.

Dieses letzte ist aber, wie wir zogleich beweisen werden, durch unsere Kugel-Abbildung eine Consequenz davon, dass die betreffenden Linien-Complexe dieselbe Singularitätenfläche haben. Man betrachte nehmlich im Raume R einen Kugel-Complex des confocalen Systems und einen beliebigen Punkt P, andererseits in r den entsprechenden Linien-Complex und P's Bildlinie l. Die Kugeln unseres Complexes, deren Trajectorie-Kreise durch P gehen, umhüllen den zugehörigen elementaren Complex-Kegel und bilden sich in r als Gerade g [1] ab, welche l schneiden und zugleich in diesem Schnittpunkte einen Complex-Kegelschnitt, dessen Ebene die Linie l enthält, berühren. Wenn zwei consecutive Gerade g sich in einem auf l gelegenen Punkte p schneiden — was nur in l's vier Schnittpunkten p_1, p_2, p_3, p_4 mit der Singularitätenfläche eintritt —, so berühren sich die Bild-Kugeln, deren Durchschnitts-Curve somit zerfällt, und zwar in eine durch P gehende Gerade L zusammen mit einer anderen imaginären Linie, die hier nicht in Betracht kommt. Nun sind die Geraden L_1, L_2, L_3, L_4 einerseits das Bild der Punkte p_1, p_2, p_3, p_4, andererseits liegen sie auf dem elementaren Complex-Kegel, und also enthalten, wie früher behauptet, die einem Punkte zugehörigen elementaren Complex-Kegel vier gemeinsame Linien, die den imaginären Kreis schneiden.

Zwei confocale Linien-Complexe zweiten Grades bestimmen immer einfach unendlich viele Flächen, deren beide Systeme Haupttangenten bezüglich den beiden Complexen gehören. Wenn die gemeinsame Singularitätenfläche ein Tetraeder ist, so sind die eben besprochenen Flächen mit denen identisch, welche Herr Klein und ich unter der Bezeichnung: Flächen W untersucht haben. [2]

[1] Die Complexlinien g gehören der Polar-Congruenz der Geraden l hinsichtlich unseres Complexes. Cfr. *Plücker*, Neue Geometrie des Raumes, n. 304.

[2] Wenn ein Complex zweiten Grades aus unserem confocalen Systeme continuirlich in einen doppeltzählenden linearen Complex übergeht, so wird die zugehörige D_{11} eine *lineare* Differential-Gleichung, und zwar entspricht dieselbe der, dem linearen Complexe zugehörigen Congruenz zweiter Ordnung und Classe, welche von Doppeltangenten der betreffenden Kummerschen Fläche gebildet wird. Setzen wir nun voraus, dass in dem Satze des Textes der eine Complex ein allgemeiner, der zweite ein linearer ist, so werden also die gemeinsamen Integralflächen Li-

Mit Berücksichtigung dieses Satzes wie der Entwickelungen in Nummer 43 würde es nicht schwer sein zu beweisen, dass die Haupttangenten-Curven eines Complexes zweiten Grades mit 17 Constanten [$a X^2 + b Y^2 + c Z^2 + d H^2 = 0$] durch Quadratur eines algebraischen Differentials bestimmt werden können; ich gehe aber nicht darauf näher ein.

66. Eine Schaar confocaler Kugel-Complexe zweiten Grades ordnet nach dem Obenstehenden jedem Punkte P einfach unendlich viele confocale Kegel zweiten Grades zu,[1] und offenbar finden sich unter denselben drei paarweise orthogonale Ebenen, den drei[2] Complexen, welche die Punkt-Kugel P enthalten, entsprechend. Man erkennt leicht, dass diese Ebenen in P drei Flächen berühren, solche nehmlich, die den geometrischen Ort für Punkt-Kugeln unserer Complexe bilden. Berücksichtigt man nun, dass diese Flächen als das Bild einer Schaar Linien-Congruenzen zweiter Ordnung und Classe, von vierter Ordnung sind und dabei den unendlich weit entfernten, imaginären Kreis zweifach enthalten, so kann man den folgenden Satz aussprechen:

Die Punkt-Kugeln confocaler Kugel-Complexe zweiten Grades bilden einfach unendlich viele Flächen vierter Ordnung, die einem irreductiblen Orthogonal-System, und zwar dem Darboux-Moutardschen gehören.

Wählt man nun, wie sich vom selbst darbietet, dieses Orthogonal-System zu Coordinaten-Systeme und zu Punkt-Coordinaten die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der durch einen Punkt gehenden Flächen,

nienflächen. *Unter den Integralflächen eines Complexes zweiten Grades finden sich im Allgemeinen sechs Schaaren Regelflächen, deren Erzeugende die Singularitätenfläche zweifach berühren.* Wenn beide Complexe linear sind, so erhält man den folgenden Satz: Zwei beliebige unter den sechs Congruenzen zweiter Ordnung und Classe, die einer Kummerschen Fläche gehören, bestimmen einfach unendlich viele Hyperbololoids, deren Erzeugende bezüglich den beiden Congruenzen gehören. Diese Hyperboloids-Schaaren zerfallen übrigens jedesmal in zwei Gruppen.

[1] Wenn die confocalen Kugel-Complexe von Kugeln gebildet werden, deren Mittelpunkte auf confocalen Flächen zweiten Grades liegen, so sind die im Texte besprochenen confocalen Kegel Tangenten-Kegel der genanntan Flächen.

[2] Ohnedies gehört die Punkt-Kugel P dem linearen Complexe ($H = 0$).

so lässt die Gleichung D_{12} eines Complexes, dessen Parameter c ist, sich folgenderweise schreiben:

$$f(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 c)\left(\frac{d\Phi}{d\lambda_1}\right)^2 + f(\lambda_2 \lambda_3 \lambda_1 c)\left(\frac{d\Phi}{d\lambda_2}\right)^2 + f(\lambda_3 \lambda_1 \lambda_2 c)\left(\frac{d\Phi}{d\lambda_3}\right)^2 = 0. \quad (1)$$

Dieses liegt darin, dass die früher besprochenen drei orthogonalen Tangentebenen jedesmal Hauptebenen des elementaren Complex-Kegels sind.

Wenn nun λ_1, λ_2, λ_3 constant bleiben, c dagegen variirt, so sollen wir bekanntlich eine Schaar Kegel erhalten, welche vier Erzeugende, und zwar solche, die den imaginären Kreis schneiden, gemein haben. Die Gleichung dieser Kegel in Ebenen-Coordinaten hat dieselbe Form wie diejenige confocaler Kegel in Punkt-Coordinaten, und also kann $f(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 c)$ auf die Form:

$$\frac{F(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)}{\varphi(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 c) - \varphi(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_1)}$$

gebracht werden. Der Nenner soll *nur* unter der Voraussetzung ($c = \lambda_1$) verschwinden, und also muss $\varphi(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 c)$ eine ganze und lineare Funktion der Grösse c sein.[1]

$$\varphi = \psi_1(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)\, c + \psi_2(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3).$$

Bei Einsetzung und Reduktion erhält $f(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 c)$ die folgende Form:

$$\frac{\Pi(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)}{c - \lambda_1}.$$

Wenn nun unter den drei Funktionen Π die eine gleich Null wird, so zerfallen alle dem betreffenden Punkte zugehörigen elementaren Complex-Kegel in zwei ebene Büschel, deren Axen in einer gemeinsamen Ebene liegen. Dieses kann nur eintreffen, wenn der Punkt (λ) auf einer unter den fünf Sphären, die unserem Orthogonal-System gehören, gelegen ist.

Wenn andererseits unter den Funktionen Π die eine unendlich wird (oder was auf dasselbe hinauskommt zwei zur selben Zeit verschwinden), so gehen alle elementare Complex-Kegel in *den-*

[1] Es wäre auch denkbar, dass φ eine ganze und lineare Funktion eines folgenden Ausdrucks $\frac{a+c}{b+c}$ war, dabei vorausgesetzt, dass a und b nur von den Variabeln λ_1, λ_2, λ_3 abhang. Dieser Fall wird leicht auf den im Texte besprochenen zurückgeführt.

selben doppeltzählenden Ebenen-Büschel über. Dieses kann nur eintreffen, wenn der Punkt λ sich auf der dem Orthogonal-Systeme zugehörigen imaginären Developpablen befindet.

In dieser Weise lässt sich beweisen, dass $\Pi(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$ auf die folgende Form gebracht werden kann:

$$\frac{F(\lambda_1)}{\varphi(\lambda_2)-\varphi(\lambda_3)},$$

dass also (1) sich folgenderweise schreiben lässt:

$$U(c)=\frac{F(\lambda_1)}{\varphi(\lambda_2)-\varphi(\lambda_3)}\,\frac{\left(\frac{d\Phi}{d\lambda_1}\right)^2}{\lambda_1-c}+\frac{F(\lambda_2)}{\varphi(\lambda_3)-\varphi(\lambda_1)}\,\frac{\left(\frac{d\Phi}{d\lambda_2}\right)^2}{\lambda_2-c}+$$
$$+\frac{F(\lambda_3)}{\varphi(\lambda_1)-\varphi(\lambda_2)}\,\frac{\left(\frac{d\Phi}{d\lambda_3}\right)^2}{\lambda_3-c}=0.$$

Ich betrachte nun die einfach unendlich vielen gemeinsamen Integralflächen der beiden Gleichungen:

$$U(c_1)=0,\ U(c_2)=0 \qquad (2)$$

und die entsprechenden Durchschnitts-Curven mit einer gewählten Fläche λ_1. Diese Curven-Schaar wird bestimmt durch eine Differential-Gleichung zwischen λ_2 und λ_3, die aus (2) sich herleiten lässt, und zwar findet man, dass die Variabeln unmittelbar separirt werden können. Es werden aber die besprochenen Integralflächen *dreifach* von solchen Durchschnitts-Curven erzeugt, und also giebt die allgemeine Gleichung der Curven zugleich die Gleichung der zugehörigen Integralflächen.

Lässt man endlich c_2 variiren, c_1 dagegen constant bleiben, so erhält man ein vollständiges Integral der Differential-Gleichung $U(c_1)=0$, und also können wir behaupten, dass die *Bestimmung der Haupttangenten-Curven des allgemeinen Complexes zweiten Grades auf Quadratur eines algebraischen Differentials zurückgeführt werden kann.*

Im Anschluss zu dem Vorangehenden möchte ich hier anführen, dass ich durch ähnliche Betrachtungen den folgenden interessanten Satz gefunden habe:

Wenn zwei beliebige Linien-Complexe eines irreductiblen Systems jedesmal einfach unendlich viele gemeinsame Integralflächen besitzen, so *haben die Complexe dieselbe Singularitätenfläche: sie sind nach Herrn Kleins Ausdrucke confocal.*

§ 24.

Zusammenhang zwischen der Theorie zweier Flächen vierter Ordnung.

67. Unsere Kugel-Abbildung führt bekanntlich eine im Raume R gegebene Fläche vierter Ordnung F_4, die den undlich weit entfernten imaginären Kreis zweifach enthält, in eine *Kummersche* Fläche vierter Ordnung f_4 mit 16 Knotenpunkten über. Es gründet sich hierauf ein sehr *bemerkenswerther Zusammenhang zwischen der Theorie dieser beiden, zuerst von Hern Kummer untersuchten Flächen.*[1]

Eine jede auf F_4 gelegene Curve n^{ter} Ordnung schneidet den imaginären Kreis in n Punkten, und bildet sich also (§ 8, 21) in r als eine Linienfläche n^{ter} Ordnung, die f_4 nach einer Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung berührt, ab. Beispielsweise geben F_4's 16 Gerade, aus denen jede fünf andere schneidet, 16 ebene Strahl-Büschel, die f_4 nach Kegelschnitten berühren, und hierbei hat jeder Büschel eine Gerade mit fünf anderen gemein (§ 7, 17). Ferner gehen die auf F_4 gelegenen zehn Kreisschaaren über in zehn Hyperboloid-Schaaren, die f_4 nach Curven vierter Ordnung berühren u. s. w.[2]

Aus den allgemeinen Entwickelungen in Nummer 20 folgt, dass die auf F_4 gelegenen Curven C, deren Länge gleich Null ist, sich als Curven c auf f_4 abbilden, deren Tangenten diese Fläche zweifach berühren. Nun hat einerseits Herr *Darboux* (nach einer mündlichen Mittheilung) gefunden, dass die Auffindung der Curven C sich auf Quadratur zurückführen lässt, andererseits hat Herr *Klein* dieselbe Bemerkung hinsichtlich derjenigen anf f_4 gelegenen Curven gemacht, deren Tangenten singuläre Linien eines zuge-

[1] In § 11 bestimmte ich f_4's Haupttangenten-Curven mittelst F_4's Krümmungslinien.

[2] Die hier angedeutede Methode zur Discussion der Kummerschen Fläche und einer zugehörigen Congruenz zweiter Ordnung und Classe gründet sich auf die Abbildung des linearen Complexes in einem Punktraume. Einfacher ist es. den Ausgangspunkt in der Abbildung desjenigen Complexes, dessen Singularitätenfläche ein Tetraeder ist, zu nehmen. (Lie. Repr. der Imag. Academie zur Chr.a 1869, pg. 107, 122 -130.)

hörigen Complexes zweiten Grades sind. Setzt er insbesondere voraus, dass der Complex ein linearer ist, so findet er die Curven c, und offenbar ist diese letzte Bestimmung durch meine Abbildung mit derjenigen des Herrn *Darboux* äquivalent.

68. Die Herren *Darboux* und *Moutard* haben bekanntlich gefunden, dass eine F_4 auf fünf Weisen als vollständige Enveloppe von zweifach unendlich vielen Kugeln, die jedesmal eine Sphäre S orthogonal schneiden, aufgefasst werden kann. Diese fünf Sphären S schneiden einander paarweise orthogonal; ferner führt eine Transformation durch reciproke Radien hinsichtlich einer Sphäre S jedesmal F_4 in sich selbst über.

Andererseits hat Herr *Kummer* gezeigt, dass die Doppeltangenten einer f_4 sechs Congruenzen zweiter Ordnung und Classe bilden, und hierbei liegen die sechs entsprechenden linearen Complexe C nach Herrn *Klein* paarweise in Involution. Die Fläche transformirt sich in sich selbst einerseits durch eine jede reciproke Umformung hinsichtlich eines linearen Complexes C, andererseits durch die 15 reciproken Punkt-Transformationen, zu denen die eben besprochenen Transformationen sich paarweise zusammensetzen lassen.

Diese letzte Theorie geht, wenn $(H = 0)$ als einen Complex C gewählt wird, durch meine Kugel-Abbildung unmittelbar in die erste über.

Herrn *Kleins* Darstellung eines Systems confocaler Linien-Complexe mittelst seiner 6 Fundamental-Complexe: $(x_1 = 0)$ $(x_2 = 0)$ . . . . $(x_6 = 0)$:

$$\frac{x_1^2}{k_1 + \lambda} + \frac{x_2^2}{k_2 + \lambda} + \cdots \frac{x_6^2}{k_6 + \lambda} = 0, \qquad (1)$$

wobei die Linien-Coordinaten einer Bedingungs-Gleichung:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_6^2 = 0$$

genügen, giebt eine elegante Form[1] für die allgemeine Glei-

[1] Es ist mir nicht bekannt, dass diese Form veröffentlicht worden ist. Nach einer Mittheilung des Herrn Darboux über Gruppen von 16 zusammengehörigen Punkten auf einer F_4 halte ich es doch für wahrscheinlich, dass er dieselbe gefunden hat.

chung eines *Darboux-Moutardschen* Orthogonal-Systems, die folgende nehmlich:

$$\frac{s_1^2}{k_1+\lambda}+\frac{s_2^2}{k_2+\lambda}+\ldots\frac{s_5^2}{k_5+\lambda}=0. \qquad (2)$$

Die fünf *Punkt-Coordinaten* $s_1, s_2 \ldots s_5$, zwischen denen eine Bedingungs-Gleichung:

$$s_1^2+s_2^2+\ldots s_5^2=0$$

stattfindet, bezeichnen die mit gewissen Coefficienten multiplicirten Potenzen eines Punkts hinsichtlich der fünf paarweise orthogonalen Sphären S.

Herr *Klein* hat aus der Gleichung (1) geschlossen, dass die Geraden eines Complexes zweiten Grades sich in Gruppen auf 32 zusammenfassen lassen, und zwar in solcher Weise, dass eine jede unter den früher besprochenen Transformationen eine beliebige Gruppe in sich selbst überführt. Ebenso zeigt (2), dass die Punkte einer F_4 sich zu 16 zusammenordnen dergestalt, dass eine jede Transformation durch reciproke Radien hinsichtlich einer Sphäre S die Gruppe ungeändert lässt. Auf die Existenz dieser Punkt-Gruppen hat mich Herr *Darboux* aufmerksam gemacht.[1]

Hier mag die Bemerkung ihren Platz finden, dass Herrn *Moutards* Untersuchungen über Flächen, die von zweifach unendlich vielen Ortogonal-Kugeln einer Sphäre umhüllt werden, durch meine Abbildung einem Studium von Linien-Congruenzen, die einem linearen Complexe gehören, entsprechen.

§ 25.

Zur Theorie des linearen Complexes. Ueber Herrn Kleins metrische Linien-Geometrie.

69. Im Raume r treten bei unserer Kugel-Abbildung ein linearer Complex ($H=0$) und eine Gerade desselben (Const. $=0$) als ausgezeichnetes Gebilde auf; andererseits ist der unendlich

[1] Bemerkenswerth ist auch, dass die Aufgaben: alle Special-Formen der Flächen F_4 und f_4 anzugeben äquivalente Probleme sind. Die Untersuchungen des Herrn *Korndörfer* (Math. Ann. I pg. 592, II pg. 41) lassen sich also für die Theorie der *Kummerschen* Fläche, vierter Ordnung mit 16 Knotenpunkten verwerthen.

weit entfernte imaginäre Kreis ein Fundamental-Gebilde in R, und zwar das einzige. Es folgt hieraus, dass die gewöhnliche metrische Geometrie, die sich ja überhaupt mit auf den genannten Kreis bezüglichen projectivischen Beziehungen beschäftigt, in eine Geometrie[1] übergeht, dessen Gegenstand covariante Beziehungen hinsichtlich eines linearen Complexes und einer Geraden desselben sind. Ohne diesen Gesichtspunkt weiter zu entwickeln, werde ich einige Theorien, die sich hierauf beziehen, darstellen.

a. Es lässt sich die Aufgabe stellen alle Gruppen linearer Transformationen anzugeben. Ich sage dabei, dass eine continuirliche oder discontinuirliche Schaar Transformationen eine Gruppe bilden, wenn die Combination einiger diesen Transformation jedesmal mit einer Transformation der gegebenen Schaar äquivalent ist. Herr *Jordan* hat insbesondere alle Gruppen *Bewegungen* bestimmt.

Erinnert man nun (§ 12, 31), dass die Bewegungen des Raumes R lineare Transformationen des anderen Raumes entsprechen und zwar solche, *bei denen einfach unendlich viele lineare Complexe, die sich nach einer gemeinsamen Geraden berühren, in sich übergeführt werden,* so sieht man, dass unsere Abbildung, auf die Jordansche Theorie angewandt, alle Gruppen unter den eben besprochenen linearen Transformationen giebt.

b. Die Flächen eines irreductiblen Orthogonal-Systems in R sind bekanntlich in eine imaginäre Developpable eingeschrieben; demzufolge bilden sie sich in r als Congruenzen C ab, deren Brennflächen[2] einander nach einer gemeinsamen Haupttangenten-

[1] Bemerkenswerth ist, dass dem Winkel-Begriffe des Raumes R im anderen Raume ein Begriff entspricht, der sich nur auf den linearen Complex ($H = 0$), dagegen nicht auf die Gerade (Const. $= 0$) bezieht. Der Beweis liegt darin, dass einer jeden Transformation des Raumes r, die den Complex ($H = 0$) in sich überführt, eine Umformung von R entspricht, bei welcher alle Winkel ungeändert bleiben (§ 12, 33).

[2] Wenn das gegebene Orthogonal-System das Darboux-Moutardsche ist, so sind die Brennflächen (§ 23, 66) eine Schaar *Kummersche* Flächen vierter Ordnung mit 16 Knotenpunkten, die einander nach einer gemeinsamen Haupttangenten-Curve 8ter Ordnung und Classe berühren, und sonst keinen Schnittpunkt haben.

Curve berühren. Der bekannte Satz, dass die Flächen eines Orthogonal-Systems einander nach Krümmungslinien schneiden, zeigt mit Berüchsichtigung des Theorems in § 11, 28, dass die gemeinsamen Geraden zweier Congruenzen C eine Linienfläche bilden, welche die beiden zugehörigen Brennflächen nach Haupttangenten-Curven berührt. Nun giebt es bekanntlich unbegrenzt viele Orthogonal-Systeme,[1] und *also kann ein linearer Complex auf unbegrenzt vielen Weisen getheilt werden in Congruenzen, welche die Eigenschaft besitzen, dass die zweien Congruenzen gemeinsame Linienfläche jedesmal die zugehörigen Brennflächen nach Haupttangenten-Curven berührt.*

70. Endlich werde ich andeuten in welchem Verhältnisse die Ideen dieser Abhandlung zu einer Note von Herrn *Klein* stehen, die derselbe in den Göttinger Nachrichten 1871 No. 1 veröffentlicht hat.

Der eben aufgestellte Satz kann die Frage veranlassen, ob die besprochene Eigenschaft für den linearen Complex charakteristisch ist, oder ob dieselbe einem jeden Complexe zukommt.

Andererseits führt die von Herrn *Klein* gegebene Gleichungs-Form confocaler Complexe zweiten Grades in Verbindung mit den Theorien des Paragraphs 23 natürlich darauf diese Complex-Schaar als ein Analogon im Linien-Raume von den Orthogonal-Systemen des gewöhnlichen Punkt-Raumes aufzufassen. Es liegt hier zugleich nach eine Erweiterung des Dupinschen Theorems und zwar in der folgenden Form zu vermuthen: die Linienfläche, welche dreien der Complexe gemeinsam ist, berührt die Brennfläche der zweien dieser drei Complexe gemeinsamen Congruenz

Es ist bemerkenswerth, dass wenn man unter diesen Flächen eine beliebige nimmt und alle zugehörigen confocalen Complexe zweiten Grades betrachtet, so lässt die im Texte besprochene Congruenz-Schaar sich immer als Durchschnitt zwischen diesen Complexen und einem doppeltzählenden linearen Complex desselben Systems auffassen.

[1] Bei dieser Gelegenheit möchte ich darauf aufmerksam machen, dass die Combination zweier Theorien, die Herr *Darboux* (Comptes rendus, Aug. 1869) und ich (Götting. Nachrichten, Mai 1871) gegeben haben, dazu dienen kann, *unbegrenzt viele neue Orthogonal-Systeme* eines Raumes mit n Dimensionen aufzufinden.

nach einer Haupttangenten-Curve. Ist dieser Satz bewiesen, so fragt es sich, ob noch mehrere Systme Linien-Complexe in dieser Beziehung stehen. Herr *Klein* hat nun gefunden,[1] dass diesen unbestimmten Speculationen, die sich auch mir dargeboten hatten, eine Realität entspricht. Beim Beweise benutzt er zur Bestimmung der geraden Linie vier Coordinaten, welche mit den von mir in dieser Abhandlung und auch in früheren Arbeiten als Linien- oder Kugel-Coordinaten[2] benutzten vier Grössen X, Y, Z, H identisch sind. Er knüpft daran die weitere Bemerkung, dass unter der Zugrundelegung dieser Coordinaten die Linien-Geometrie mit der metrischen Geometrie zwischen vier Variabeln identisch wird, insofern nehmlich bei ihrer Zugrundelegung das Moment zweier Geraden sich darstellt wie die Entfernung zweier Punkte im Raume von vier Dimensionen und die Bedingung für die involutorische Lage zweier Complexe wie die Bedingung für die Orthogonalität zweier Flächen in diesem Raume.

Es ist dieses offenbar etwas Anderes als der schon früher von mir hervorgehobene Zusammenhang zwischen gewissen Theorien der Plückerschen Linien-Geometrie und einigen Problemen der gewöhnlichen metrischen Geometrie.

[1] Göttinger Nachrichten, März 1871.

[2] Ich muss hinzufügen, dass die Coordinaten X, Y, Z, H als ein Degenerationsfall der von Herrn Klein in 1868 eingeführten 6 *homogenen* Linien-Coordinaten, zwischen denen eine Bedingungs-Gleichung von der Form $(x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_6^2 = 0)$ stattfindet, aufzufassen sind (§ 9, 24).

Undersøgelser over Hardangerfjordens Fauna.

Af

G. O. Sars.

(Foredraget i Mødet den 12 Mai 1871.)

Det er et ganske eiendommeligt Træk ved vor Kysts Naturforholde, at de største Dybder i Regelen ikke, som man skulde have ventet, ere at finde længst ude mod Havbrynet ved den ydre Skjærgaard, men omvendt fortrinsvis i de dybt ind i Landet indskjærende Fjordarme, og som oftest her netop i den allerinderste Del. For ved vore Kyster at kunne anstille en rigtig „deep-sea-dredging“ er det derfor ikke som f. Ex. ved Englands Kyster nødvendigt at udruste hertil store Krigsskibe med fuld Besætning for at kunne modstaa Oceanets Bølger og Storme. Heller ikke trænges der her om hverken Kompas eller andre nautiske Instrumenter for at bestemme, hvor man kaster sin Bundskrabe ud. Vil man, som sagt, naa ned til rigtig store Dybder ved vore Kyster, styrer man ikke Kursen tilhavs, men tager ombord paa et af de smaa letvindte, skarptbyggede Fjorddampskibe, der tydeligt nok ikke ere beregnede for noget særdeles haardt Farvand, og som ogsaa efter en Tid at have fulgt langs Kysten indenfor den ydre beskjærmende Skjærgaard vender Stævnen lige ind mod Land. Reisens Maal er imidlertid langtfra endnu naaet. Er man kommen nær nok den i Begyndelsen som en sammenhængende Mur sig visende Kyststrækning, aabner der sig et smalt Indløb, hvorigjennem man styrer ind i et i Baggrunden med blaanende Fjelde indrammet Fjordbassin. Det lille skarptbyggede Dampskib farer hurtigt henover den rolige Vandflade, og efter nogle Timers Fart begynder man allerede at kunne skimte tydeligere og tydeligere de forskjellige

Partier i Bunden, der før laa i blaa Taage. Tror man imidlertid, at man nu har naaet Enden paa Reisen, tager man feil. Man dreier om en Odde, og et nyt Bassin, lignende det, man allerede har tilbagelagt, aabner sig igjen, og saaledes fremdeles. Man seiler omkring Odde efter Odde, og altid har man foran sig et utilbagelagt Stykke af Fjorden. Jo længere man kommer frem, jo vildere og mere storartet bliver Naturen; man er paa alle Kanter omgiven af høie, tildels med evig Sne belagte Fjelde, der rykke nærmere og nærmere om en, saa at man skulde tro sig langt borte fra Havet og dets Dyreverden og hensat til et af de afsidesliggende Fjeldvande i Hjertet af Landet. Og dog har man under sig fremdeles en rig Verden af forskjelligartede marine Dyr, der her uforstyrrede af Oceanets Strømme og Brændinger i Fred og Ro leve og forplante sig adskilte fra sine Samslægtninger ud mod den barske Havkyst. Endelig har man naaet sin Reises Maal. Man gaar fraborde og bringer sine forskjellige Skrabegreier iland. Men kan man her virkelig vente at faa Brug for den enorme Mængde oprullede Toug, som man har ført med sig? Fjorden synes knapt at være bredere, end at man med nogle faa kraftige Aaretag kunde naa over til den modsatte Bred. Dette beror nu vistnok for en Del paa et Sandsebedrag, bevirket af de høie lodret opstigende Fjelde paa hver Side; men Fjorden er dog her saa smal, at man vanskeligt, uden at vide det, skulde falde paa, at man her skulde kunne naa ned til nogen betydelig Dybde. Og dog har man ofte netop i saadanne trange Fjordarme et svælgende Dyb, større end man finder det, selv om man reiste mange Mil ud paa det aabne Hav. Til sine Undersøgelser her er det tilstrækkeligt at tage en liden Fiskerbaad med et Par stærke Karle, og nogle faa Aaretag henover den glatte Vandflade vil bringe os ud paa Dybder, som man ellers kun finder ved dagelange Togter ud paa det urolige Hav.

Den ovenstaaende Skildring gjælder ikke blot Hardangerfjorden, men passer i alt væsentligt ogsaa paa de mange andre især paa Vestkysten af vort Land indstikkende Fjorde, hvoraf dog Hardangerfjorden er en af de mægtigste. Disse Fjorde danne ligesom dybe Revner i den sammenhængende Fjeldmasse, hvor de bratte Fjeldsider ogsaa fortsætte sig langt under Vandet, snart som glatte Klippevægge, snart som et Virvar af store løsrevne Klippestykker eller Urder. Bunden af Revnen eller det dybeste Parti af Fjorden er altid bedækket med et tykt Lag af Mudder, som her i Tidernes Løb lidt efter lidt har ansamlet sig, dels som Residuum af det med Elvene i Fjorden udførte jordholdige Vand, dels ved decomponerede organiske Stoffe, der lidt efter lidt fra begge Skraaninger ere nedfældte her. Dybden af denne midt efter Fjorden gaaende Rende eller Mudderkaas er imidlertid meget forskjellig i de forskjellige Dele af Fjorden; paa visse Steder kan der strække sig tværs over Fjorden forholdsvis grunde Tværbakker, medens Bunden paa andre Steder pludselig kan falde af til ganske enorme Dybder, dannende mere eller mindre udstrakte isolerede Dybbassin, og mærkeligt er det, at det netop er i den allerinderste Del, hvor saadanne Dybbassin helst er at træffe. Dette er ikke blot Tilfældet med Hardangerfjorden, men ogsaa med de fleste, om ikke alle vore større Fjorde. Ogsaa for Christianiafjordens Vedkommende har et lignende Forhold ialfald tidligere fundet Sted. Mjøsen har nemlig engang udgjort den inderste Del af Christianiafjorden, noget, hvorpaa vi have et talende Bevis i de endnu her levende mærkelige Levninger af en arktisk Havsfauna, og i Mjøsen finde vi nu Dybder saa store, at Bunden af denne Indsjø, skjønt dens Vandspeil nu er hævet omtrent 400 Fod over Havet, virkelig ligger betydeligt under det dybeste Sted i Christianiafjorden.

Nogen virkelig methodiskt anstillet Dybdeundersøgelse har ikke ved vore Kyster været foretaget, førend jeg hertil fik en bekvem Anledning ved mine mange Reiser i Lofoten. Mine Undersøgelser strakte sig her lige til 300 Favnes Dyb, og den store Mængde af forskjelligartede, ofte høist mærkværdige Dyreformer, som her forefandtes, og som allerede for en Del ere blevne omtalte af min Fader, vakte megen Opsigt i den videnskabelige Verden og gav ogsaa Anledning til de i de senere Aar med stor Liberalitet af den engelske Regjering foranstaltede storartede Dybvandsundersøgelser, der allerede have bragt for Lyset saa mange vigtige videnskabelige Resultater. For at kunne udstrække disse Undersøgelser til en om muligt endnu større Dybde ansøgte min Fader og jeg i Fællesskab om et Reisestipendium for i Sommeren 1869 at undersøge Hardangerfjorden, hvor efter Opgivende de største bekjendte Dybder ved vor Kyst skulde findes.[1] Vi vare blevne enige om at fordele Arbeidet mellem os saaledes, at jeg skulde behandle Crustaceerne, min Fader de øvrige Dyreclasser. Desværre skulde han ikke faa Anledning til at berige Videnskaben med sine mange værdifulde Erfaringer fra denne Reise, saa at det hele Arbeide nu er falden paa mine Skuldre. Min oprindelige Del af Arbeidet, nemlig Crustaceernes Bearbeidelse, som jeg allerede for længere Tid siden havde tilendebragt, skal jeg da her først publicere, forbeholdende mig senere at omtale, hvad jeg af de øvrige Dyreclasser finder at være af Interesse. Inden jeg gaar over til mit specielle Emne, tror jeg dog først at burde give nogle almindelige Bemærkninger om Reisens Plan og Dyrelivets hovedsageligste Character paa de undersøgte Steder.

Undersøgelserne anstilledes paa 2 forskjellige, langt fra hinanden beliggende Steder, nemlig ved *Utne* i det inderste af Fjorden, og ved ***Mosterhavn*** i den yderste Del af samme. Paa begge Steder undersøgtes fortrinsvis de større Dybder nedenfor 80 Favne. Ved Utne, hvor vi først tog Ophold, var det især den brat mod Dybet nedadheldende Fjeldside udenfor Hesthammer, eller den fremspringende Odde, hvor Fjorden, efterat have strakt sig i nordøstlig Retning, pludselig bøier imod Syd, der viste sig rig paa forskjellige Sjødyr, og som derfor ogsaa mest nøie undersøgtes. Det er paa denne Fjeldside i en Dybde af omkring 150 Favne, at den mærkværdige af Asbjørnsen opdagede Sjøstjerne, *Brisinga endecacnemos*, fortrinsvis holder til, og det lykkedes os ogsaa ved flittig Brug af Bundskraben her at hente op flere vakre Exemplarer af dette sjeldne Dyr, som jeg ved en anden Leilighed nærmere skal omtale. Sammen med den erholdtes i Skraben talrige Exemplarer af den kjæmpemæssige *Lima excavata* (Fabr.), samt ogsaa adskillige Exem-

[1] Senere har jeg bragt i Erfaring, at Sognefjorden skal være endnu dybere, idet den paa et Sted endog skal gaa ned til over 600 Favne.

plarer af den brillant farvede sjeldne *Echinus elegans* Düb. & Koren. Forskjellige Crustaceer, hvoraf især den høinordiske Form *Hippolyte polaris* Sab. var overordentlig hyppig, toges ligeledes her og ville i det følgende nærmere blive omhandlede. Den omtalte Fjeldside er idethele ganske glat, saa at der i Skraben næsten intet andet kom op end Dyr, meget sjelden Smaastene og andre anorganiske Legemer. Den styrter med en Gang temmelig brat ned til en Dybde af over 300 Favne, og nu antager Bunden en helt anden Character. Den er nu overalt, indtil man træffer paa den modsatte opstigende Skraaning, bedækket af et tykt Lag brunligt Mudder, der lige ind ved Bakken endnu er temmelig rig paa Sjødyr, men længere ud bliver mere fattig. De Dyr, som findes her, ere imidlertid af stor Interesse baade ved den store Dybde, hvori de leve, og ved den eiendommelige udprægede arktiske Charakter, de vise. Et Par Dage offredes ogsaa til Undersøgelsen af det største i Fjorden bekjendte Dyb, der ligger omtrent midtfjords mellem Hesthammer og den modsatte Bred, og som viste sig at være henimod 500 Favne. Bundskraben befandtes imidlertid at være for let i Forhold til den Mængde udfirede Toug, saa at det først efter mange forgjæves Forsøg lykkedes at faa noget af Bunden op. Denne bestod af det samme mørke brunlige Mudder som nærmere Land; men da dette Mudder blev skyllet igjennem en fin Sigt, frembød det et høist eiendommeligt Udseende, idet Residuet næsten helt og holdent bestod af enorme Mængder af et lidet rundt brunagtigt Legeme i Form og Størrelse som smaa Hagelkorn. Dette viste sig ved nærmere Undersøgelse at være den mærkelige allerede tidligere af min Fader iagttagne Rhizopode, *Saccammina sphærica* M. Sars, hvis Hyppighed her var ganske forbausende, saa at man gjerne kunde characterisere dette Mudder som Saccamminamudder i Analogi med hvad de engelske Naturforskere kalde Globigerinamud fra de store Dybder i Atlanterhavet. Imellem disse kugleformige Rhizopoder fandtes ogsaa en hel Del andre i Form af lange radierende Stave af en lysere brunagtig Farve, hvilke viste sig at være den ligeledes af min Fader tidligere fra de store Dybder ved Lofoten anførte

Rhabdammina abyssorum M. Sars. Endelig fandtes i den samme Portion Mudder nogle eiendommelige lyse ved første Øiekast kalkagtige Rør, som havde en skuffende Lighed med Anneliderør, men som ved nøiere Undersøgelse viste sig at være en høist eiendommelig ny Repræsentant af den samme lavtstaaende Dyrtype, hvortil de 2 øvrige omtalte Former høre. Denne Form, der af min Fader blev benævnt *Bathysiphon filiformis*, skal jeg ved en anden Leilighed nærmere omtale. Foruden disse og lignende lavtstaaende Organismer var der imidlertid ogsaa høiere organiserede Dyreformer, baade Crustaceer, Mollusker og Annelider, og da dette Dyb er det største, der endnu ved vore Kyster er bleven undersøgt, skal jeg nedenfor give en fuldstændig Liste over de her forekommende Dyreformer.

Fortegnelse over de paa 500 Favnes Dyb ved Utne tagne Dyreformer.

Mollusca:

Utriculus expansus Jeffr.
Utriculopsis vitrea M. Sars.
Philine qvadrata (Wood).
Natica affinis Gmel.
Cyclostrema nov. spec. (C. nitens M. Sars non Philippi).
Cerithium metula Lovén.
Cadulus subfusiformis (M. Sars).
Pecten abyssorum Lovén.
Limopsis borealis Woodw.
Yoldia obtusa M. Sars.
— lucida Lovén.
— frigida Torell (Y. nana M. Sars).
Nucula tumidula Malm.
Kelliella abyssicola M. Sars.
Axinus flexuosus (Mont.)
— croulinensis Jeffr.
— eumyarius M. Sars.
Verticordia abyssicola (Lyonsiella) M. Sars.

Neæra obesa Lovén.
— lamellosa M. Sars.

Crustacea:

Munida tenuimana G. O. Sars n. sp.
Pontophilus norvegicus M. Sars.
Erythrops microphthalma G. O. Sars.
Diastylis tumida Lilljeborg.
— serrata G. O. Sars.
Tanais tenuimanus Lilljeborg.
Eurycope cornuta G. O. Sars.
Anonyx serrata A. Boeck.
Acanthonothus Brunii A. Boeck.
Amphithoe? sp.
Philomedes Lilljeborgii G. O. Sars.

Vermes:

Antinoë Sarsii Kindberg.
Nephthys longisetosa Ørst.
Lumbrinereis fragilis (Müll).
Lumbrinereis sp.
Glycera alba Müll.?
Nerine cirrata M. Sars.
Notomastus sp.
Chætozone setosa Malmgr.
Terebellides Strømii M. Sars.
Clymene paucicirrata M. Sars.
Sammensat Ascidie.
Idmonea sp.?

Echinodermata:

Amphilepis norvegica Ljungman.

Protozoa:

Saccammina sphærica M. Sars.
Rhabdammina abyssorum M. Sars.
— simplex M. Sars n. sp.
Asterorhiza limicola Sandahl.
Glandulina lavigata d'Orb.

Dentalina communis d'Orb.
Cristellaria cultrata Montf.
Textularia agglutinans d'Orb.
Bigenerina eruca M. Sars.
Trochammina irregularis P. & J.
Cornuspira foliacea Phil.
— marginata M. Sars.
Qvinqveoculina seminulum Linn.
Triloculina cryptella d'Orb.
Lituola subglobosa M. Sars.
Spongia? nær ved Pilularia Carp.
do. do. en anden Art.
Bathysiphon filiformis M. Sars n. gen. et sp.

Paa noget grundere Vand, men endnu nedenfor 300 Favne, fandtes endnu forskjellige andre Dyreformer. Da jeg imidlertid endnu ikke har vundet at undersøge det hele indsamlede Materiale, vil jeg her indskrænke mig til den ovenfor givne Liste, forbeholdende mig ved en anden Leilighed at give en fuldstændig Fortegnelse ogsaa af disse sidste. Idethele viste Faunaen sig paa de største Dybder her ikke synderlig rig, langt fattigere end f. Ex. ved Lofoten, skjønt enkelte Former vare repræsenterede i ikke faa Individer. Først naar man nærmede sig de fra Land mod Dybet skraanende Bakker, begyndte Dyrelivet at blive rigere og mere varieret, og umiddelbart nedenfor Bakken, hvor de store Limaer sade fastheftede, fandtes en stor Mængde forskjellige Dyr, der ikke vare at træffe længere ud paa Dybet.

Ved *Mosterhavn,* det andet undersøgte Punkt af Fjorden, var allerede Faunaen idethele betydelig rigere end ved Utne samt tildels af en forskjellig mere sydlig Character. Paa de større Dybder fandtes dog ogsaa her flere tydeligt udprægede arktiske Dyreformer. Den største Dybde gaar her kun ned til 150 Favne, og Bundens Beskaffenhed viste sig her temmelig ulig samme ved Utne. Istedetfor det mørke af de eiendommelige Rhizopoder Saccammina sphærica og Rhabdammina abyssorum opfyldte Mudder fandtes her et lyst, næsten hvidagtigt Ler, overalt gjennemvævet af forskjellige Spongiers Kiselnaale, der overalt fæstede sig til Skrabenettet og tildels borede sig dybt ind i Fingrene, naar man vilde undersøge det ophentede Materiale, forvoldende ubehagelige stikkende Smerter. Længere ind skraaner Bunden jevnt opad, idet der her dannes ét Slags Tverbakke over Fjorden, og denne Skraaning, der med en Dybde af omkring 80 Favne bestod af Sand blandet med Ler, viste sig især rig paa forskjellige ellers meget sjeldne Crustaceer, ligesom her ogsaa forekom i temmelig stort Antal adskillige sjeldne Dyreformer af andre Classer, saaledes af Echinodermer de 2 eiendommelige Holothurider *Echinocucumis typica* M. Sars og *Stichopus natans* M. Sars. Af de for det Indre af Fjorden saa characteristiske Dyreformer: *Brisinga endecacnemos, Echinus elegans* og *Lima excavata* fandtes derimod intet Spor. Et Stykke længere ind i Fjorden lige ud for Valestrands Prestegaard frembød Bunden i en Dybde af 80 — 100 Favne en ganske eiendommelig Beskaffenhed. Den var her i store Strækninger bevoxet af de smukke Coraler *Lophelia prolifera* og *Amphelia ramea,* hvoraf pragtfulde Stykker toges op i Skraben, og flere smukke Grene med udstrakte Polyper conserveredes paa Spiritus. Noget længere ude paa 150 F. D. geraadede ogsaa engang Bundskraben fast i det kjæmpemæssige Sjøtræ *Paragorgia arborea* Linn., men uden at faa mere op af dets seige Grene end nogle af de alleryderste Ender, hvorpaa dog enkelte Polyper med sine 8 finnede Tentakler vare temmelig udstrakte. Foruden paa de større Dybder fiskedes ogsaa et Par Dage, da Veiret var mindre gunstigt for Dybvandsundersøgelser, paa forholdsvis grundt Vand, 30—40 Favnes blød Lerbund, hvor ogsaa adskillige interessante Fund gjordes.

Hvad nu det paa Reisen gjorte Udbytte angaar, saa maa dette idethele siges at være tilfredsstillende. Især gjælder dette for Crustaceernes Vedkommende, hvoraf ikke faa interessante nye Former erholdtes, hvilke tilligemed de øvrige paa Reisen iagttagne Arter i det følgende nærmere skulle blive omtalte. Det var mig i høi Grad paafaldende at gjenfinde her mange af de af mig tidligere alene ved Lofoten, men ikke paa den mellemliggende

Kyststrækning, observerede Former. Disse Former ere uden Tvivl alle Levninger af den rent arktiske Fauna, der engang, i den saakaldte glaciale Tid, raadede langs vor hele Kyst, og som her i de indelukkede Fjordbassin endnu delvis har kunnet bibeholde sin oprindelige Character, medens den ud mod Havkysten ganske har maattet vige for den sig stadigt udbredende sydligere Fauna. Jeg har allerede tidligere havt Anledning til at omtale dette mærkelige Forhold for Christianiafjordens Vedkommende[1], og vi ville ogsaa finde, at Hardangerfjordens Fauna foruden med Lofotens ogsaa har en umiskjendelig Lighed med Christianiafjordens Fauna, og at alle disse 3 Localiteter have enkelte Former tilfælles, der mærkelig nok ikke ere iagttagne ved de mellemliggende Kyststrækninger.

[1] Undersøgelser over Christianiafjordens Dybvandsfauna.

Fortegnelse

over de paa Reisen observerede *Crustaceer* med Beskrivelse af de nye Former.

Decapoda:

Brachyura:

1. *Stenorhynchus rostratus* Linné. Ved Mosterhavn paa grundt Vand mellem Alger af og til, ikke derimod ved Utne.

2. *Hyas araneus* L. Ligeledes ikke saa sjelden ved Utne paa noget større Dyb.

3. *Carcinus maenas* L. Observeredes selv ind i det inderste af Fjorden ved Utne, hvor den som sædvanligt holder til lige op i Fjæren under Strandstene.

4. *Lithodes maja* L. Ved Hesthammer paa circa 100 F. D. en liden Unge. en anden af samme Størrelse længere ind i Fjorden, indenfor Utne, paa samme Dyb.

Anomura:

5. *Pagurus Pridauxii* Leach. Meget almindelig ved Hesthammer paa 100—150 F. D.

6. *Pagurus pubescens* Kr. Et Par Exemplarer af denne arktiske Art fandtes sammen med foregaaende.

7. *Pagurus chiroacantha* Lilljeborg. Ved Utne paa 20—30 F. D. sjelden.

8. *Galathea strigosa* L. 1 enkelt ungt Exemplar ved Mosterhavn paa Lophelia prolifera fra 100 F. D.

9. *Galathea tridentata* Esmark. I stor Mængde mellem Lophelia prolifera ved Mosterhavn. Mærkelig er denne Arts Forekomst alene sammen med ovennævnte Coral, paa hvilken den synes at føre et Slags parasitisk Liv. Under samme Forhold har jeg ogsaa fundet den paa 2 andre Punkter af vor Kyst, nemlig ved Lofoten og ved Bodø paa 80—150 F. D.

I Sjøen ved Mosterhavn toges nogle Exemplarer af en meget eiendommelig Decapodelarve, som med stor Sandsynlighed maa henføres til denne Art. Det store bagtil i 2 brede og i Kanterne fint tandede Lober udgaaende Rygskjold er oventil ganske glat og stærkt hvælvet og gaar fortil ud i en særdeles stor og bred i Kanterne saugtakket Pandeplade, der ganske bedækker Antennerne og de usædvanligt smaa med hvidgult Pigment forsynede Øine, samt ender med en fra den øvrige Del skarpt afsat tilspidset Torn. Bagkroppen ender med en særdeles bred tvelobet Halefinne, paa Siden af hvilken allerede de ydre Halevedhæng vare begyndte at voxe frem. Paa de største Individer vare allerede de virkelige Gangfødder anlagte som smaa cylindriske Fortsatser, og det første Par af disse viste allerede Antydning til den tilkommende Chela.

10. *Munida rugosa* Fabr. Temmelig almindelig saavel ved Utne som ved Mosterhavn paa 80—150 F. D., men aldrig dybere ned, hvor derimod den følgende nye Art begynder at optræde.

11. *Munida tenuimana* G. O. Sars, n. sp.

Descript. M. rugosæ simillima sed forma graciliore. Scutum dorsale supra visum elongato-qvadrangulare, antice qvam postice vix angustius, lateribus rectis et parallelis inqve parte dimidia antica dentibus antice vergentibus utrinqve 5, anteriore sat elongato et spina rostri laterali vix breviore, armatis. Rostrum frontale fere ut in M. rugosa, spina mediana dimidiam circiter scuti dorsalis longitudinem æqvante. Spinæ dorsales scuti 10, duæ anteriores sat magnæ regionis gastricæ, duæ similes sed breviores brevi spatio pone illas insertæ, una utrinqve in regione branchiali, deniqve 4 marginis posterioris. Segmenta corporis postici 3 priora supine spinosa, spinis sat magnis antice vergentibus inqve serie transversa dispositis, 6 segmenti 1mi, 4 2di et duabus lineæ medianæ approximatis segmenti 3tii. Superficies dorsalis corporis et antici et postici plicis ciliatis sculpta dispositione simili ac in M. rugosa sed semper multo paucioribus. Oculi magni, globosi, lævissimi, nullis pilis marginati, pigmento nigerrimo in animali vivente splendide aurescente. Antennæ superiores fere ut in M. rugosa;

inferiores vero multo longiores longitudinem scuti dorsalis cum rostro triplo superantes. Maxillipedes 3tii paris qvam in M. rugosa graciliores, articulo imprimis 3tio multo angustiore et sat arcuato. Pedes 1mi paris (gnathopoda) valde elongati, corporis longitudinem longe superantes, angustissimi, manu lineari non dilatata, digitis rectis et palma vix longioribus. Pedes ambulatorii qvam in M. rugosa multo et longiores et angustiores, anteriores corporis longitudinem æqvantes, ungve terminali longo et angusto leviterqve flexuoso. Pedes posteriores chelati fere ut in M. rugosa. Color supine læte ruber, inferne albidus. Longit. feminæ adultæ oviferæ 46 Mm.

Habitat in abyssis sinus Hardangerfjord, prof. 300—500 orgyar.; nec non ad insulas Lofotenses, prof. 300—400 orgyar.

Af Slægten *Munida* kjender man hidtil kun nogle faa Arter, nemlig foruden den nordiske Form M. rugosa et Par tropiske Arter. Begge disse staa den typiske Art særdeles nær. Det samme er ogsaa Tilfældet med nærværende nye Art, som man let ved et flygtigt Øiekast kunde forvexle med hin. Ved en nøiere Undersøgelse finder man dog enkelte Characterer, der ere aldeles constante for begge Arter, og hvorved nærværende Art i enhver Alder med Lethed kan skilles fra den almindelige Form. Herhen hører især Føddernes usædvanlig spinkle og stærkt forlængede Form, hvilket især for 1ste Pars Vedkommende er let iøinefaldende, hvorfor ogsaa Arten er bleven benævnt herefter. Man vil ogsaa ved nøiere Undersøgelse finde, at den egentlige saakaldte Haand viser et fra samme hos M. rugosa meget afvigende Udseende, saavel ved sin fuldkommen lineære (ikke opsvulmede) Form som ved Længdeforholdet mellem Fingrene og Palmen. Saavel Rygskjoldet som Bagkroppen er oventil prydet med de sædvanlige zirligt ordnede cilierede Folde, der idethele vise en fuldkommen lignende Anordning som hos M. rugosa. Undersøger man imidlertid en Del Exemplarer af begge Arter, vil man finde, at disse Folde hos nærværende Art altid ere langt færre i Antal end hos den anden Art. Navnlig bliver dette iøinefaldende paa Bagkroppen, og de faa her udviklede, men meget skarpt markerede

Folde give denne Del en ganske eiendommelig og stærkt udpræget regelmæssig Sculptur, næsten som de bekjendte Tegninger paa Bagkroppen af Nephrops norvegicus. Endelig frembyde Øinene et meget godt og let opfatteligt Kjendemærke, hvorved man strax kan adskille den fra M. rugosa. Foruden ved sit dybe sorte Pigment, der paa det levende Dyr viser en særdeles brillant Guldglands, udmærke nemlig Øinene hos nærværende Art sig derved, at de overalt ere fuldkommen glatte, uden det mindste Spor af den Fryndse af lange bøiede Haar, der altid hos foregaaende Art findes paa Øinenes øvre Side der, hvor Pigmentet tager sin Begyndelse. Dyrets Farve er som hos M. rugosa oventil rød, men denne Farve er hos nærværende Art langt renere og smukkere, lys minierød, uden nogen Tilblanding af Brunt eller Violet.

M. tenuimana synes at være en særdeles udpræget Dybvandsform, der aldrig synes at gaa høiere op end 300 Favne, medens den efter al Sandsynlighed gaar ned til langt betydeligere Dybder end de af mig undersøgte. Ved Utne, hvor begge Arter forekomme, ere deres Udbredningsfeldter skarpt adskilte. Munida rugosa har jeg truffet fra 80 til 150 Favnes Dyb; men nedenfor denne Dybde har jeg aldrig fundet den, hvorimod her lidt efter lidt den anden Art begynder at optræde. Paa min sidste Lofot-Reise fandt jeg paa en af mig tidligere ikke undersøgt Localitet, hvor Dybden gik ned til henimod 400 Favne, et lidet Exemplar af samme characteristiske Dybvandsart, der i et og alt stemmede overens med de i Hardangerfjorden tagne Exemplarer.

Macrura:

12. *Calocaris Macandreæ* Bell. Et lidet Exemplar af denne sjeldne Crustace toges ved Mosterhavn paa 150 F. D.

13. *Pandalus annulicornis* Leach. Ikke saa sjelden ved Mosterhavn paa grundt Vand mellem Alger.

14. *Pandalus brevirostris* Rathke. Af og til sammen med foregaaende; ogsaa ved Utne indtil 100 F. D.

15. *Pandalus borealis* Krøyer. Et Par Exemplarer af denne arktiske Form toges ved Mosterhavn paa 100 F. D.

16. *Pandalus propinqrus* G. O. Sars. Denne af mig tidligere[1]

[1] Nye Dybvandscrustaceer fra Lofoten. Vid.-Selsk. Forh f 1869 pg. 148.

efter yngre Exemplarer, tagne ved Lofoten, beskrevne Art forekommer ikke saa ganske sjeldent ved Hesthammer paa 100—150 F. D., sjeldnere ved Mosterhavn mellem Paragorgia arborea paa 150 F. D. Blandt de tagne Exemplarer var ogsaa en Del fuldvoxne Individer, der fuldkommen vise de af mig (l. c.) udhævede for Arten characteristiske Eiendommeligheder. Den naar en ganske anselig Størrelse, nemlig over 100 Mm., og er strax kjendelig fra P. annulicornis, foruden ved sit tyndere, mere opadbøiede Pandehorn og det characteristiskt formede bladdannede Vedhæng paa de nedre Antenner, ved sin Farve, der er meget ulig samme hos hin Art. Hos det største ved Utne tagne Exemplar, der holdt sine 105 Mm. i Længden, var Farven brillant morgenrød overalt, dog noget blegere ved Begyndelsen af Bagkropssegmenterne. Rygskjoldet var ogsaa overalt intensivt rødt pigmenteret, alene med Undtagelse af den allerbageste Del af Sideloberne, der vare snehvide med skarp Grændse mellem begge Farver. De stærkt forlængede Gangfødder vare i Midten hvide eller gjennemsigtige, ved Basis og i Enden derimod smukt rødt farvede. De nedre Antenners Svøbe viste ikke Spor af de for P. annulicornis characteristiske farvede Ringe. Paa min sidste Lofotreise fandt jeg ogsaa denne Art ikke saa ganske sjeldent ved Bodø mellem Lophelia prolifera paa 80—100 F. D. Den er derfor rimeligvis en arktisk Form.

17. *Hippolyte polaris* (Sab.). Denne høinordiske Form forekommer i ganske enorme Mængder ved Hesthammer paa 100—150 F. D. i den steilt fra Dybet mod Land opstigende Bakke. Et Par Exemplarer toges ogsaa paa Dybet udenfor Bakken indtil en Dybde af 300 Favne. Ogsaa ved Mosterhavn forekommer denne Art ikke sjeldent paa 80—150 F. D. Hannerne ere af en betydelig smækrere Kropsform end Hunnerne og udmærkede derved, at Pandehornet er mindre opadbøiet, ofte ganske horizontalt, og altid med kun meget svage Antydninger til de hos Hunnerne stærkt fremtrædende øvre Tænder. Ofte fattes disse ganske og aldeles, og disse Exemplarer vise da unegteligt et fra Hunnerne meget afvigende Udseende, saa at de endog ere blevne beskrevne

som en egen Art. Den af Krøyer nærmere beskrevne *Hippolyte borealis* Owen er nemlig, som jeg med fuld Sikkerhed kan godtgjøre, intet andet end Hannen af *Hippolyte polaris* Sab.

18. *Hippolyte securifrons* Norman. Sammen med foregaaende, men sjeldnere.

19. *Hippolyte Sowerbæi* Leach. Nogle Expl. af denne arktiske Form toges ved Mosterhavn paa 30—40 F. D.

20. *Hippolyte Gaimardii* Edw. Denne ligeledes arktiske Art var ikke saa ganske sjelden ved Mosterhavn mellem Alger.

21. *Hippolyte pusiola* Krøyer. Ved Utne paa grundt Vand et Par Expl.

22. *Virbius varians* (Leach). Ved Mosterhavn mellem Alger af og til.

23. *Virbius fasciger* (Gosse). Et Par Expl. af denne tidligere af mig kun i Christianiafjorden iagttagne Art toges sammen med foregaaende.

24. *Caridion Gordoni* (Bate). 1 næsten fuldvoxent Expl. af denne sjeldne Crustace toges ved Mosterhavn paa 100 F. D.

25. *Cryptocheles pygmæa* G. O. Sars. Denne pygmæiske af mig tidligere kun ved Lofoten iagttagne Caride forekommer ikke saa sjeldent ved Hesthammer paa 100—150 F. D. Alle Individer havde et meget iøinefaldende orangefarvet Pigmentbaand langs efter Ryggen. Fødderne vare rødagtigt pigmenterede.

26. *Crangon vulgaris* L. Ved Mosterhavn paa 30—40 F. D.

27. *Crangon nanus* Krøyer. Et Par Expl. paa grundt Vand ved Utne.

28. *Crangon echinulatus* M. Sars. 1 Expl. af denne sjeldne Form toges ved Hesthammer paa 150 F. D.

29. *Pontophilus norvegicus* M. Sars. Temmelig sjelden ved Hesthammer, hyppigere paa det store Dyb lige indtil 500 F. Ogsaa ved Mosterhavn paa 100—150 F. D.

30. *Sabinea septemcarinata* (Sab.). Af denne arktiske Form, der tidligere ikke har været iagttaget længere syd end Christiansund, toges 1 stort Expl. og et Par Unger ved Mosterhavn paa 80—100 F. D.

31. *Pasiphaë norvegica* M. Sars. 1 smukt fuldvoxent Expl. ved Mosterhavn paa 150 F. D. Ogsaa paa de store Dybder ved Utne paa 300—400 forekommer denne Form af og til.

32. *Sergestes* sp.? Et ganske ungt, fuldkommen vandklart Expl. af denne mærkelige hidtil ikke ved vore Kyster observerede Decapodeslægt toges ved Mosterhavn paa 150 F. D.

Schizopoda:

33. *Thysanopoda norvegica* M. Sars. 1 Par Expl. ved Utne paa 200—300 F. D. I Vandskorpen toges forskjellige Udviklingsstadier af denne Crustace's mærkelige Larver og foruden disse ogsaa Larver af en bestemt forskjellig Art, rimeligvis den af mig tidligere ved Lofoten iagttagne *Th. neglecta* Krøyer.

34. *Mysis inermis* Rathke. Almindelig som overalt ved vor Kyst paa grundt Vand mellem Alger.

35. *Mysis neglecta* G. O. Sars. Ved Utne sammen med foregaaende ikke saa sjelden.

36. *Mysis ornata* G. O. Sars. I stor Mængde ved Mosterhavn paa 30—40 Favnes blød Lerbund.

37. *Siriella norvegica* G. O. Sars. Et Par Expl. af denne af mig tidligere kun i et enkelt Expl. ved Bollærene i Christianiafjorden fundne interessante Form toges sammen med foregaaende. Den ene af disse var en fuldvoxen Han med stærkt udviklede Svømmefødder under Bagkroppen og viste fuldkommen Karakteren af en *Cynthia* Thompson.

38. *Erythrops pygmæa* G. O. Sars. Ved Utne og Mosterhavn paa grundt Vand ikke saa ganske sjelden. Paa sidstnævnte Sted, hvor den fandtes paa grov Sandbund, var Legemet særdeles stærkt pigmenteret med et hvidgult opakt Pigment, der gav disse Individer et ganske eget Udseende.

39. *Erythrops Goësii* G. O. Sars. Ved Utne paa 50—150 F. D. ikke saa sjelden; ogsaa ved Mosterhavn paa 30—40 F. D., blød Lerbund.

40. *Erythrops serrata* G. O. Sars. Ved Utne sammen med foregaaende, men sjeldnere.

41. *Erythrops microphthalma* G. O. Sars. Temmelig sjelden

ved Hesthammer paa 150—200 F. D., hyppigere paa det store Dyb udenfor lige indtil den største undersøgte Dybde, 500 F. De her tagne Individer havde Øinene paa samme Vis tilbagedannede som jeg allerede tidligere[1] har omtalt det hos et Expl. af E. abyssorum, taget ved Lofoten paa 300 F. D.

42. *Parerythrops obesa* G. O. Sars. Ved Hesthammer, 150—200 F. D., temmelig sjelden; i stor Mængde derimod ved Mosterhavn paa 80—100 F. D.

43. *Pseudomma roseum* G. O. Sars. Af denne eiendommelige, tidligere af mig kun ved Lofoten iagttagne Myside toges ikke saa faa Exemplarer ved Mosterhavn paa 100—150 F. D.

44. *Pseudomma affine* G. O. Sars. Denne ligeledes tidligere af mig kun ved Lofoten og her kun i meget faa Exemplarer iagttagne Art forekommer ved Mosterhavn paa 100 F. D. i ganske enorme Mængder, især der, hvor Bunden fra det største Dyb begynder saa smaat at hæve sig og antage en noget fastere, sandig Beskaffenhed.

45. *Amblyops abbreviata* G. O. Sars. Af denne tidligere af mig kun i et Par unge Exemplarer, det ene fra Lofoten, det andet fra Christianiafjorden, undersøgte Form toges flere smukke fuldvoxne Exemplarer, saavel ægbærende Hunner som fuldt udviklede Hanner, sammen med de 2 foregaaende Mysider. Det hele Legeme er ialmindelighed meget blegt farvet, næsten farveløst, saa at den uregelmæssige smukt lysrøde Pigmentplet, som findes i Midten af de rudimentære kantede Øine, er meget skarpt fremtrædende.

46. *Mysideis insignis* G. O. Sars. Ved Hesthammer og Mosterhavn paa 100—150 F. D. ikke saa sjelden.

47. *Leptomysis gracilis* G. O. Sars. Af denne tidligere af mig kun i Christianiafjorden observerede vakre Myside toges nogle Expl. ved Mosterhavn paa 30—40 F. D., blød Lerbund.

48. *Mysidopsis didelphys* (Norman). Ved Utne og Mosterhavn saavel paa grundere Vand, 20—50 Favne, som paa større Dybder

[1] Monographi over de ved Norges Kyster forekommende Mysider 1ste Hefte pg. 39 Tab. 5 fig. 12.

indtil 150 Favne. Den paa grundere Vand forekommende Form er altid mindre og stærkere pigmenteret end Dybvandsformen. Begge Former stemme forøvrigt paa det nøieste overens med hinanden.

49. *Mysidopsis angusta* G. O. Sars. Ved Utne paa 20 F. D. sjelden.

50. *Boreomysis arctica* (Krøyer). Denne arktiske, først fra Grønland bekjendte Myside forekommer af og til paa de større Dybder saavel ved Utne som ved Mosterhavn. Et Par fuldvoxne Hunner med stærkt udviklet Brystpose toges paa førstnævnte Sted, 300—400 F. D. Ved Undersøgelsen af disse fandt jeg en for denne Slægt meget udmærkende Character, hvorved den skiller sig fra alle øvrige bekjendte Mysider og viser en Tilnærmelse til Slægten Lophogaster. De Brystposen sammensættende Æggeplader ere nemlig her ikke blot indskrænkede til den bageste Del af Forkroppen, men indtage hele dennes Underside, idet der fra Basis af samtlige Fødder og desuden fra sidste Par Maxillipeder udgaa særskilte lancetformige Plader. Brystposen bliver saaledes her sammensat af ikke mindre end 14 særskilte Plader. Jeg fik ogsaa herved en fuldstændig Opklaring paa en af Krøyer for denne Myside meddelt Angivelse, som jeg tidligere ikke vidste at forklare mig, nemlig at der foruden den sædvanlige til 1ste Par Maxillipeder fæstede Vifte ogsaa skulde forekomme en saadan fæstet til sidste Par Maxillipeder. Hvad Krøyer her har taget for en Vifte, er nemlig intet andet end det 1ste Par Æggeplader, der ganske rigtigt udgaa fra Basis af disse Maxillipeder.

51. *Boreomysis megalops* G. O. Sars, n. sp.

Descript: Forma corporis gracillima et angusta. Scutum dorsale parvum postice profunde emarginatum segmenta 2 posteriora cephalothoracis ex parte nuda relinqvens, antice in medio obtuse angulatum nullum rostrum vel laminam frontalem distinctam formans. Corpus posticum angustissimum, postice latitudine sensim decrescens, segmento ultimo valde elongato 2 antecedentibus junctis longiore. Oculi permagni, lateraliter porrecti, scutum dorsale utrinqve longe superantes, globosi, pedunculo tenuissimo affixi, pigmento maximam oculi partem occupante colore læte luteo-fulvo. Antennarum superiorum pedunculi angusti, tertiam cephalothoracis longitudinis partem æqvantes, forma solita, articulo basali ceteris 2 junctis æqvali, flagellum exterius ad basin leviter dilatatum et papillis olfactoriis numerosis longis ornatum. Antennarum inferiorum sqvamæ perangustæ pedunculis antenn. superior. parum longiores, sublineares, septies longiores qvam latiores, apice obliqve truncato, angulo exteriore magis prominente et aculeo tenui terminato, margine externo nudo, interno et apice longe setiferis. Partes oris ut in speciebus 2 ceteris. Pedes tenuissimi, tarso articuli antecedentis longitudinem vix æqvante, palpo natatorio sat magno extremitate 14articulata. Laminæ incubatoriæ marsupium ventrale componentes ut in ceteris speciebus hujus generis utrinqve 7 ex pedibus omnibus et maxillipedibus 2di paris prodeuntes, lanceolatæ posteriora versus sensim majores. Appendix caudalis media perangusta, longitudinem segmenti ultimi circiter æqvans, sublinearis vel parum modo apicem versus attenuata, aculeis marginalibus inæqvalibus utrinqve 24—26, apice incisa, incisura 6tam circiter partem longitudinis appendicis occupante, sat lata, marginibus leviter flexuosis et fortiter aculeatis, lobis terminalibus angustis aculeo longissimo terminatis. Appendices laterales angustissimæ, lamina externa internam 6ta circiter parte longitudinis superante, marginis externi parte antica 4ta nuda aculeisqve 2 longis terminata; lamina interna ad basin parum tumefacta, otolitho ut in ceteris speciebus rudimentari et qvasi granuloso. Corpus pellucidissimum et fere absqve pigmento. Longit. feminæ oviferæ 16 Mm.

Habitat rarissima in sinu Hardangerfjord ad Mosterhavn prof. 80—100 orgyar; adqve Hesthammer prof. 150—200 orgyar.

Af denne fra de 2 øvrige Arter af Slægten ved sin usædvanlig slanke Kropsform og især ved sine enormt udviklede Øine strax kjendelige nye Art toges 1 fuldvoxent ægbærende Individ ved Mosterhavn paa 80—100 F. D. Nogle ganske smaa Unger af samme Art fandtes desuden ved Hesthammer paa 150—200 F. D i Kanten af den fra Dybet mod Land opstigende Bakke.

52. ***Hemimysis abyssicola*** G. O. Sars. Denne smukke af mig

tidligere ved Lofoten og i Christianiafjorden iagttagne Myside forekommer i stor Mængde ved Hesthammer paa 150—200 F. D. Ogsaa ved Mosterhavn forekommer den, skjønt langt sjeldnere, paa 80—100 F. D.

53. *Mysidella typica* G. O. Sars, n. gen. et sp.

Descript: Corporis forma brevis et obesa. Scutum dorsale supine æqvaliter arcuatum, partibus lateralibus inferne in medio profunde inflexis antice lobum lingvæformem basin antennarum inferiorum obtegentem formantibus, postice sat emarginatum segmenta 2 posteriora cephalothoracis ex parte nuda relinqvens, antice in medio distincte angulatum processum brevem rostriformem inter oculos productum formans. Corpus posticum mediocre, subcylindricum, antico multo angustius, postice sensim attenuatum, segmento ultimo ceteris vix longiore. Oculi breviter pyriformes scutum dorsale tamen ad latera nonnihil superantes, pigmento magno intus vix emarginato. Antennarum superiorum pedunculi parvi oculis breviores articulo basali ceteris 2 junctis multo breviore, in mare robustiores adqve extremitatem inferne appendice setosa brevi, subcirculari, vix extra apicem pedunculi prominente instructi; inferiorum sqvamæ brevissimæ pedunculis antenn. superior. parum longiores, breviter lanceolatæ, triplo longiores qvam latiores, setis longis ubiqve marginatæ. Labrum forma singulari in laminam tenuem retro vergentem apice inæqvaliter bilobato productum. Mandibulæ magnæ ad apicem maxime dilatatæ et complanatæ aciem formantes integram neqve rudimentum qvidem minimum dentium vel setarum præbentem; palpus mandibula ipsa multo brevior 3articulatus, articulo 2do elongato, ultimo ovato et complanato margine altero setis rigidis pectinatim ornato. Maxillæ 1mi paris validæ, ramis 2 terminalibus valde inflexis, altero spatulato ad apicem obliqve truncato et aculeis numerosis (15) curvatis, ungviformibus, apicem versus sensim longioribus armato, altero minimo tuberculiformi setis 3 longis et ciliatis ornato. Maxillæ 2di paris parvæ et debiles intus lobos incisivos 3 extus laminam vibratoriam angustam setis 9 ciliatis ornatam præbentes antice in medio trunco biarticulato ad apicem setoso terminatæ. Maxillipedes 1mi paris validissimi, ad basin palpo natatorio et flagello lato securiformi ornati, 6articulati, articulo penultimo valde dilatato setis nullis sed extus prope apicem spinis 3 validis armato, ultimo minimo et angusto et sine fine in aculeum longum rectumqve exeunte. Maxillipedes 2di paris illis multo debiliores, pediformes, articulo antepenultimo sat elongato et ultimis 2 junctis longitudine circiter æqvali, ultimo parvo mutico setis apicalibus longis et margine altero dense ciliatis. Pedes breves et debiles maxillipedibus 2di paris vix longiores, tarso in 1mo pari bi- in ceteris 3articulato, ungve terminali tenui articulo parvo nodiformi inserto. Palpi natatorii sat validi extremitate 8articulata. Laminæ incubatoriæ utrinqve 3, anteriores parvæ sed distinctæ et longe setiferæ. Appendices genitales maris perlongæ et angustæ antice inter bases pedum porrectæ, apice paulo dilatatæ tuberculisqve rotundatis nullis vero setis ornatæ. Appendices corporis postici ventrales (pleopoda) in femina et mare structura exacte eadem, rudimentares, laminas parvas setosas formantes. Appendix caudalis media brevis, segmento ultimo tamen longior, lingvæformis, duplo circiter longior qvam latior, marginibus lateralibus in parte dimidia antica nudis, dein vero dense aculeatis, aculeis utrinqve 18—20 postice sensim longioribus, apice medio breviter inciso, incisura angusta 9nam modo partem longitudinis appendicis occupante, marginibus rectis et breviter aculeatis, lobis terminalibus obtusis. Appendices laterales media qvinta circiter parte longiores, lamina interiore qvam exteriore parum breviore adqve basin organo acustico solito instructa. Corpus sparse rubro pigmentatum, oculis læte fulvis. Longit feminæ oviferæ parum supra 8 Mm.

Habitat rara in sinu Hardangerfjord ad Mosterhavn et Utne in prof. 80—150 orgyar.

Nærværende lille Myside har ikke i det ydre noget synderligt eiendommeligt ved sig, saa at jeg i Begyndelsen antog den for en Art af Slægten Mysidopsis, med hvem den i sin almindelige Kropsform mest synes at stemme overens. Det var mig derfor meget overraskende ved den anatomiske Undersøgelse at støde her paa en Række meget eiendommelige Organisationsforholde, hvorved i Virkeligheden denne Myside afviger mere end nogen anden fra den for Familien typiske Bygning. Navnlig gjælder dette Munddelene, der ere i høi Grad eiendommeligt byggede og synes at maatte forudsætte en ganske egen Levevis. Ogsaa er dette den eneste Form af Mysidernes Familie, hos hvem Bagkropslemmerne, de saakaldte Pleopoda, ere fuldkommen af samme rudimentære Bygning hos begge Kjøn. At der her saaledes foreligger en ganske eiendommelig ny Slægtstype, er utvivlsomt. Jeg er ogsaa saa heldig at kunne føie endnu en Art til denne Slægt, en Form, som man efter det ydre at dømme neppe vilde have forenet med den ovenomtalte Myside, men hvis anatomiske Bygning viste sig fuldkommen overensstemmende. Denne Art er:

54. *Mysidella typhlops* G. O. Sars, n. sp.

Descript: Mas adultus. Forma corporis qvam in antecedente adhuc magis abbreviata et obesa. Cephalothorax brevis et crassus, antice et postice fere æqve latus, supine sat arcuatus. Scutum dorsale magnum et altum segmenta omnia corporis antici obtegens in lateribus etiam longe superans, inferne utrinqve profunde inflexo, antice in medio obtuse angulatum. Corpus posticum antico plus duplo longius, sublineare, paulo depressum, postice parum attenuatum, segmento ultimo ceteris majore. Oculi omnino rudimentares, forma singulari, medio dilatati apicem versus vero attenuati et in processum acuminatum desinentes, et pigmento et lentibus crystallinis omnino destituti. Pedunculi antenn. sup. oculis longiores structura eadem ac in M. typica et ut in illa inferne ad apicem appendice setosa brevi subcirculari instructi. Sqvamæ antenn. inferior. brevissimæ pedunculis antennarum et superiorum et inferiorum breviores, obtuse lanceolatæ, triplo longiores qvam latiores, setis ubiqve marginatæ. Partes oris structura simili ac in antecedente. Labrum tamen angustius et inæqvalius bilobatum. Maxillipedes 1mi paris minus robusti, articulo penultimo minore armatura vero eadem ac in antecedente. Maxillipedes 2di paris et pedes structura fere exacte eadem ac in M. typica. Appendices genitales portentosæ magnitudinis, longitudinem totius cephalothoracis æqvantes, subcylindricæ, apicem versus paulo attenuatæ, extremitate integra. Appendix caudalis media brevis et lata, longitudinem segmenti ultimi æqvans, subtriangularis, parum longior qvam latior, apicem versus cito attenuata, marginibus lateralibus rectis et in parte dimidia postica dense aculeatis, apice truncato in medio leviter emarginato vel obsolete inciso et utrinqve aculeis 2 fortibus inæqvali longitudine armato. Appendices laterales fere ut in antecedente. Corpus pellucidum globulis oleosis fulvis reguláriter dispositis et etiam in appendicibus caudalibus distinctis impletum. Longit. modo 4 Mm.

Habitat rarissima in sinu Hardangerfjord prope Utne in prof. 200 orgyar., ubi unicum inveni exemplar masculinum.

Nærværende mærkværdige Form, hvoraf 1 eneste Expl., en fuldvoxen Han, toges ved Utne paa 200 F. D., har saavel ved sin pygmæiske Lidenhed som ved flere andre Characterer, saasom Øinenes rudimentære Bygning og den Mængde i Legemet fordelte Olieblærer, et saa embryonalt Udseende, at jeg i Begyndelsen antog den kun for en netop udklækket Unge af en eller anden eiendommelig Myside. Den anatomiske Undersøgelse viste imidlertid med fuld Sikkerhed, at Exemplaret var en fuldt udviklet Han af en eiendommelig til foregaaende Slægt hørende Dybvandsart, som især er characteriseret ved Øinenes rudimentære Beskaffenhed, hvorfra ogsaa Artsbetegnelsen er hentet.

Cumacea.

55. *Diastylis lucifera* (Krøyer). 1 Par Expl. af denne i Christianiafjorden almindelige Art toges ved Mosterhavn paa det betydelige Dyb af 150 Favne.

56. *Diastylis bispinosa* Stimpson. Af og til saavel ved Utne som Mosterhavn paa fra 50—150 F. D.

57. *Diastylis rugosa* G. O. Sars. En ægbærende Hun af denne sjeldne Art toges ved Utne paa 30—50 F. D.

58. *Diastylis tumida* (Lilljeborg). Temmelig hyppig ved Mosterhavn paa 30—40 F. D. 1 enkelt Expl. af denne ellers ikke paa synderlig dybt Vand levende Form toges paa det største undersøgte Dyb ved Utne, 500 F.

59. *Diastylis echinata* Sp. Bate. Ikke sjelden ved Mosterhavn paa de større Dybder, 100—150 F.

60. *Diastylis serrata* G. O. Sars. Ligesaa temmelig almindelig paa de større Dybder, saavel ved Mosterhavn som ved Utne, hvor den gaar ned ligetil 500 F.

61. *Diastylis biplicata* G. O. Sars. Denne ellers sjeldne Art forekommer i største Mængde paa en Localitet ved Mosterhavn paa 30—40 F. blød Lerbund; ogsaa enkeltvis paa de større Dybder saavel her som i det indre af Fjorden.

62. *Leptostylis villosa* G. O. Sars. Et Par Expl. af denne af mig først i Christianiafjorden ved Holmestrand observerede Form toges ved Mosterhavn paa 80—100 F. D.

63. *Leucon nasicus* Krøyer. Almindelig ved Mosterhavn paa 30—40 F. D., ogsaa paa de større Dybder indtil 150 Favne af og til.

64. *Leucon nasicoides* Lilljeborg. Ved Mosterhavn paa 30—40 F. D. sammen med foregaaende, men langt sjeldnere.

65. *Leucon pallidus* G. O. Sars. Ved Utne paa 300—400 F. D. nogle faa Expl., ogsaa ved Mosterhavn, 150 F.

66. *Eudorella emarginata* (Krøyer.) Almindelig ved Mosterhavn paa 30—40 F. D.

67. *Eudorella truncatula* (Sp. Bate). Et Par Expl. ved Utne paa 30—40 F. D.

68. *Lamprops rosea* (Norman). Sammen med foregaaende.

69. *Lamprops cristata* G. O. Sars. Denne tidligere af mig blot paa de store Dybder ved Lofoten observerede Art var temmelig hyppig ved Mosterhavn paa 80—100 F. D.

70. *Lamprops uniplicata* G. O. Sars, n. sp.

Descript: Corporis forma gracilis et elongata eidem L. cristatæ non dissimilis. Scutum dorsale segmentis liberis cephalothoracis junctis parum brevius, a latere visum antice attenuatum et acute productum vel rostrum breve formans, marginibus inferioribus in medio valde arcuatis, superiore vero omnino recto et horizontali; supra visum antice et postice fere æqve latum extremitate antica rotundato-truncata. Plica adest utrinqve unica obliqve transversa et leviter arcuata in anteriore parte scuti faciei dorsali propior. Corpus posticum angustum antico multo longius supra visum postice sensim attenuatum. Oculus parvus sed distinctus pigmento læte purpureo. Antennæ superiores fere ut in L. cristata, articulo basali apicem versus dilatato et seqventibus 2 junctis longitudine circiter æqvali; inferiores pedunculo antenn. superior. paulo breviores et distincte 4articulatæ. Pedes 1mi paris sat elongati longitudinem cephalothoracis circiter æqvantes, articulo ultimo tenuissimo et antecedente paulo longiore; 2di paris illis tertia circiter parte breviores, articulo antepenultimo valde spinoso et ultimis 2 junctis paulo longiore. Pedes seqventes forma solita; palpus rudimentaris pedibus 3tii et 4ti paris affixus distincte biarticulatus, articulo basali majore. Appendix caudalis media segmento ultimo longior, truncis appendicum lateralium vero paulo brevior, anguste lingvæformis, apicem versus sensim attenuata, apice obtuse rotundato, aculeis lateralibus qvaternis vel qvinis brevibus, apicalibus tribus longioribus et subæqvalibus. Appendices laterales sat elongatæ segmentis ultimis 2 junctis paulo longiores, stylis terminalibus inæqvalibus, exteriore trunco parum longiore, interiore illa qvinta circiter parte longiore, articulo 1mo sat magno intus aculeis circiter 14 brevibus armato, ceteris 2 junctis illo multo brevioribus. Color læte fulvus, corpore postico fasciis transversis colore saturatiore ornato. Longit. feminæ adultæ circiter 8 Mm.

Habitat rara in sinu Hardangerfjord ad Mosterhavn prof. 80—100 orgyar.; nec non ad insulas Lofotenses prof. eadem.

Ved sin smale og langstrakte Kropsform og smukke gulrøde Farve ligner denne Art meget L. cristata, saa at den ved et flygtigt Blik let kan forvexles med denne. Ved nøiere Undersøgelse viser den dog flere udmærkende Characterer, hvorved den med Lethed kan kjendes fra denne. Især er det Rygskjoldet, som yder et godt Kjendemærke for nærværende Art saavel ved den fuldkommen lige og horizontale Ryglinie som ved den enkle characteristiske Fold, der paa hver Side løber paaskraat over Rygskjoldets forreste Del, og som er meget tydeligt fremtrædende. Den fandtes kun sparsomt sammen med L. cristata ved Mosterhavn paa 80—100 F. D. Senere fandt jeg den imidlertid igjen paa en langt adskilt Localitet, nemlig ved Lofoten, hvor den paa en enkelt Plads ved Fiskeværet Risvær ikke synes at være saa ganske sjelden paa 80—100 Favne, Sandbund.

71. *Platyaspis typica* G. O. Sars. Denne eiendommelige Cumaceform, som tidligere af mig kun var iagttaget paa de store Dybder ved Lofoten, forekommer ogsaa ved Mosterhavn af og til sammen med de 2 ovenfor nævnte af Sl. Lamprops.

72. *Campylaspis rubicunda* (Lilljeborg). Ved Utne 30—50 F. 1 enkelt Expl.

73. *Campylaspis costata* G. O. Sars. Ved Mosterhavn paa 80—100 F. D. temmelig sjelden.

74. *Campylaspis verrucosa* G. O. Sars. Denne characteristiske Art fandtes derimod i ganske enorme Mængder paa ovenanførte Localitet.

75. *Campylaspis sulcata* G. O. Sars. Et Par Expl. af denne tidligere af mig kun ved Lofoten observerede Art toges sammen med foregaaende.

76. *Campylaspis horrida* G. O. Sars. 1 enkelt Expl. af denne ved sit piggede Legeme meget eiendommeligt udseende Cumace toges paa samme Localitet.

77. *Cyclaspis longicaudata* G. O. Sars. Denne mærkelige Dybvandscumace, der ligeledes tidligere af mig alene var iagttaget ved Lofoten, var ikke saa ganske sjelden ved Mosterhavn paa 100—150 Favnes Dyb, sandblandet Lerbund.

78. *Cuma pusilla* G. O. Sars. Denne den eneste bekjendte norske Art af den virkelige Slægt Cuma, som tidligere af mig kun var iagttaget i et enkelt Expl. ved Farsund, toges ligeledes i kun et enkelt Expl. ved Mosterhavn paa 30—40 F. D.

Isopoda:

79. *Jaera albifrons* Leach. Almindelig ved Utne under Strandstenene i Fjæren.

80. *Henopomus muticus* Krøyer. Ved Mosterhavn paa 80—100 F. D. af og til.

81. *Munna limicola* G. O. Sars. Et Par Exemplarer ibid.

82. *Paramunna bilobata* G. O. Sars. 1 Expl. af denne lille eiendommelige Isopode toges paa samme Localitet som foregaaende Art.

83. *Pleurogonium rubicundum* G. O. Sars, variatio. 1 Expl. ibid. Adskiller sig fra den sædvanlige Form ved den fuldstændige Mangel af de radierende Sidepigge (an species distincta?)

84. *Dendrotion*[1] *spinosum* G. O. Sars, n. gen. et sp.

Descript: Corpus depressum, parte antica dilatata, postica angusta, segmentis constrictionibus profundis disjunctis. Caput parvum qvadrangulare, bifurcatum vel in ramos duos angustos auriculiformes obliqve antice et supra vergentes, qvibus antennæ parium amborum affixæ sunt, divisum. Segmenta 4 priora postice sensim latitudine crescentia utrinqve spina longa et tenui lateraliter porrecta armata. Segmenta 3 seqventia subito multo angustiora processibus lateralibus longis et tenuibus obliqve postice vergentibus spinaqve brevi terminatis instructa. Corpus posticum (postabdomen) segmentum unicum lanceolatum ad basin constrictum medio dilatatum et utrinqve dentibus 4 minutis marginatum, apice acuto, formans. Oculi nulli. Antennæ longæ et tenues ad basin contiguæ apici processuum auriculiformium capitis affixæ; superiores dimidiam corporis longitudinem superantes, pedunculi articulo 1mo majore seqventibus 2 junctis longiore setis longis sparsim ornato, 2do brevissimo, ultimo tenuissimo, flagello pedunculo paulo breviore 9articulato, articulis ultimis tribus papillis olfactoriis longis instructis. Antennæ inferiores in speciminibus scrutatis mancæ, articulis modo 3 basalibus conservatis. Mandibulæ parvæ apice birameo, ramo altero dentato et setoso, altero (processu molari) conico, palpo distincto triarticulato instructæ. Maxillæ forma solita. Maxillipedes 6articulati intus laminam incisivam magnam extus flagellum lanceolatum præbentes. Pedes 1mi paris (gnathopoda) ceteris paulo breviores, subcheliformes, structura vero sat debili, articulo 3tio et 4to elongatis et angustis magnitudine circiter eadem, manu leviter modo dilatata, ungve terminali valido biarticulato. Pedes ambulatorii angusti et elongati corporis longitudinem postabdomine excepto circiter æqvantes, sparse spinosi, articulis ultimis 2 subæqvalibus, ungve terminali sat valido. Appendices caudales omnino desunt. Color albidus. Longit. feminæ adultæ oviferæ vix 2 Mm.

[1] δένδρον: arbor et ὠτίον: auricula.

Habitat rarissimum in sinu Hardangerfjord ad Mosterhavn prof. 80—100 orgyar.

Denne høist bizart udseende Isopodeform synes nærmest at slutte sig til Slægten Pleurogonium, fra hvilken den dog bestemt adskiller sig ved en Del væsentlige Characterer, saaledes ved Tilstedeværelsen af en tydeligt udviklet 3leddet Mandibularpalpe og ved den fuldstændige Mangel af Halevedhæng. De 2 eiendommelige cylindriske Fortsatser, hvori Hovedet deler sig og til hvis Ende de lange divergerende Antenner ere fæstede, have givet Anledning til Slægtsbenævnelsen. Kun 2 tildels mutilerede Exemplarer toges ved Mosterhavn paa 80—100 F. D., blød Lerbund.

85. *Ischnosoma bispinosum* G. O. Sars. Nogle Exemplarer af denne eiendommelige Form toges sammen med foregaaende.

86. *Desmosoma lineare* G. O. Sars. Ibidem sjelden.

87. *Ilyarachna longicornis* G. O. Sars. Ved Utne paa 300—400 F. D. 1 Expl.

88. *Eurycope cornuta* G. O. Sars. Temmelig almindelig paa de store Dybder ved Utne lige indtil 500 F.; ogsaa ved Mosterhavn skjønt sjeldnere paa 150 F. D.

89. *Eurycope phallangium* G. O. Sars. Ved Mosterhavn sammen med foregaaende Art.

90. *Eurycope megalura* G. O. Sars, n. sp.

Descript: Corporis forma supra visa elongato-ovata latitudine maxima dimidia longitudine minore. Caput antice in medio in processum magnum lingvæformem apicem versus leviter crenulatum excurrens. Segmenta 4 priora brevia processibus lateralibus muticis, seqventia 2 magna et distincte a se disjuncta. Segmentum postabdominale permagnum longitudinem trium antecedentium æqvans, subtriangulare, apice obtuso. Antennæ superiores forma solita 10articulatæ, inferiores corporis longitudinem tertia parte superantes, qvam solito robustiores, pedunculi articulis 2 ultimis sat fortibus et spinosis, flagello pedunculo breviore. Maxillipedes sat robusti, flagello magno, lanceolato, striis flexuosis rugoso. Pedes 1mi paris parvi et debiles, articulo ultimo penultimo multo breviore. Pedes parium 3 seqventium qvam solito robustiores, corpore multo breviores, articulis ultimis 2 subæqvalibus, ungve terminali valido. Paria 3 posteriora ut vulgo ceteris dissimilia, natatoria, articulis ultimis 2 valde dilatatis et complanatis, ungve terminali obtuse lanceolato, brevi, dimidiam articuli ultimi longitudinem vix asseqvente. Appendicum caudalium ramus interior exteriore multo crassior et duplo longior. Color cinereo-virescens, segmento postabdominali fulvo. Longit. parum supra 2 Mm.

Habitat rarissima in sinu Hardangerfjord ad Mosterhavn prof. 80—100 orgyar.

Af denne nye Art, den 7de af Slægten, toges 1 enkelt Exemplar ved Mosterhavn paa 80—100 F. D. Af de øvrige Arter kommer den nærmest *E. producta* G. O. Sars, fra hvem den dog bestemt adskiller sig saavel ved de betydelig kortere og kraftigere byggede nedre Antenner og Fødder, som ved Bagkropsegmentets usædvanlige Størrelse og afstikkende Farve.

91. *Tanais tenuimanus* Lilljeborg. Almindelig ved Mosterhavn paa 80—150 F. D. Et ungt Expl. ved Utne paa 500 F. D.

92. *Tanais depressus* G. O. Sars. Ved Utne paa 30—50 F. D. nogle Exemplarer.

93. *Arcturus longicornis* Sowerby. 1 ungt Expl. rimeligvis af denne Art toges ved Mosterhavn paa 20 F. D.

94. *Æga psora* (Linné). Flere Exemplarer ved Utne paa 100—150 F. D.

95. *Æga rotundicauda* Lilljeborg. 1 enkelt Expl. ibidem.

96. *Æga Strömii* (Krøyer). Ogsaa af denne Art erholdtes kun et enkelt Expl. ved Mosterhavn paa 100—150 F. D.

97. *Anceus oxyuræus* Lilljeborg. Ikke saa sjelden ved Utne paa 30—50 F. D., saavel Hanner som Hunner og Larver (Praniza).

98. *Anceus dentatus* G. O. Sars, n. sp.

Descript: Mas adultus. Corporis forma qvam solito magis elongata. Caput sat magnum antice ad lineam rectam truncatum utrinqve angulum acutum formans, postice paulo dilatatum et supine æqvaliter convexum dentibus minutis scabrum. Segmenta 2 priora subæqvalia et capite vix angustiora; 3 posteriora juncta forma subovali divisione antica (capite et segmentis 2 prioribus) vix angustiora et ab illa constrictione profunda disjuncta; segmentum penultimum supine bipartitum, partibus sulco mediano sat lato disjunctis, ultimum sat magnum postice utrinqve processu obtuso postice vergente instructum. Corpus posticum bene evolutum, segmentis epimeris sat magnis instructis. Oculi parvi sed distincti colore nigro. Antennæ superiores 8articulatæ, articulo 3tio antecedentibus 2 junctis longiore; inferiores superioribus fere tertia parte longiores, articulo 4to (ultimo pedunculi) sat magno et crasso, flagello 7articulato. Mandibulæ qvam in A. oxyuræo multo minores extus dente singulo sat magno armatæ, intus leviter crenulatæ. Maxillæ omnino desunt. Maxillipedes vero bene evoluti, operculiformes, structura fere eadem ac in A. oxyuræo. Pedes sat robusti nullis vero ad marginem internum instructi dentibus nodiformibus ut in specie illa. Appendices corporis postici ventrales bene evolutæ, natatoriæ, laminis ambabus apice setiferis. Appendix caudalis media subtriangularis versus medium leviter constricta, apice acuminato obsolete bidentato spinisqve 2 longis et tenuibus terminato. Appendicum lateralium laminæ terminales sat magnæ et longe setiferæ. Color fusco-cinereus. Longit. maris adulti circiter 4 Mm.

Habitat rarus in sinu Hardangerfjord ad Utne, prof. 30—50 orgyar.

Af de 2 øvrige norske Arter ligner denne mest *A. elongatus* Krøyer, som jeg har fundet temmelig hyppigt ved Lofoten. Fra denne adskiller den sig dog strax derved, at den dorsale Flade af Hovedet og de øvrige Segmenter er jevnt hvælvet uden Spor af den hos hin Art meget tydeligt udprægede ydre Sculptur; heller ikke viser Hovedet Spor af den hos A. oxyuræus eiendommelige facetterede Tegning. Næstsidste Forkropssegment er som hos A. elongatus oventil delt i 2 ved en longitudinal af en tyndere Hud beklædt Fure; men denne Fure er her langt bredere end hos hin Art, hvor den kun har Formen af en smal Sutur. Fra denne Art skiller den sig desuden ved sine vel udviklede børstebesatte Svømmefødder og ved en anden Form af Halevedhængene. Mandiblerne ere langt mindre end hos A. oxyuræus og i denne Henseende mere overensstemmende med samme hos A. elongatus, fra hvem de dog strax adskille sig ved den stærkt udviklede tandformige Fortsats i den ydre Kant, hvortil der hos hin Art kun findes en meget svag Antydning. Kun et Par Exemplarer, begge Hanner, toges ved Utne paa 30—50 F. D.

99. ***Anceus abyssorum*** G. O. Sars, n. sp.

Descript: Femina adulta. Corpus supra visum elongato-ovatum, antice et postice fere æqve latum. Caput sat magnum, fronte non excavato, pentagonale, antice productum et breviter bifidum. Segmenta 2 priora sat lata, anticum ex parte caput amplectens. Segmenta 3 seqventia in unum confluentia. Corpus posticum breve et angustum 4tam circiter corporis longitudinis partem occupans. Oculi sat magni, pallide fulvescentes. Antennæ subæqvales, superiores 7articulatæ, inferiores 10articulatæ. Mandibulæ et maxillæ omnino desunt. Maxillipedes parvi 3articulati, articulo basali sat dilatato et ceteris 2 junctis multo (fere duplo) longiore, ultimo mutico. Pedes sat robusti margine interno dentibus numerosis nodiformibus armato. Appendices corporis postici ventrales minime natatoriæ, laminis terminalibus angustis et setis omnino destitutis. Appendix caudalis media ad basin sat lata, dein vero subito valde coarctata apice tenuiter acuminato-producto. Appendices laterales forma solita setis vero brevibus ornatæ. Color albidus pellucidus. Longit. $3\frac{1}{2}$ Mm.

Habitat rarissimus in sinu Hardangerfjord ad Utne, prof. 200 orgyar.

Kun et eneste Exemplar, en fuldvoxen Hun, toges ved Utne paa det betydelige Dyb af 200 Favne. Den forskjellige Bygning af Antennerne, Fødderne og Bagkroppens Vedhæng viser, at dette Exemplar ikke, som jeg først antog, kan have henhørt til foregaaende Art. Ogsaa fra Hunnerne af de 2 øvrige norske Arter, som jeg begge har havt Anledning til at undersøge, adskiller den sig meget bestemt saavel ved flere andre Characterer som især ved den fuldstændige Mangel af baade Mandibler og Maxiller.

Amphipoda:

En hel Del forskjellige herhen hørende Former toges saavel paa grundere Vand som paa de større Dybder. Da imidlertid en anden Zoolog ved vort Universitet, Hr. Stipendiat A. Boeck, netop har gjort denne Crustacegruppe til Gjenstand for detaillerede Undersøgelser, har jeg troet at gavne Videnskaben bedre ved at overlade ham mit hele Materiale til Bearbeidelse.

Branchiopoda:

100. *Nebalia bipes* Fabr. Nogle Exemplarer af denne mærkelige Crustaceform toges ved Utne paa 20—30 F. D. og ved Mosterhavn paa 80—100 F. D.

101. *Evadne Nordmanni* Lovén. Ved Utne ikke sjelden i Vandskorpen.

102. *Podon polyphemoides* (Leuckart). Af og til sammen med foregaaende.

103. *Podon minutus* G. O. Sars. Ligesaa.

Ostracoda:

104. *Cypridina norvegica* Baird. Af denne tidligere af mig kun ved Lofoten iagttagne Form toges en Del Exemplarer ved Mosterhavn paa 100—150 F. D.

105. *Cypridina megalops* G. O. Sars, n. sp.

Descript: Testa feminæ a latere visa brevis et alta, antice qvam postice humilior, altitudine maxima paulo pone medium sita, margine superiore in medio sat arcuato, inferiore æqvaliter convexo, extremitate postica obtuse truncata, antica in medio incisa, incisura sat angusta et obliqve supra vergente, parte supra eandem prominula et rostrum acuminatum infra curvatum formante, parte infra incisuram vix prominente et æqvaliter rotundata; supra visa elongato-ovata, latitudine maxima dimidiam circiter longitudinem æqvante. Valvulæ pellucidæ, glabræ, nitidæ, pilis fere omnino destitutæ, colore albido. Oculi permagni transversaliter elliptici, in parte anteriore tertia testæ per valvulas translucentes. Antennæ superiores sat fortes, articulo 2do 3 seqventibus junctis longiore, ultimo setis 3 valde elongatis instructo; inferiorum ramus appendicularis perbrevis, nodiformis, seta unica longa terminatus, ramus natatorius fere ut in C. norvegica. Pedum mandibularium articulus penultimus perangustus, margine antico in parte dimidia antica dense spinoso et setifero. Maxillarum 3tii paris lamina terminalis subovata setis ciliatis circiter 14 posterioribus 5 a ceteris intervallo brevi sejunctis marginata. Laminæ postabdominales forma solita ungvibus circiter 11 subtiliter dentatis instructæ. Longit. feminæ oviferæ circiter 3 Mm.

Habitat rarissima in sinu Hardangerfjord ad Utne, prof. 40—50 orgyar.

Den egentlige Slægt Cypridina var tidligere kun repræsenteret af en eneste nordisk Art, nemlig C. norvegica Baird, da jeg ved mine anatomiske Undersøgelser af Ostracoderne fandt mig beføiet til at udsondre herfra den tidligere herhen regnede Form Cypridina globosa Lilljeborg, som jeg først[1] opførte som Typen for en egen Slægt, Bradycinetus, men senere[2] til min Overraskelse fandt kun at repræsentere Hunnerne og de endnu ikke fuldt udviklede Hanner af den meget forskjelligt udseende Form, Philomedes longicornis Lilljeborg, der forestiller den fuldt udviklede Han. Det var mig derfor af Interesse i nærværende Form at finde en ny med C. norvegica i sine anatomiske Detailler paa det nøieste overensstemmende Art, hvorved altsaa den af mig tidligere ytrede Anskuelse om Slægten Cypridinas Begrændsning faar fuld Bekræftelse. Fra C. norvegica skiller nærværende Art sig i det ydre strax ved en betydelig høiere og kortere Form af Skallen samt ved de usædvanligt store elliptiske Øine, der med stor Tydelighed skinne igjennem den gjennemsigtige Skal. Kun 1 enkelt Exemplar, en fuldvoxen Hun med store gulrøde Æg indenfor Skallen, toges ved Utne paa 40—50 F. D.

106. *Asterope Mariæ* (Baird). 1 enkelt Expl., en fuldvoxen Han, der, om end mindre end den engelske Form, dog saavel i sin ydre Form som i sine anatomiske Detailler paa det nøieste stemmede overens med denne, toges ved Mosterhavn paa 80—100 F. D. **Ny for vor Fauna.**

[1] Oversigt af Norges marine Ostracoder, pg. 109.

[2] Undersøgelser over Christianiafjordens Dybvandsfauna, pg. 51.

107. *Philomedes brenda* (Baird) = ♀ Cypridina globosa Lilljeborg et ♂ Philomedes longicornis Lilljeborg. Ved Utne paa 20—50 F. D. blot Hunner.

108. *Philomedes Lilljeborgii* G. O. Sars. Paa de store Dybder ved Utne ligetil 500 F. af og til. Ogsaa ved Mosterhavn paa 150 F. D. (Hunner).

109. *Bairdia obtusata* G. O. Sars. Nogle faa Exemplarer ved Mosterhavn paa 80—100 F. D., Sandbund. Det var mig af største Interesse at finde denne af mig tidligere kun efter tomme Skaller observerede Art her levende, saa at jeg kunde undersøge Dyrets Bygning hos nærværende i tidligere Jordperioder saa talrigt repræsenterede Slægt. De 2 tidligere af mig herhen henførte Former, B. minna Baird og B. angustata G. O. Sars, høre nemlig i Virkeligheden til en ganske forskjellig Slægt, nemlig den af Brady opstillede Slægt *Macrocypris*. Af den anatomiske Bygning hos den egentlige Slægt Bairdia kjendte man tidligere (ved Brady) kun enkelte Brudstykker, hvilket havde sin Grund deri, at de før observerede Exemplarer altid vare undersøgte, efterat de sammen med det Mudder, hvori de fandtes, i længere Tid vare tørrede og de animale Dele saaledes naturligvis fordetmeste ganske vare forstyrrede. Efter mine i Spiritus vel conserverede Exemplarer har det nu været mig muligt at foretage en fuldstændig anatomisk Undersøgelse. Det har herved vist sig, at Slægten Bairdia danner en meget interessant Overgangsform mellem Cyprider og Cytherider, skjønt den vel nærmest maa blive at henføre til den første af disse Familier, med hvem den stemmer overens ved de tydeligt udviklede lineære med de sædvanlige tynde Endeklør bevæbnede Postabdominalgrene. Fra de øvrige Cyprider adskiller derimod denne Slægt sig ganske mærkeligt ved Tilstedeværelsen af 3 Par virkelige og i sin Bygning med hinanden overensstemmende Gangfødder ligesom hos Cytheriderne. Det første Par af disse, der svarer til 2det Par Maxiller hos Cypriderne, adskiller sig fra de øvrige alene derved, at der til Basalledet bagtil er fæstet en oval med lange cilierede Børster besat Branchialplade. Allerede hos Slægterne Pontocypris og Macrocypris, der dog tydeligt nok ere

ægte Cyprider, finde vi imidlertid, at 2det Par Maxiller, eller rettere disses Palpe, begynder at antage en fodformig Bygning, skjønt de endnu her saavel ved sin ringe Udvikling som ved den mere eller mindre tydeligt udviklede Tyggefortsats vise Characteren af virkelige Maxiller. Det levende Dyr viste kun meget træge Bevægelser og brugte sine 3 Par Fødder fuldkommen paa samme Vis som Cytheriderne til dermed sagte at krybe hen over Bunden. Sammen med denne Art fandtes endnu et Par Exemplarer af en bestemt forskjellig Art, som viste sig at være:

110. *Bairdia complanata* Brady. Ogsaa af denne for vor Fauna nye Art har jeg kunnet foretage en fuldstændig anatomisk Undersøgelse og har fundet de anatomiske Detailler i det Væsentligste nøie overensstemmende med samme hos foregaaende Art. Slægten Bairdia vil herefter kunne characteriseres paa følgende Maade:

Gen. *Bairdia* M'Coy. Valvulæ testæ inæqvales, sinistra majore et dextram ex parte amplectente, sat duræ, superficie glaberrima et nitidissima pilis fere omnino destituta, linea cardinali simplice, non dentata. Margines inferiores valvularum medio brevi spatio inflexi et alter alteri obtegentes aream qvasi impressam in medio faciei ventralis formantes. Oculi nulli. Antennæ sat fortes, superiores 6articulatæ, articulis 2 prioribus magnis et crassis, seqventibus perbrevibus et firmiter conjunctis, cum 2do vero articulationem mobilissimam formantibus, setis numerosis longis instructis; inferiores validæ, 5articulatæ, articulo 2do extus ad basin tuberculo bisetoso ornato, penultimo elongato, ultimo brevissimo ungvibus 2 fortibus et elongatis armato. Mandibulæ sat magnæ extremitate inferiore paulo dilatata et inflexa dentibus 6—7 elongatis et fortiter serrulatis armata, palpo valido 4articulato appendice branchiali minima setis 3, qvarum una valde elongata, ornata. Maxillarum unum solummodo par ramis 3 angustis et subæqvalibus, omnibus uniarticulatis, terminatum, appendice branchiali bene evoluta et tamqvam ex partibus duabus constrictione distincta sejunctis composita, basali inferne setis pluribus longis et tenuibus ornata, terminali dilatata subovata setis magnis et ciliatis circumcirca marginata. Pedum tria paria, omnia structura eadem, antice vergentia et ex testa protractilis, 4articulata, ungve terminali longo instructa. Pedes 1mi paris lamina branchiali magna ovata setis longis et ciliatis marginata articulo basali postice affixa instructi. Rami postabdominales breves sed bene evoluti, lineares, ungvibus 2 elongatis postice setis nonnullis inæqvalibus ornatis terminati. Animalia segniter se inter limum protrahentia.

111. *Pontocypris trigonella* G. O. Sars. Saavel ved Utne som ved Mosterhavn paa grundt Vand ikke sjelden.

112. *Pontocypris mytiloides* (Norman) (= P. serrulata G. O. Sars). Ved Mosterhavn nogle faa Ex. sammen med foregaaende.

113. *Cythere lutea* Müll. Ved Utne og Mosterhavn ikke sjelden mellem Alger.

114. *Cythere viridis* Müll. Ligesaa.

115. *Cythere villosa* G. O. Sars. Paa noget dybere Vand ved Mosterhavn af og til.

116. *Loxoconcha impressa* Baird. Meget almindelig ved Mosterhavn mellem Alger.

117. *Cytherura nigrescens* (Baird). Ved Utne mellem Strandalger alm.

118. *Cytheridea papillosa* Bosquet. Af denne ved Christiania særdeles almindelige Cytheride toges et enkelt Expl. ved Mosterhavn paa 30—40 F. D.

119. *Paradoxostoma variabile* (Baird). Ikke sjelden mellem Alger saavel ved Utne som Mosterhavn.

Jeg giver tilslut en Oversigtstabel for at vise de i det foregaaende nævnte Crustaceers geographiske Udbredning ved vore Kyster, idet jeg foruden Hardangerfjorden anfører 2 andre vidt fra hinanden adskilte Localiteter, som begge af mig ere nøie undersøgte, nemlig Christianiafjorden og Lofoten. Til Sammenligning vedføier jeg endnu det Punkt af vor (ydre) Vestkyst, der med Hensyn til Crustacefaunaen er bedst undersøgt, nemlig Christiansund.

Tabula distributionem crustaceorum in hoc opusculo enumeratorum circa oras Norvegiæ exhibens.

	Hardanger-fjorden.	Christiania-fjorden.	Lofoten.	Christianssund.
Stenorhynchus rostratus L.	+	+		+
Hyas araneus L.	+	+	+	+
Carcinus maenas L.	+	+	+	+
Lithodes maja L.	+	+	+	+
Pagurus Pridauxii Leach.	+		+	+
— pubescens Kr.	+		+	+
— chiroacanthus Lilljeb.	+	+		+
Galathea strigosa L.	+			+
— tridentata Esmark	+		+	
Munida rugosa Fabr.	+	+	+	+
— tenuimana G. O. Sars, n. sp.	+		+	
Calocaris Macandreæ Bell	+	+	+	+
Pandalus annulicornis Leach	+	+	+	+
— brevirostris Rathke	+	+	+	+
— borealis Kr.	+	+	+	
— propinqvus G. O. Sars	+		+	
Hippolyte polaris Sab	+	+	+	
— securifrons Norman	+	+	+	
— Gaimardii Edw.	+		+	+
— pusiola Kr.	+	+	+	
— Sowerbæi Leach	+		+	?
Virbius varians Leach	+		+	+
— fasciger Gosse	+	+		
Caridion Gordoni Bate	+	+	+	
Cryptocheles pygmæa G. O. Sars	+		+	
Crangon vulgaris L.	+	+	+	+
— nanus Kr.	+	+		+
— echinulatus M. Sars	+	+		
Pontophilus norvegicus M. Sars	+	+	+	+

	Hardangerfjorden.	Christianiafjorden.	Lofoten.	Christiansund.
Sabinea septemcarinata Sab.	+		+	+
Pasiphaë norvegica M. Sars	+	+	+	
Sergestes sp.?	+			
Thysanopoda norvegica M. Sars	+	+	+	
Mysis inermis Rathke	+	+	+	+
— neglecta G. O. Sars	+	+	+	
— ornata G. O. Sars	+	+	+	
Siriella norvegica G. O. Sars	+	+		
Erythrops pygmæa G. O. Sars	+	+		
— Goësii G. O. Sars	+	+	+	
— serrata G. O. Sars	+	+	+	+
— microphthalma G. O. Sars	+	+	+	
Parerythrops obesa G. O. Sars	+	+	+	
Pseudomma roseum G. O. Sars	+		+	
— affine G. O. Sars	+		+	
Amblyops abbreviata G. O. Sars	+	+	+	
Mysideis insignis G. O. Sars	+	+	+	
Leptomysis gracilis G. O. Sars	+	+		
Mysidopsis didelphys Norman	+	+	+	
— angusta G. O. Sars	+	+		
Boreomysis arctica Krøyer	+	+	+	
— megalops G. O. Sars, n. sp.	+			
Hemimysis abyssicola G. O. Sars	+	+	+	
Mysidella typica G. O. Sars, n. gen. et sp.	+			
— typhlops G. O. Sars, n. sp.	+			
Diastylis lucifera Kr.	+	+	+	
— bispinosa Stimpson	+	+	+	
— rugosa G. O. Sars	+	+		+
— tumida Lilljeborg	+	+		
— echinata Sp. Bate	+	+	+	
— serrata G. O. Sars	+	+	+	
— biplicata G. O. Sars	+	+	+	

	Hardanger-fjorden.	Christiania-fjorden.	Lofoten.	Christiansund.
Leptostylis villosa G. O. Sars	+	+	+	
Leucon nasicus Kr.	+	+	+	+
— nasicoides Lilljeborg	+	+	+	
— pallidus G. O. Sars	+	+	+	
Eudorella emarginata Kr.	+	+	+	
— truncatula Sp. Bate	+	+		+
Lamprops rosea Norm.	+	+	+	
— cristata G. O. Sars	+		+	
— uniplicata G. O. Sars, n. sp.	+		+	
Platyaspis typica G. O. Sars	+		+	
Campylaspis rubicunda Lilljeborg	+	+	+	
— costata G. O. Sars	+	+	+	
— verrucosa G. O. Sars	+	+	+	
— sulcata G. O. Sars	+		+	
— horrida G. O. Sars	+		+	
Cyclaspis longicaudata G. O. Sars	+		+	
Cuma pusilla G. O. Sars	+			
Jaera albifrons Leach	+	+	+	
Henopomus muticus Kr.	+	+	+	
Munna limicola G. O. Sars	+	+	+	
Paramunna bilobata G. O. Sars	+	+	+	
Pleurogonium rubicundum G. O. Sars	+	+	+	
Dendrotion spinosum G. O. Sars, n. gen. et sp.	+			
Ischnosoma bispinosum G. O. Sars	+	+	+	
Desmosoma lineare G. O. Sars	+	+	+	
Ilyarachna longicornis G. O. Sars	+	+	+	
Eurycope cornuta G. O. Sars	+	+	+	
— phallangium G. O. Sars	+	+	+	
— megalura G. O. Sars, n. sp.	+			
Tanais tenuimanus Lilljeborg	+	+	+	
— depressus G. O. Sars	+	+	+	
Arcturus longicornis Sow.	+	+	+	+

	Hardanger-fjorden.	Christiania-fjorden.	Lofoten.	Christiansund.
Æga psora Linn.	+		+	
— rotundicauda Lilljeb.	+			
— Strömii	+			
Anceus oxyuræus Lilljeb.	+	+	+	+
— dentatus G. O. Sars, n. sp.	+			
— abyssorum G. O. Sars, n. sp.	+			
Nebalia bipes Fabr.	+	+	+	
Evadne Nordmanni Lovén	+	+	+	
Podon polyphemoides Leuckart	+	+		
— minutus G. O. Sars	+	+	+	
Cypridina norvegica Baird	+		+	
— megalops G. O. Sars, n. sp.	+			
Asterope Mariæ Baird	+			
Philomedes brenda Baird	+	+	+	
— Lilljeborgii G. O. Sars	+	+	+	
Bairdia obtusata G. O. Sars	+			
— complanata Brady	+			
Pontocypris trigonella G. O. Sars	+	+	+	
— mytiloides Norman	+			
Cythere lutea Müll.	+	+	+	
— viridis Müll.	+	+		
— villosa G. O. Sars	+	+		
Loxoconcha impressa Baird	+	+	+	
Cytherura nigrescens Baird	+	+	+	
Cytheridea papillosa Bosqvet	+	+	+	
Paradoxostoma variabile Baird	+	+	+	

Om Ligningen af 3die Grad.

Af Dr. A. S. Guldberg.

(Foredraget i Mødet den 10de Marts 1871.)

1. Den almindelige kubiske Ligning har Formen:

$$y^3 + a_1 y^2 + b_1 y + c_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Ved Substitutionen $y = x - \frac{a_1}{3}$ erholder den Formen:

$$x^3 + ax + b = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Sætter man i Lign. (2) $x = \frac{b}{a} z$, faaes:

$$z^3 + \frac{a^3}{b^2} z + \frac{a^3}{b^2} = 0.$$

Sættes for Kortheds Skyld $\frac{a^3}{b^2} = - c$, erholder Ligningen Formen:

$$z^3 - cz - c = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

En Rod i denne Ligning betegner jeg med $\overset{3}{\mathbf{r}}$, saaledes at man af Lign. (3) slutter:

$$z = \overset{3}{\mathbf{r}}(c).$$

Da $x = \frac{b}{a} z$ og $c = -\frac{a^3}{b^2}$, saa følger deraf, at en Rod i Ligningen

$$x^3 + ax + b = 0$$

er: $x = \frac{b}{a} \overset{3}{\mathbf{r}} \left[- \frac{a^3}{b^2} \right]$.[1]

Substitueres $z = \frac{1}{x}$ i den kubiske Ligning $z^3 + a_1 z^2 + b_1 = 0$, faaes:

$$x^3 + \frac{a_1}{b_1} x + \frac{1}{b_1} = 0.$$

Ifølge det foregaaende er en Rod i denne sidste Ligning udtrykt ved

$$x = \frac{\frac{1}{b_1}}{\frac{a_1}{b_1}} \overset{3}{\mathbf{r}} \left[\frac{-\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^3}{\left(\frac{1}{b_1}\right)^2} \right] = \frac{1}{a_1} \overset{3}{\mathbf{r}} \left[- \frac{a_1^{\,3}}{b_1} \right].$$

[1] Denne Formel gjælder for hvilkesomhelst positive og negative Værdier af a og b.

Indsættes denne Værdi af x, og betegnes $\frac{1}{\overset{3}{\mathbf{r}}(x)}$ med $\overset{3}{\mathbf{kr}}(x)$, saa erholdes:

$$z = a_1 \overset{3}{\mathbf{kr}}\left[-\frac{a_1^3}{b_1}\right].$$

Rødderne i de kubiske Ligninger

(4) . . . . . $x^3 + ax + b = 0$ og $x^3 + ax^2 + b = 0$

kunne altsaa udtrykkes ved Formlerne:

(5) . . . . . $x = \frac{b}{a} \overset{3}{\mathbf{r}}\left[-\frac{a^3}{b^2}\right]$ og $x = a\, \overset{3}{\mathbf{kr}}\left[-\frac{a^3}{b}\right]$,[1]

hvor man har: $\overset{3}{\mathbf{r}}(z) \,.\, \overset{3}{\mathbf{kr}}(z) = 1.$

2. Af det Udviklede følger, at en Rod i Ligningerne (4) kan bestemmes, naar man kjender en Rod i Ligning $x^3 - cx - c = 0$. En reel Rod i denne sidste kan bestemmes ved at beregne en Tabel, der angiver de forskjellige Værdier af c svarende til Værdier af x.

Af Ligning $x^3 - cx - c = 0$ følger:

$$c = \frac{x^3}{x+1}.$$

Lader man x efterhaanden voxe fra 0 til $+\infty$, voxer ogsaa c fra 0 til $+\infty$. Lader man x aftage fra 0 til -1, aftager c fra 0 og nærmer sig $-\infty$. Geometrisk fremstilles Funktionen, som hosstaaende Figur viser, ved en uendelig Kurvegren OEA, der gaar fra Koordinaternes Begyndelsespunkt og med Konvexiteten mod X-axen stiger rask opad, og ved en anden ligeledes

[1] Den almindeligste Form for den kubiske Ligning er:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

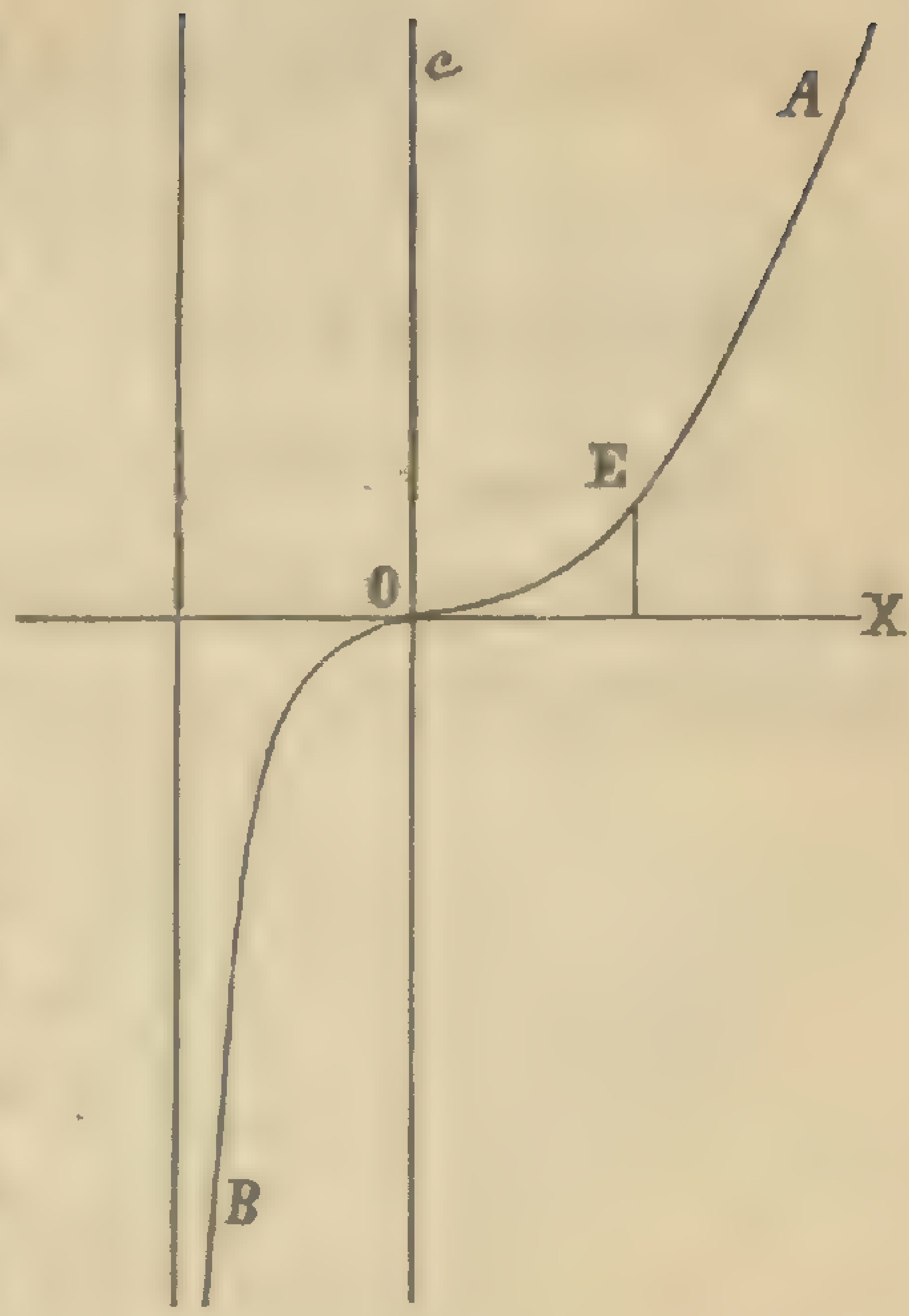
Sættes $x = y - \frac{a}{3}$, faaes: $y^3 + \frac{3b - a^2}{3} \cdot y + \left[\frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27}\right] = 0.$

Af denne sidste Ligning følger:

$$y = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{9(3b - a^2)} \overset{3}{\mathbf{r}}\left[\frac{27(a^2 - 3b)^3}{(2a^3 - 9ab + 27c)^2}\right].$$

Den søgte Rod x i den oprindelige Ligning bliver følgelig:

$$x = -\frac{a}{3} + \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{9(3b - a^2)} \overset{3}{\mathbf{r}}\left[\frac{27(a^2 - 3b)^3}{(2a^3 - 9ab + 27c)^2}\right].$$



uendelig Kurvegren OB, der gaar fra Koordinaternes Begyndelsespunkt med Konvexiteten mod den negative X-axe og har en ret Linie i Afstanden -1 fra O til Assymptote.

Giver man x negative Værdier i Talværdi > 1, erholder c positive Værdier og har et Minimum for $x = -\frac{3}{2}$, nemlig $c = \frac{27}{4}$. Kurven har altsaa foruden den i Figuren optegnede Gren endnu en anden, som har sit dybeste Punkt lodret over $x = -\frac{3}{2}$, stiger til begge Sider med Grene, der voxe i det Uendelige, og hvoraf den ene (til høire nærmest C-axen) har Linien $x = -1$ til Assymptote.

Den efterfølgende Tabel deler sig i 3 Hoveddele, betegnede med No. 1, No. 2, No. 3. I No. 1 og No. 2 er beregnet Værdierne af logbr. c svarende til Værdier af x og $\frac{1}{x}$ fra 0 til $+1$. No. 1 svarer til Kurvegrenen OE og No. 2 til EA, thi x gaar fra 1 til ∞, naar $\frac{1}{x}$ varierer fra 1 til 0. I No. 3 er beregnet Værdierne af logbr. c svarende til Værdier af x fra 0 til -1; c er følgelig her negativ, hvorfor logbr. c er Logarithmen til Talværdien. Mærket n betegner, at c er negativ. Man finder i Tabellen logbr. c beregnet for x og $\frac{1}{x}$ fra 0,000, 0,001, 0,002, o. s. v. indtil 0,100, derpaa fra 0,105, 0,110, 0,115 o. s. v. indtil 1,000. Det kunde være ønskeligt at have Tabellen beregnet mere udførligt, men Frygt for, at den skulde optage formegen Plads, har afholdt mig derfra; selv i dens nuværende Form kan man med nogen Hjælperegning bestemme 7 Decimaler i Roden. Ved sædvanlig Interpolation giver den i Regelen 5 Decimaler nøiagtige i den søgte Rod. [1]

[1] Tabellen er beregnet med 7 Decimaler: i Regelen vil 5 Decimaler være tilstrækkelige. Beregningen af denne Tabel er udført af Stud. real. Frithjof Guldberg. Mulige Feil, der maatte opdages i Tabellen, bedes mig godhedsfuldt opgivne.

3. I 1 er vist, at en reel Rod i den kubiske Ligning

$$x^3 + ax + b = 0$$

er bestemt ved Formel: $x = \frac{b}{a} \overset{3}{\mathbf{r}} \left(-\frac{a^3}{b^2}\right)$.

Har man ved Tabellens Hjælp fundet denne Rod at være ρ, saa bliver den kvadratiske Faktor, der indeholder Ligningens to andre Rødder:

$$\frac{x^3+ax+b}{x-\rho} = x^2 + \rho x + (\rho^2 + a).$$

Da $\rho^2 + a = -\frac{b}{\rho}$, saa kan den kvadratiske Faktor ogsaa skrives under Formen:

$$x^2 + \rho x - \frac{b}{\rho},$$

eller da $\rho = \frac{b}{a} \overset{3}{\mathbf{r}} \left(-\frac{a^3}{b^2}\right)$:

$$x^2 + \frac{b}{a} \overset{3}{\mathbf{r}} \left(-\frac{a^3}{b^2}\right) . x - a \overset{3}{\mathbf{kr}} \left(-\frac{a^3}{b^2}\right).$$

Sættes dette sidste Udtryk lig Nul, og opløses den saaledes erholdte kvadratiske Ligning med Hensyn paa x, erholdes de to øvrige Rødder i den givne kubiske Ligning. Disse Rødder kunne enten være begge reelle eller begge imaginære. De ville være reelle, naar $-\frac{a^3}{b^2} \geqq \frac{27}{4}$[1] (se 2), hvilken Betingelse kan skrives under Formen:

$$\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \leqq 0.$$

Den kubiske Ligning $x^3 + ax^2 + b = 0$ har en reel Rod bestemt ved Formelen:

$$x = a \overset{3}{\mathbf{kr}} \left(-\frac{a^3}{b}\right).$$

Er denne Rod funden ved Tabellens Hjælp lig ρ, erholdes de to øvrige Rødder af den kvadratiske Faktor:

[1] En Linie parallel X-axen vil i saa Fald skjære Kurverne (Side 289) i 3 Punkter. Er $-\frac{a^3}{b^2} = \frac{27}{4}$, har Ligningen to lige Rødder, nemlig $-\frac{3}{2}\frac{b}{a}$, thi $\overset{3}{\mathbf{r}}\left(\frac{27}{4}\right) = -\frac{3}{2}$.

$$\frac{x^3 + ax^2 + b}{x - \rho} = x^2 + (a + \rho) \,.\, x + \rho\,(a + \rho).$$

Betingelsen, for at alle 3 Rødder i dette Tilfælde ere reelle, bliver

$$-\frac{a^3}{b} \geqq \frac{27}{4} \text{ eller } \left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{4}\right) \leqq 0.$$

4. *1 Ex.* $x^3 - \frac{8}{3}x - \frac{8}{3} = 0.$

Roden i denne Ligning er ifølge 1 $x = \overset{3}{r}\left(\frac{8}{3}\right) = 2$; thi man har $\frac{8}{3} = \frac{2^3}{1 + 2}$. De to øvrige Rødder erholdes af Ligningen

$$\frac{x^3 - \frac{8}{3}x - \frac{8}{3}}{x - 2} = x^2 + 2x + \frac{4}{3} = 0,$$

hvilken Ligning opløst med Hensyn paa x giver de to Rødder $1 \pm \frac{1}{3}\sqrt{-3}$.

2 *Ex.* $x^3 - 3x + 2 = 0$. Her er $a = -3$, $b = 2$.

Roden i denne Ligning er $x = -\frac{2}{3}\overset{3}{r}\left(\frac{27}{4}\right)$. Nu er $\overset{3}{r}\left(\frac{27}{4}\right) = 3$; thi man har $\frac{3^3}{3 + 1} = \frac{27}{4}$. Fremdeles er $\overset{3}{r}\left(\frac{27}{4}\right) = -\frac{3}{2}$; thi man har $\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^3}{-\frac{3}{2} + 1} = \frac{-\frac{27}{8}}{-\frac{1}{2}} = \frac{27}{4}$.

Ifølge 3 (se Noten) er Værdien $-\frac{3}{2}$ en Dobbeltrod, og man erholder følgelig for den kubiske Ligning

$$\text{Roden } x = -\frac{2}{3} \,.\, 3 = -2$$

og de to lige Rødder $x = -\frac{2}{3} \,.\, -\frac{3}{2} = +1$.

Ligningen kan altsaa dekomponeres i Faktorerne $(x + 2)(x - 1)(x - 1)$.

3 *Ex.* $x^3 + 3x - \frac{13}{2} = 0$. Her er $a = +3$ og $b = -\frac{13}{2}$, følgelig bliver Roden

$$x = -\frac{13}{6}\overset{3}{r}\left[-\frac{3^3}{\left(\frac{13}{2}\right)^2}\right] = -\frac{13}{6}\overset{3}{r}\left[-\frac{108}{13^2}\right].$$

Af Logarithmetabellen faaes: $\log 108 = 2{,}033\,4238$

$$\log 13^2 = 2{,}227\,8867$$

$$\log\left[-\frac{108}{13^2}\right] = 9{,}805\,5371_n\ ^{1}$$

Tabel No. 3 giver for $\log c_n = 9{,}813\,6087_n$ Værdien $-0{,}625$

$$\text{Dif.} = \quad 8\,0716$$

I Tabellen findes, at til $x = -0{,}620$ svarer $\log c_n = 9{,}797\,3915_n$

. . . . $x = -0{,}625$ . . . . $\log c_n = 9{,}813\,6087_n$

$$\text{Dif.} = \quad 16\,2172$$

Multipliceres den sidste Differents med 2 og divideres med 10, faaes 32434,4, der svarer til en Differents = 0,001 i Argumentet. Ifølge Reglerne for sædvanlig Interpolation bliver Korrektionen for Værdien — 0,625:

$$\frac{80716}{32434{,}4} = 2{,}49.$$

Følgelig bliver $\sqrt[3]{-\frac{108}{13^2}} = -[0{,}625 - 0{,}00249] = -0{,}62251.$

Indsættes denne Værdi i Udtrykket for x, erholdes:

$$x = -\tfrac{13}{6}\,.\,-0{,}62251 = 1{,}34877.$$

Anm. Ønsker man $\sqrt[3]{-\frac{108}{13^2}}$ udtrykt med flere Decimaler, beregner man log c efter Formelen $\frac{x^3}{1-x}$ $\left(x \text{ negativ i Formel } \frac{x^3}{1+x}\right)$, idet man efterhaanden sætter $x = 0{,}62251$ og $0{,}62252$. Man faar da:

$3 \log 0{,}62251 = 0{,}382\ 4389 - 1$	$3 \log 0{,}62252 = 0{,}382\ 4599 - 1$
$\log 0{,}37749 = 0{,}576\ 9055 - 1$	$\log 0{,}37748 = 0{,}576\ 8939 - 1$
$9{,}805\ 5334_n$	$9{,}805\ 5660_n$
$\log\left[-\frac{108}{13^2}\right] = 9{,}805\ 5371_n$	$9{,}805\ 5334_n$
Dif. = 37	Dif. = 326

Da $\frac{37}{326} = 0{,}113$, saa bliver $\sqrt[3]{-\frac{108}{13^2}} = -0{,}62\,251\,113$, hvor man med Sikkerhed tør stole paa de 7 første Decimaler. Ved at gjentage den her udførte Beregning med Værdierne 0,6225111 og 0,6225112 vilde man paa lignende Maade kunne bestemme mindst 2 Decimaler til i Roden med absolut Sikkerhed. Indsættes den her fundne Værdi i Udtrykket for x, erholder man

$$x = 1{,}3487741.$$

[1] Forat undgaa den negative Karakteristik er til alle Logarithmer adderet 10.

Da i dette Tilfælde $-\frac{108}{13^2}$ er negativ, saa ere de to andre Rødder i den kubiske Ligning imaginære; den kvadratiske Faktor bliver ifølge 3:

$$x^2 + \rho x - \frac{b}{\rho} = x^2 + 1{,}34877 \,.\, x + \frac{13}{2 \,.\, 1{,}34877}$$

eller, naar Regningen udføres:

$$x^2 + 1{,}34877 \,.\, x + 4{,}81921.$$

4 Ex. $x^3 - 2x^2 + 27 = 0$. Roden i denne Ligning bliver:

$$x = a \overset{3}{\mathbf{kr}}\left(-\frac{a^3}{b}\right) = -2 \overset{3}{\mathbf{kr}}\left(\tfrac{8}{27}\right).$$

Logarithmetabellen giver log 8 = 0,903 0900
log 27 = 1,431 3638
9,471 7262
Tabel No. 1 giver for log c = 9,474 5962 $\overset{3}{\mathbf{r}}(c) = 0{,}815$.
Dif. = 2 8700

Af Tabel No. 1 findes for 5 Enheder Differentsen 68198, altsaa for 1 Enhed 13639,6. Man finder derpaa: $\frac{28700}{13639{,}6} = 2{,}104 = 2{,}10$, naar blot to Decimaler medtages.

Den søgte Værdi for $\overset{3}{\mathbf{r}}\left(\tfrac{8}{27}\right)$ bliver følgelig:

$$0{,}815 - 0{,}00210 = 0{,}81289.$$

Indsættes denne Værdi, idet man erindrer, at $\overset{3}{\mathbf{r}}(c) = \frac{1}{\overset{3}{\mathbf{kr}}(c)}$, faaes:

$$x = -2 \,.\, \frac{1}{0{,}81289} = -2{,}46035,$$

som er den søgte Rod i den givne kubiske Ligning.

Da $\frac{8}{27} < \frac{27}{4}$, saa ere de to andre Rødder i Ligningen imaginære. Den kvadratiske Faktor bliver ifølge 3:

$$x^2 + (a + \rho) \,.\, x + \rho\,(a + \rho) = x^2 - 4{,}46035 \,.\, x + 2{,}46035 \,.\, 4{,}46035$$
$$= x^2 - 4{,}46035 \,.\, x + 10{,}97402.$$

Anm. Ønsker man flere Decimaler i Roden, beregnes log c efter Formel $c = \frac{x^3}{1+x}$. Man erholder da, idet x sættes lig 0,81289 og 0,81290:

$$\begin{array}{rrl} \log 0{,}81289 = & 0{,}910\ 0318 - 1 & \\ & 3 & \\ \hline & 0{,}730\ 0954 - 1 & \\ \log 1{,}81289 = & 0{,}258\ 3714 & \\ \hline & 9{,}471\ 7240 & \\ & 9{,}471\ 7262 & \\ \hline \text{Dif.} = & 22 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrl} \log 0{,}81290 = & 0{,}910\ 0371 - 1 \\ & 3 \\ \hline & 0{,}730\ 1113 - 1 \\ \log 1{,}81290 = & 0{,}258\ 3738 \\ \hline & 9{,}471\ 7375 \\ & 9{,}471\ 7240 \\ \hline & 135 \end{array}$$

Nu er $\frac{22}{135} = 0{,}16$, altsaa bliver

$\overset{3}{\mathrm{r}}\left(\frac{8}{27}\right) = 0{,}812\ 8916$. Indsættes denne Værdi, faaes: $x = -2{,}460352$. (Vegas Tabel er benyttet.)

5 *Ex.* $x^3 - 18{,}345 \,.\, x - 2{,}075 = 0$.

Her er $a = -18{,}345$, $b = -2{,}075$; Roden i Ligningen bliver da:

$$x = \frac{b}{a}\,\overset{3}{\mathrm{r}}\left(-\frac{a^3}{b^2}\right) = \frac{2{,}075}{18{,}345}\,\overset{3}{\mathrm{r}}\left[\frac{(18{,}345)^3}{(2{,}075)^2}\right].$$

Man finder:

$$\begin{array}{ll} \log 18{,}345 = 1{,}263\ 5177 \text{ og } & \log (18{,}345)^3 = 3{,}790\ 5531 \\ \log\ 2{,}075 = 0{,}317\ 0181 - & \log\ (2{,}075)^2 = 0{,}634\ 0362 \\ \hline \log \frac{2{,}075}{18{,}345} = 0{,}053\ 5004{-}1 & \log \left[\frac{(18{,}345)^3}{(2{,}075)^2}\right] = 13{,}156\ 5169 \end{array}$$

Tabel No. 2 giver for $\log c = 13{,}158\ 9060$ $\overset{3}{\mathbf{kr}}(c) = 0{,}026$.

$$\text{Tabel No. 2 giver for 1 i 3die Decimal } \frac{\text{Dif.} = \ 2\ 3891}{\text{Dif.} = 33\ 2046} = 0{,}071.$$

Som Tabel No. 2 viser, voxer $\overset{3}{\mathbf{kr}}(c)$, naar c aftager (ligesom den trigonometriske Cotangens); følgelig bliver den søgte Værdi:

$$\overset{3}{\mathbf{kr}}\left[\frac{18{,}345^3}{2{,}075^2}\right] = 0{,}026071.\ ^{1}$$

$$\text{Nu er } \log x = \log \frac{2{,}075}{18{,}345} - \log \overset{3}{\mathbf{kr}}\left[\frac{18{,}345^3}{2{,}075^2}\right] = \begin{array}{r} 0{,}053\ 5004 - 1 \\ 0{,}416\ 1577 - 2 \\ \hline \end{array}$$

Man faar altsaa $\log x = 0{,}637\ 3427$

[1] Beregnes med denne Værdi log c efter Formel $c = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}$, faaes $\log c = 13{,}156\ 5071$, der kun skiller sig lidet fra $13{,}156\ 5169$; bemærkes maa desuden, at her gjør en liden Forandring i $\overset{3}{\mathbf{kr}}(c)$ en meget stor Forandring i log c, følgelig er 0,026071 en meget nøiagtig Værdi (rigtig i 6te Decimal).

Man finder deraf $x = 4{,}33853$.

Da $\frac{18{,}345^3}{2{,}075^2} > \frac{27}{4}$, saa har Ligningen 3 reelle Rødder. Ifølge 3 har den kvadratiske Faktor Formen:

$$x^2 + \frac{b}{a} \overset{3}{\mathbf{r}}\left(-\frac{a^3}{b^2}\right).x - a.\mathbf{k}\overset{3}{\mathbf{r}}\left(-\frac{a^3}{b^2}\right) = x^2 + 4{,}33853.x + 18{,}345.0{,}026071.$$

Ovenfor er fundet $\log 18{,}345 = 1{,}263\,5177$

$$\begin{aligned} \text{og } \log 0{,}026071 &= 0{,}416\,1577 - 2 \\ \log 18{,}345 \,.\, 0{,}026071 &= 0{,}679\,6754 - 1 \\ \therefore\quad 18{,}345 \,.\, 0{,}026071 &= 0{,}47827. \end{aligned}$$

Den kvadratiske Ligning bliver følgelig:

$$x^2 + 4{,}33853 \,.\, x + 0{,}47827 = 0,$$

hvilken giver opløst paa sædvanlig Vis ved de Gaussiske Logarithmer[1] de to Rødder

$$-4{,}22535 \text{ og } -0{,}11317.$$

De anførte Exempler ere formentlig tilstrækkelige til at vise Methodens Anvendelse samt dens Simpelhed og Hurtighed i Regningen.

Denne Methode har intet irreduktibelt Tilfælde, men giver stedse den ene reelle Rod og den kvadratiske Faktor, der indeslutter de to andre Rødder. I Virkeligheden peger det irreduktible Tilfælde ved den Cardanske Regel hen paa, at Opløsningen er uheldig og Methoden uhensigtsmæssig. At reducere Løsningen af en Ligning til visse bestemte Regnemethoder eller til visse Tabeller (f. Ex. de trigonometrisk-logarithmiske) kan, selv om det er muligt, meget vel føre til en uheldig Løsning af Problemet; der er intet til Hinder for, at Løsningen af den samme Ligning kunde ske paa en lettere Maade ved at henføre den til en anden forud beregnet Tabel. Det er dette sidste, som her er forsøgt. Det skal senere vises, at en lignende Fremgangsmaade kan anvendes for at bestemme en reel Rod i enhver af de to Ligninger $x^5 + ax + b = 0$ og $x^5 + ax^4 + b = 0$.

[1] Her er benyttet *Jerome de la Landes* Logarithmetabel med 5 Decimaler, udgiven af H. J. Köhler.

Resumé

du mémoire

sur l'équation du 3$^{\text{me}}$ degré,

par M. Axel S. Guldberg.

Je désigne par $\overset{3}{\overline{\mathrm{r}}}(c)$ la racine de l'équation

$$x^3 - c\,x - c = 0.$$

La valeur inverse $\frac{1}{\overset{3}{\overline{\mathrm{r}}}(c)}$ est désignée par $\overset{3}{\overline{\mathrm{kr}}}(c)$ (la racine conjuguée) ainsi qu'on a:

$$\overset{3}{\overline{\mathrm{r}}}(c)\,.\,\overset{3}{\overline{\mathrm{kr}}}(c) = 1.$$

Dans la table suivante on trouvera des valeurs de logbr. c correspondantes aux valeurs de x et $\frac{1}{x}$. La table est divisée en trois parties désignées par n⁰ 1, n⁰ 2, n⁰ 3. N⁰ 1 donne les valeurs de log c pour x de 0 à + 1 d'après la formule $c = \frac{x^3}{x+1}$. N⁰ 2 donne les valeurs de log c pour $\frac{1}{x}$ de 0 à + 1 calculées d'après la formule $c = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}$. N⁰ 3 donne les valeurs de log c_n pour x de 0 à — 1 d'après la formule $c = \frac{-x^3}{1-x}$. A l'aide de cette table on peut trouver la racine des équations $x^3 + ax + b = 0$ et $x^3 + ax^2 + b = 0$.

Posant $x = \frac{b}{a}\,y$ dans la première des équations on aura:

$$\frac{b^3}{a^3}\,y^3 + by + b = 0,\ \text{d'òu}\ \ y^3 + \frac{a^2}{b^2}\,y + \frac{a^3}{b^2} = 0;$$

$$\text{donc}\ \ y = \overset{3}{\overline{\mathrm{r}}}\left(-\frac{a^3}{b^2}\right)\ \text{et par suite}$$

(1) . . . . $x = \frac{b}{a}\,\overset{3}{\overline{\mathrm{r}}}\left(-\frac{a^3}{b^2}\right).$

Posant $x = \frac{1}{y}$ dans l'équation $x^3 + ax^2 + b = 0$ on aura

$$y^3 + \frac{a}{b}\,y + \frac{1}{b} = 0,$$

d'où l'on tire $y = \dfrac{\frac{1}{b}}{\frac{a}{b}}\,\overset{3}{\mathbf{r}}\left[-\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^3}{\left(\frac{1}{b}\right)^2}\right] = \frac{1}{a}\,\overset{3}{\mathbf{r}}\left[-\frac{a^3}{b}\right],$

et par suite:

(2) . . . . $x = a\,\overset{3}{\overline{\mathbf{kr}}}\left(-\frac{a^3}{b}\right).$

---

1 Ex. $x^3 + 3x - \frac{13}{2} = 0$; donc $x = \frac{b}{a}\,\overset{3}{\mathbf{r}}\left(-\frac{a^3}{b^2}\right) = -\frac{13}{6}\,\overset{3}{\mathbf{r}}\left(-\frac{108}{13^2}\right).$

On trouve $\log 108 = 2{,}033\,4238$

$\log 13^2 = 2{,}227\,8867$

$\log\left[-\frac{108}{13^2}\right] = 9{,}805\,5371_n$

La table n° 3

donne pour $\log c_n = 9{,}813\,6087_n$ la valeur $\overset{3}{\mathbf{r}}\,(c) = -\,0{,}625$

Dif. $=$ 80716.

Dans la table on trouve la différence 32434 correspondante à la différence 0,001 dans l'argument. On trouve $\frac{80716}{32434} = 2{,}49$. Donc

$$\overset{3}{\mathbf{r}}\left(-\frac{108}{13^2}\right) = -\,[0{,}625 - 0{,}00249] = -\,0{,}62251.$$

Substituant cette valeur on aura:

$$x = -\frac{13}{6}\,.\,-0{,}62251 = 1{,}34877.$$

Soit cette valeur de x égal à ρ, on trouve:

$$\frac{x^3+ax+b}{x-\rho} = x^2 + \rho x - \frac{b}{\rho} = x^2 + 1{,}34877\,.\,x + \frac{13}{2\,.\,1{,}34877}.$$

Donc on aura:

$$x^3 + 3x - \frac{13}{2} = (x - 1{,}34877)\,(x^2 + 1{,}34877\,.\,x + 4{,}8185).$$

L'équation cubique a dans ce cas une racine réelle et deux racines imaginaires.[1]

[1] Toutes les racines sont réelles, si l'on a: $-\frac{a^3}{b^2} > \frac{27}{4}$, condition nécessaire et suffisante.

2 *Ex.* $x^3 - 18{,}345 . x - 2{,}075 = 0$; $x = \frac{2{,}075}{18{,}345} \overset{3}{\mathbf{r}} \left[\frac{18{,}345^3}{2{,}075^2}\right]$.

On trouve $\log \left[\frac{18{,}345^3}{2{,}075^2}\right] = 13{,}156\,5169$.

La table n⁰ 2 donne $\log c = 13{,}158\,9060$ et $\overset{3}{\mathbf{kr}}\,(c) = 0{,}026$.

$$\begin{array}{rl} \text{Dif.} = & 2\,3891 \\ \hline \text{La table donne Dif.} = & 33\,2040 \end{array} = 0{,}071.$$

On a donc: $\overset{3}{\mathbf{kr}} \left[\frac{18{,}345^3}{2{,}075^2}\right] = 0{,}026071$.

Substituant cette valeur on aura $\log x = 0{,}637\,3427$, d'où l'on tire $x = 4{,}33853$.

L'équation quadratique devient:

$$x^2 + 4{,}33853 . x + 0{,}47827 = 0,$$

d'où l'on tire les deux valeurs de x:

$$-\,4{,}22535 \text{ et } -\,0{,}11317.$$

Tabel

over

Functionen x bestemt ved Ligningen $c = \frac{x^3}{1+x}$.

No. 1, c er positiv.

$x = \sqrt[3]{(c)}$.	logbr. c.	$x = \sqrt[3]{(c)}$.	logbr. c.	$x = \sqrt[3]{(c)}$.	logbr. c.
0,000	$-\infty$	0,040	5,789 1467	0,080	6,675 8462
1	0,999 5659	41	5,820 9010	81	6,691 6293
2	1,902 2223	42	5,851 8802	82	6,707 2144
3	2,430 0630	43	5,882 1212	83	6,722 6058
4	2,804 4463	44	5,911 6576	84	6,737 8086
5	3,094 7439	45	5,940 5212	85	6,752 8270
6	3,331 8559	46	5,968 7417	86	6,767 6657
7	3,532 2645	47	5,996 3470	87	6,782 3284
8	3,705 8095	48	6,023 3623	88	6,796 8192
9	3,858 8363	49	6,049 8128	89	6,811 1421
0,010	3,995 6786	0,050	6,075 7267	0,090	6,825 3010
11	4,119 4269	51	6,101 1079	91	6,839 2994
12	4,232 3631	52	6,125 9942	92	6,853 1408
13	4,336 2208	53	6,150 3993	93	6,866 8285
14	4,432 3460	54	6,174 3408	94	6,880 3664
15	4,521 8079	55	6,197 8356	95	6,893 7567
16	4,605 4663	56	6,220 9001	96	6,907 0030
17	4,684 0257	57	6,243 5497	97	6,920 1085
18	4,758 0697	58	6,265 7983	98	6,933 0760
19	4,828 0866	59	6,287 6600	99	6,945 9079
0,020	4,894 4898	0,060	6,309 1480	0,100	6,958 6073
21	4,957 6322	61	6,330 2740	105	7,020 2056
22	5,017 8172	62	6,351 0506	110	7,078 8551
23	5,075 3078	63	6,371 4882	115	7,134 8185
24	5,130 3336	64	6,391 5984	120	7,188 3256
25	5,183 0961	65	6,411 3906	125	7,239 5775
26	5,233 7725	66	6,430 8715	130	7,288 7518
27	5,282 5210	67	6,450 0600	135	7,336 0055
28	5,329 4809	68	6,468 9554	140	7,381 4791
29	5,374 7786	69	6,487 5696	145	7,425 2985
0,030	5,418 5267	0,070	6,505 9102	150	7,467 5761
31	5,460 8264	71	6,523 9854	155	7,508 4131
32	5,501 7703	72	6,541 8027	160	7,547 9020
33	5,541 4414	73	6,559 3690	165	7,586 1258
34	5,579 9162	74	6,576 6908	170	7,623 1608
35	5,617 2637	75	6,593 7754	175	7,659 0761
36	5,653 5477	76	6,610 6285	180	7,693 9355
37	5,688 8263	77	6,627 2564	185	7,727 7967
38	5,723 1534	78	6,643 6650	190	7,760 7138
39	5,756 5783	79	6,659 8599	195	7,792 7359

No. 1; c er positiv, $c = \frac{x^3}{1+x}$.

$x = \sqrt[3]{(c)}$	logbr. c.	$x = \sqrt[3]{(c)}$	logbr. c.	$x = \sqrt[3]{(c)}$	logbr. c.
0,200	7,823 9088	0,425	8,731 3518	0,650	9,221 2563
205	7,854 2747	430	8,745 0695	655	9,229 9259
210	7,883 8725	435	8,758 6160	660	9,238 5236
215	7,912 7392	440	8,771 9956	665	9,247 0506
220	7,940 9083	445	8,785 2122	670	9,255 5079
225	7,968 4114	450	8,798 2695	675	9,263 8966
230	7,995 2783	455	8,811 1712	680	9,272 2174
235	8,021 5367	460	8,823 9205	685	9,280 4719
240	8,047 2119	465	8,836 5214	690	9,288 6606
245	8,072 3289	470	8,848 9764	695	9,296 7847
250	8,096 9100	475	8,861 2888	0,700	9,304 8451
255	8,120 9769	480	8,873 4619	705	9,312 8429
260	8,144 5494	485	8,885 4986	710	9,320 7788
265	8,167 6472	490	8,897 4020	715	9,328 6539
270	8,190 2877	495	8,909 1744	720	9,336 4691
275	8,212 4879	0,500	8,920 8187	725	9,344 2249
280	8,234 2640	505	8,932 3377	730	9,351 9226
285	8,255 6316	510	8,943 7337	735	9,359 5624
290	8,276 6043	515	8,955 0090	740	9,367 1459
295	8,297 1962	520	8,966 1663	745	9,374 6735
0,300	8,317 4205	525	8,977 2081	750	9,382 1459
305	8,337 2889	530	8,988 1363	755	9,389 5639
310	8,356 8138	535	8,998 9530	760	9,396 9281
315	8,376 0060	540	9,009 6607	765	9,404 2395
320	8,394 8761	545	9,020 2610	770	9,411 4988
325	8,413 4343	550	9,030 7564	775	9,418 7067
330	8,431 6901	555	9,041 1486	780	9,425 8638
335	8,449 6531	560	9,051 4394	785	9,432 9709
340	8,467 3319	565	9.061 6309	790	9.440 0283
345	8,484 7350	570	9,071 7250	795	9,447 0368
350	8,501 8702	575	9,081 7228	0,800	9,453 9975
355	8.518 7459	580	9,091 6269	805	9,460 9105
360	8.535 3686	585	9,101 4384	810	9,467 7764
365	8,551 7460	590	9,111 1589	815	9,474 5962
370	8,567 8845	595	9,120 7903	820	9,481 3703
375	8,583 7912	0,600	9,130 3339	825	9,488 0988
380	8.599 4717	605	9,139 7912	830	9,494 7832
385	8,614 9323	610	9,149 1635	835	9,501 4234
390	8,630 1790	615	9,158 4528	840	9,508 0201
395	8,645 2171	620	9,167 6601	845	9,514 5737
0,400	8,660 0520	625	9,176 7866	850	9,521 0850
405	8,674 6887	630	9,185 8339	855	9,527 5544
410	8,689 1326	635	9,194 8033	860	9,533 9826
415	8,703 3879	640	9,203 6962	865	9,540 3695
420	8,717 1596	645	9,212 5132	870	9,546 7163

No. 1, c er positiv, $c = \frac{x^2}{1+x}$.

$x = \overset{3}{r}(c)$.	logbr. c.	$x = \overset{3}{r}(c)$.	logbr. c.	$x = \overset{3}{r}(c)$.	logbr. c.
0,875	9,553 0230	0,925	9,613 9914	0,975	9,671 4467
880	9,559 2903	930	9,619 8914	980	9,677 0131
885	9,565 5185	935	9,625 7538	985	9,682 5481
890	9,571 7082	940	9,631 5820	990	9,688 0525
895	9,577 8598	945	9,637 3758	995	9,693 5264
0,900	9,583 9739	950	9,643 1362	1,000	9,698 9700
905	9,590 0508	955	9,648 8634		
910	9,596 0908	960	9,654 5575		
915	9,602 0945	965	9,660 2193		
920	9,608 0622	970	9,665 8489		

Tabel

over

Funktionen $\frac{1}{x}$, bestemt ved Ligningen $c = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$.

No. 2 c er positiv.

$\frac{1}{x} = k\overset{3}{r}(c)$.	logbr. c.	$\frac{1}{x} = k\overset{3}{r}(c)$.	logbr. c.	$\frac{1}{x} = k\overset{3}{r}(c)$	logbr. c.
0,000	$+\infty$	0.020	13,389 3398	0,040	12,778 8467
1	15,999 5659	21	13,346 5357	41	12,756 9815
2	15,397 0723	22	13,305 7037	42	12,735 6337
3	15,044 4565	23	13,266 6688	43	12,714 7787
4	14,794 1463	24	13,229 2776	44	12,694 3941
5	14,599 8939	25	13,193 3961	45	12,674 4587
6	14,441 0994	26	13,158 9060	46	12,654 9527
7	14,306 7745	27	13,125 7020	47	12,635 8575
8	14,190 3595	28	13,093 6909	48	12,617 1563
9	14,087 6238	29	13,062 7886	49	12,598 8323
0,010	13,995 6786	0,030	13,032 9202	0,050	12,580 8707
11	13,912 4634	31	13,004 0179	51	12,563 2569
12	13,836 4571	32	12,976 0203	52	12,545 9777
13	13,766 5038	33	12,948 8719	53	12,529 0198
14	13,701 7060	34	12,922 5217	54	12,512 3718
15	13,641 3514	35	12,896 9237	55	12,496 0221
16	13,584 8663	36	12,872 0352	56	12,479 9631
17	13,531 7812	37	12,847 8178	57	12,464 1752
18	13,481 7072	38	12,824 2354	58	12,448 6583
19	13,434 3186	39	12,801 2553	59	12,433 4000

No. 2, c er positiv, $c = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

$\frac{1}{x}=\overset{3}{\overline{kr}}\,(c)$.	logbr. c.	$\frac{1}{x}=\overset{3}{\overline{kr}}\,(c)$.	logbr. c.	$\frac{1}{x}=\overset{3}{\overline{kr}}\,(c)$.	logbr. c.
0,060	12,418 3915	0,100	11,958 6073	0,300	10,921 8140
61	12,403 6250	105	11,914 2591	305	10,915 7899
62	12,389 0921	110	11,871 8916	310	10,900 0053
63	12,374 7857	115	11,831 3295	315	10,884 4530
64	12,360 6984	120	11,792 4196	320	10,869 1261
65	12,346 8246	125	11,755 0275	325	10,854 0173
66	12,333 1550	130	11,719 0348	330	10,839 1206
67	12,319 6860	135	11,684 3365	335	10,824 4291
68	12,306 4109	140	11,650 8391	340	10,809 9374
69	12,293 3211	145	11,618 4585	345	10,795 6395
0,070	12,280 4202	150	11,587 1196	350	10,781 5302
71	12,267 6939	155	11,556 7546	355	10,767 6039
72	12,255 1402	160	11,527 3020	360	10,753 8561
73	12,242 7545	165	11,498 7063	365	10,740 2815
74	12,230 5323	170	11,470 9163	370	10,726 8760
75	12,218 4689	175	11,443 8861	375	10,713 6347
76	12,206 5605	180	11,417 5730	380	10,700 5537
77	12,194 8029	185	11,391 9382	385	10,687 6288
78	12,183 1920	190	11,366 9458	390	10,674 8560
79	12,171 7244	195	11,342 5629	395	10,662 2316
0,080	12,160 3962	0,200	11,318 7588	0,400	10,649 7520
81	12,149 2043	205	11,295 5052	405	10,637 4137
82	12,138 1449	210	11,272 7760	410	10,625 2131
83	12,127 2153	215	11,250 5467	415	10,613 1474
84	12,116 4121	220	11,228 7948	420	10,601 2131
85	12,105 7325	225	11,207 4989	425	10,589 4073
86	12,095 1732	230	11,186 6393	430	10,577 7270
87	12,084 7319	235	11,166 1972	435	10,566 1695
88	12,074 4057	240	11,146 1559	440	10,554 7321
89	12,064 1921	245	11,126 4984	445	10,543 4122
0,090	12,054 0885	250	11,107 2100	450	10,532 2070
91	12,044 0924	255	11,088 2759	455	10,521 1142
92	12,034 2018	260	11,069 6829	460	10,510 1315
93	12,024 4140	265	11,051 4177	465	10,499 2564
94	12,014 7269	270	11,033 4687	470	10,488 4869
95	12,005 1387	275	11,015 8244	475	10,477 8208
96	11,995 6470	280	10,998 4740	480	10,467 2559
97	11,986 2500	285	10,981 4071	485	10,456 7901
98	11,976 9455	290	10,964 6143	490	10,446 4215
99	11,967 7319	295	10,948 0862	495	10,436 1484

No. 2, c er positiv, $c = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}$.

$\frac{1}{x} = \overset{3}{\mathrm{kr}}$ (c).	logbr. c.	$\frac{1}{x} = \overset{3}{\mathrm{kr}}$ (c).	logbr. c.	$\frac{1}{x} = \overset{3}{\mathrm{kr}}$ (c).	logbr. c.
0,500	10,425 9687	0,675	10,117 3776	0,850	9,874 0905
505	10,415 8807	680	10,109 6729	855	9,867 7239
510	10,405 8827	685	10,102 0189	860	9,861 4901
515	10,395 9730	690	10,094 4151	865	9,855 2890
520	10,386 1498	695	10,086 8607	870	9,849 1198
525	10,376 4116	0,700	10,079 3551	875	9,842 9825
530	10,366 7568	705	10,071 8974	880	9,836 8768
535	10,357 1840	710	10,064 4873	885	9,830 8020
540	10,347 6917	715	10,057 1239	890	9,824 7582
545	10,338 2785	720	10,049 8066	895	9,818 7448
550	10,328 9429	725	10,042 5349	0,900	9,812 7614
555	10,319 6836	730	10,035 3081	905	9,806 8078
560	10,310 4994	735	10,028 1259	910	9,800 8838
565	10,301 3889	740	10,020 9874	915	9,794 9890
570	10,292 3505	745	10,013 8920	920	9,789 1232
575	10,283 3838	750	10,006 8394	925	9,783 2859
580	10,274 4869	755	9,999 8289	930	9,777 4769
585	10,265 6589	760	9,992 8601	935	9,771 6958
590	10,256 8989	765	9,985 9325	940	9,765 9425
595	10,248 2053	770	9,979 0453	945	9,760 2168
0,600	10,239 5774	775	9,972 1982	950	9,754 5182
605	10,231 0142	780	9,965 3908	955	9,748 8464
610	10,222 5145	785	9,958 6224	960	9,743 2015
615	10,214 0773	790	9,951 8928	965	9,737 5828
620	10,205 7016	795	9,945 2013	970	9,731 9904
625	10,197 3866	0,800	9,938 5475	975	9,726 4237
630	10,189 1314	805	9,931 9310	980	9,720 8826
635	10,180 9348	810	9,925 3514	985	9,795 3671
640	10,172 7962	815	9,918 8082	990	9,709 8765
645	10,164 7147	820	9,912 3008	995	9,704 4109
650	10,156 6893	825	9,905 8293	1,000	9,698 9700
655	10,148 7194	830	9,899 3927		
660	10,140 8041	835	9,892 9909		
665	10,132 9426	840	9,886 6236		
670	10,125 1339	845	9,880 2902		

Tabel

over

Funktionen x bestemt ved Ligningen $c = -\frac{x^3}{1-x}$.

No. 3, c er negativ.

$x = \sqrt[3]{(c)}$.	logbr. c.	$x = \sqrt[3]{(c)}$.	logbr. c.	$x = \sqrt[3]{(c)}$.	logbr. c.
— 0,000	$-\infty_n$	— 0,040	5,823 9088_n	— 0,080	6,745 4822_n
1	1,000 4345_n	41	5,856 5331	81	6,762 1395
2	1,903 9595	42	5,888 3824	82	6,778 5990
3	2,432 6687	43	5,919 4936	83	6,794 8650
4	2,807 9207	44	5,949 9002	84	6,810 9424
5	3,099 0869	45	5,979 6341	85	6,826 8356
6	3,337 0675	46	6,008 7250	86	6,842 5493
7	3,538 3448	47	6,037 2008	87	6,858 0871
8	3,712 7583	48	6,065 0867	88	6,873 4533
9	3,866 6538	49	6,092 4078	89	6,888 6516
— 0,010	4,004 3648	— 0,050	6,119 1864	— 0,090	6,903 6861
11	4,128 9818	51	6,145 4444	91	6,918 5603
12	4,242 7867	52	6,171 2016	92	6,933 2776
13	4,347 5130	53	6,196 4777	93	6,947 8414
14	4,444 5071	54	6,221 2903	94	6,962 2555
15	4,534 8377	55	6,245 6563	95	6,976 5222
16	4,619 3649	56	6,269 5920	96	6,990 6452
17	4,698 7932	57	6,293 1130	97	7,004 6273
18	4,773 7060	58	6,316 2331	98	7,018 4718
19	4,844 5918	59	6,338 9664	99	7,032 1808
— 0,020	4,911 8639	— 0,060	6,361 3260	— 0,100	7,045 7575
21	4,975 8752	61	6,383 3238	105	7,111 7449
22	5,036 9292	62	6,404 9723	110	7,174 7881
23	5,095 2888	63	6,426 2819	115	7,235 1501
24	5,151 1838	64	6,447 2642	120	7,293 1609
25	5,204 8154	65	6,467 9286	125	7,348 7219
26	5,256 3609	66	6,488 2848	130	7,402 3109
27	5,305 9786	67	6,508 3428	135	7,453 9853
28	5,353 8077	68	6,528 1108	140	7,503 8855
29	5,399 9748	69	6,547 5976	145	7,552 1379
— 0,030	5,444 5922	— 0,070	6,566 8111	150	7,598 8550
31	5,487 7613	71	6,585 7592	155	7,644 1384
32	5,529 5746	72	6,604 4495	160	7,698 0807
33	5,570 1152	73	6,622 8890	165	7,730 7652
34	5,609 4596	74	6,641 0841	170	7,772 2686
35	5,647 6767	75	6,659 0422	175	7,812 6601
36	5,684 8305	76	6,676 7688	180	7,852 0036
37	5,720 9788	77	6,694 2704	185	7,890 3575
38	5,756 1757	78	6,711 5529	190	7,927 7658
39	5,790 4704	79	6,728 6217	195	7,964 3079

No. 3, c er negativ, $c = -\frac{x^3}{1-x}$.

$x = \sqrt[3]{(c)}$.	logbr. c.	$x = \sqrt[3]{(c)}$.	logbr. c.	$x = \sqrt[3]{(c)}$.	logbr. c.
— 0,200	8,000 0000$_n$	— 0,425	9,125 4989$_n$	— 0,650	9,894 6722$_n$
205	8,034 8946	430	9,144 5306	655	9,910 9048
210	8,069 0308	435	9,163 4195	660	9,927 1528
215	8,102 4458	440	9,182 1701	665	9,943 4200
220	8,135 1735	445	9,200 7870	670	9,959 7105
225	8,167 2458	450	9,219 2748	675	9,976 0280
230	8,198 6927	455	9,237 6377	680	9,992 3767
235	8,229 5423	460	9,255 8796	685	10,008 7612
240	8,259 8200	465	9,274 0052	690	10,025 1856
245	8,289 5513	470	9,292 0178	795	10,041 6546
250	8,318 7587	475	9,309 9215	— 0,700	10,058 1727
255	8,347 4643	480	9,327 7203	705	10,074 7453
260	8,375 6882	485	9,345 4179	710	10,091 3769
265	8,403 4504	490	9,363 0181	715	10,108 0731
270	8,430 7685	495	9,380 5242	720	10,124 8395
275	8,457 6601	— 0,500	9,397 9400	725	10,141 6813
280	8,484 1415	505	9,415 2690	730	10,158 6049
285	8,510 2287	510	9,432 5145	735	10,175 6160
290	8,535 9357	515	9,449 6799	740	10,192 7218
295	8,561 2769	520	9,466 7687	745	10,209 9287
— 0,300	8,586 2659	525	9,483 7843	750	10,227 2139
305	8,610 9146	530	9,500 7298	755	10,244 6749
310	8,635 2360	535	9,517 6084	760	10,262 2296
315	8,659 2412	540	9,534 4236	765	10,279 9163
320	8,682 9411	545	9,551 1781	770	10,297 7443
325	8,706 3464	550	9,567 8756	775	10,315 7226
330	8,729 4669	555	9,584 5190	780	10,333 8611
335	8,752 3128	560	9,601 1113	785	10,352 1706
340	8,774 8928	565	9,617 6559	790	10,370 6620
345	8,797 2160	570	9,634 1562	795	10,389 3474
350	8,819 2906	575	9,650 6145	— 0,800	10,408 2400
355	8,841 1255	580	9,667 0347	805	10,427 3531
360	8,862 7275	585	9,683 4196	810	10,446 7014
365	8,884 1050	590	9,699 7721	815	10,466 3011
370	8,905 2646	595	9,716 0960	820	10,486 1692
375	8,926 2139	— 0,600	9,732 3939	825	10,506 3237
380	8,946 9591	605	9,748 6691	830	10,526 7854
385	8,967 5070	610	9,764 9218	835	10,547 5756
390	8,987 8640	615	9,781 1646	840	10,568 7179
395	9,008 0359	620	9,797 3915	845	10,590 2384
— 0,400	9,028 0287	625	9,813 6087	850	10,612 1654
405	9,047 8480	630	9,829 8198	855	10,634 5303
410	9,067 4997	635	9,846 0282	860	10,657 3675
415	9,086 9884	640	9,862 2375	865	10,680 7145
420	9,106 3199	645	9,878 4507	870	10,704 6145

No. 3, c er negativ $c = -\frac{x^3}{1-x}$.

$x = \sqrt[3]{r}$ (c).	logbr. c.	$x = \sqrt[3]{r}$ (c).	logbr. c.	$x = \sqrt[3]{r}$ (c).	logbr. c.
— 0,875	10,729 1143_n	— 0,935	11,099 5214_n	— 0,975	11,569 0738_n
880	10,754 2669	36	11,107 6474	76	11,588 1382
885	10,780 1321	37	11,115 8783	77	11,607 9560
890	10,806 7773	38	11,124 2167	78	11,628 5940
895	10,834 2797	39	11,132 6670	79	11,650 1288
— 0,900	10,862 7275	— 0,940	11,141 2324	— 0,980	11,672 6483
1	10,868 5392	41	11,149 9168	81	11,696 2534
2	10,874 3934	42	11,158 7247	82	11,721 0620
3	10,880 2917	43	11,167 6602	83	11,747 2116
4	10,886 2340	44	11,176 7280	84	11,774 8653
5	10,892 2222	45	11,185 9327	85	11,804 2173
6	10,898 2567	46	11,195 2795	86	11,835 5027
7	10,904 3390	47	11,204 7741	87	11,869 0082
8	10,910 4696	48	11,214 4216	88	11,905 0895
9	10,916 6503	49	11,224 2284	89	11,944 1962
— 0,910	10,922 8817	— 0,950	11,234 2008	— 0,990	11,986 9056
11	10,929 1652	51	11,244 3454	91	12,033 9786
12	10,935 5017	52	11,254 6695	92	12,086 4451
13	10,941 8931	53	11,265 1808	93	12,145 7496
14	10,948 3401	54	11,275 8874	94	12,214 0079
15	10,954 8444	55	11,286 7977	95	12,294 4993
16	10,961 4072	56	11,297 9210	96	12,392 7179
17	10,968 0298	57	11,309 2672	97	12,518 9643
18	10,974 7142	58	11,320 8472	98	12,696 3615
19	10,981 4615	59	11,332 6719	99	12,998 6965
— 0,920	10,988 2734	— 0,960	11,344 7536	— 1,000	$+\infty_n$
21	10,995 1517	61	11,357 1056		
22	11,002 0981	62	11,369 7417		
23	11,009 1144	63	11,382 6772		
24	11,016 2024	64	11,395 9285		
25	11,023 3638	65	11,409 5139		
26	11,030 6013	66	11,423 4524		
27	11,037 9162	67	11,437 7656		
28	11,045 3115	68	11,452 4762		
29	11,052 7888	69	11,467 6097		
— 0,930	11,060 3507	— 0,970	11,483 1938		
31	11,068 0000	71	11,499 2596		
32	11,075 7388	72	11,515 8409		
33	11,083 5700	73	11,532 9746		
34	11,091 4968	74	11,550 7037		

Om Ligningen af 5te Grad.

Af Dr. A. S. Guldberg.

(Foredraget i Mødet den 12te Mai 1871.)

1. I det Følgende skulle vi alene betragte de to trinomiske Ligninger af Formen:

$$x^5 + ax + b = 0 \text{ og } x^5 + ax^4 + b = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)^{1}$$

Den sidste af disse kan ved Substitutionen $x = \frac{1}{y}$ reduceres til den førstes Form; man erholder nemlig ved at indsætte $x = \frac{1}{y}$:

$$x^5 + ax^4 + b = \frac{1}{y^5} + a \cdot \frac{1}{y^4} + b = 0, \text{ hvoraf:}$$

$$1 + ay + by^5 = 0 \text{ eller } y^5 + \frac{a}{b} y + \frac{1}{b} = 0.$$

Sætter man i Ligningen $x^5 + ax + b = 0$ for x Værdien $\frac{b}{a} y$, faaes: $\frac{b^5}{a^5} y^5 + a \cdot \frac{b}{a} y + b = 0$ eller $y^5 + \frac{a^5}{b^4} y + \frac{a^5}{b^4} = 0$.

Sættes videre for Kortheds Skyld $\frac{a^5}{b^4} = c$, saa faaes:

$$y^5 + cy + c = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Denne sidste Ligning indeholder alene Koefficienten c, der kan antage alle mulige reelle Værdier mellem $+\infty$ og $-\infty$. Betegner c' Talværdien af c, saa kan enhver trinomisk Ligning af Formerne (1) henføres til følgende to:

$$y^5 + c'y + c' = 0 \text{ og } y^5 - c'y - c' = 0.$$

Er nemlig i Ligningen $x^5 + ax + b = 0$ Koefficienterne a og b begge positive, saa er ogsaa c positiv, og Ligningen faar ved den ovennævnte Substitution Formen $y^5 + c'y + c' = 0$. Er a og b begge negative, saa er ogsaa c negativ og Ligningen erholder Formen $y^5 - c'y - c' = 0$. Er a positiv og b negativ eller omvendt, vil Substitutionen $x = -z$ føre Ligningen over i en af de

[1] Som bekjendt kan den almindelige Ligning af 5te Grad reduceres til en af disse Former.

to nævnte Former $x^5 + ax + b = 0$ og $x^5 - ax - b = 0$. Er f. Ex. Ligningens Form $x^5 - ax + b = 0$, hvor a og b ere begge positive, saa gaar denne Ligning ved Substitutionen $x = -z$ over i følgende:

$$-z^5 + az + b = 0 \text{ eller } z^5 - az - b = 0,$$

som atter ved Substitutionen $z = \frac{b}{a}y$ giver:

$$y^5 - \frac{a^5}{b^4}y - \frac{a^5}{b^4} = 0 \text{ eller } y^5 - c'y - c' = 0,$$

naar $\frac{a^5}{b^4}$ sættes lig c'.

2. Vi skulle nøiere betragte Fundamentalligningen $y^5 + cy + c = 0$ eller (forat undgaa det negative Mærke) $y^5 - cy - c = 0$. Af sidste Ligning erholdes, naar samme opløses med Hensyn paa c:

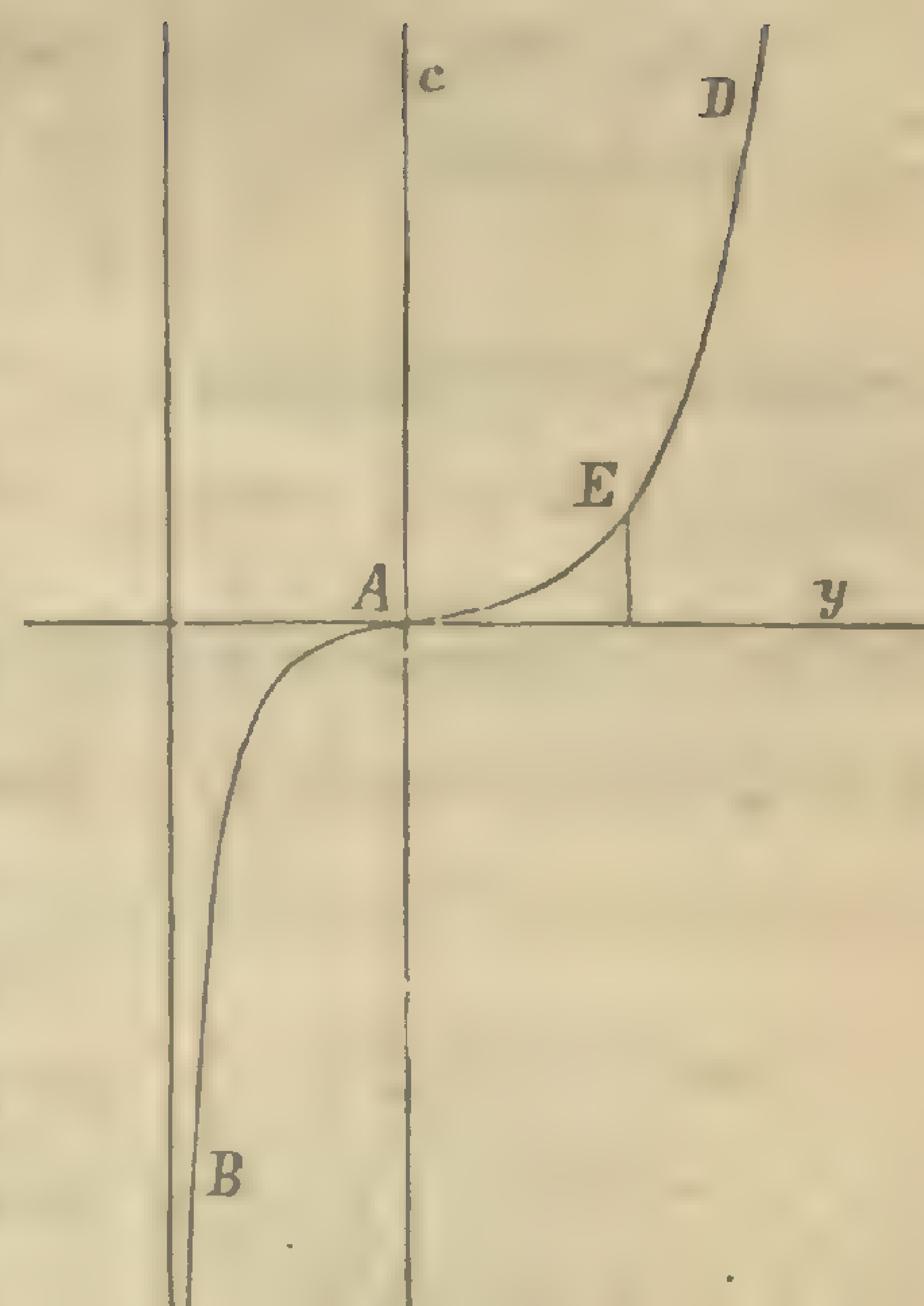
$$c = \frac{y^5}{1+y}.$$

Giver man efterhaanden y Værdierne 0, 1, 2, 3 o. s. v., voxer c fra Nul og nærmer sig for meget store Værdier af y til $+\infty$. Giver man y negative Værdier fra 0 til -1, aftager c fra 0 og nærmer sig til $-\infty$. Giver man y negative Værdier, der i Talværdi overstige 1, saa bliver c positiv. Sættes $y = -(1+\varepsilon)$, hvor ε er en uendelig lille Størrelse, bliver c lig $+\infty$; lader man ε voxe, aftager c, indtil den naar sit Minimum for $y = -\frac{5}{4}$, nemlig $c = \frac{5^5}{4^4} = 12{,}207 \ldots$, og lader man fremdeles y voxe i Talværdi, voxer stadigt c og nærmer sig til $+\infty$ for meget store negative Værdier af y.

Geometrisk representeres Funktionen $c = \frac{y^5}{1+x}$ ved to adskilte Kurvegrene, der begge have en fælles Assymptote i en ret Linie parallel c-axen i Afstanden -1 fra Koordinaternes Begyndelsespunkt. Hosstaaende Figur viser den ene af Kurvegrenenes Form. Ligesom c er en Funktion af y, saaledes er omvendt y en Funktion af c. Vi ville for Kortheds Skyld betegne denne Funktion med Mærket $\overset{5}{\mathrm{r}}$, saaledes altsaa, at af Ligningen

$$c = \frac{y^5}{1+y} \text{ eller } y^5 - cy - c = 0$$

følger: $$y = \overset{5}{\mathrm{r}}(c).$$



Af det forhen sagte følger, at til enhver negativ Værdi af c, liggende mellem 0 og $-\infty$, hører en negativ Værdi af y, liggende mellem 0 og -1. Til enhver positiv Værdi af c mellem 0 og 12,207... hører fremdeles en positiv Værdi af y, og endelig hører til enhver positiv Værdi af c mellem 12,207... og $+\infty$ tre reelle Værdier af y, hvoraf en er positiv og to negative, begge de sidste i Talværdi større end Enheden. Geometrisk seet er dette de forskjellige Skjæringspunkter, der erholdes mellem Kurvegrenene og rette Linier parallele y-axen. Drages disse Paralleler nedenfor y-axen, erholdes kun et Skjæringspunkt, drages de ovenfor samme, erholdes dels et dels tre Skjæringspunkter (to Skjæringspunkter, naar Parallelen berører den til venstre liggende Gren, der i Figuren ei er optegnet).

3. Beregner man en Tabel for de sammenhørende Værdier af y og c, saa kan man ved Hjælp af samme i enhver trinomisk Ligning af Formerne

$$y^5 + ay + b = 0 \text{ og } y^5 + ay^4 + b = 0$$

bestemme en reel Rod.

Den efterfølgende Tabel er delt i tre Afsnit, betegnede med No. 1, No. 2 og No. 3. Tabel No. 1 er beregnet efter Formelen $c = \frac{x^5}{1+x}$, idet man giver x efterhaanden Værdier fra 0 til $+1$; c voxer da fra 0 til $+\frac{1}{2}$, følgelig svarer denne Tabel til Kurvegrenen A E. Man finder i Tabellen beregnet log. brig. c, der er bekvemmere for den Brug, man skal gjøre af Tabellen. Værdierne af x eller $\sqrt[5]{(c)}$ ere 0,000, 0,001, 0,002, o. s. v. indtil 0,100, derpaa 0,105, 0,110, 0,115 o. s. v. indtil 1,000. Medens $\sqrt[5]{(c)}$ gaar fra 0 til 1, gaar c fra 0 til $\frac{1}{2}$ og følgelig log c fra $-\infty$ til $\log \frac{1}{2} = 0{,}698\,9700 - 1$.

Tabel No. 2, der svarer til Kurvegrenen E D, er beregnet efter Formelen $c = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^4\left(1+\frac{1}{x}\right)} \left(= \frac{x^5}{1+x}\right)$. Her er beregnet logbr. c svarende til Værdier af $\frac{1}{x}$, der gaar fra 0 til + 1 aldeles paa samme Vis som i Tabel No. 1. For x er, som tidligere nævnt, indført Betegnelsen $\overset{5}{\overline{\mathbf{r}}}(c)$; for $\frac{1}{x}$ er valgt Betegnelsen $\overset{5}{\overline{\mathbf{kr}}}(c)$ (den konjugerede Rod). Man har altsaa stedse

$$\overset{5}{\overline{\mathbf{r}}}(c) \,.\, \overset{5}{\overline{\mathbf{kr}}}(c) = 1.$$

Da i Tabellen $\frac{1}{x}$ gaar fra 0 til + 1, saa gaar samtidigt x fra $+\infty$ til + 1 og c fra $+\infty$ til $\frac{1}{2}$, følgelig log c fra $+\infty$ til $\log \frac{1}{2} = 0{,}698\,9700 - 1$.

De to Tabeller No. 1 og No. 2 give altsaa de korresponderende Værdier mellem c og y for Kurvegrenen A E D.

Tabel No. 3, der svarer til Kurvegrenen A B, er beregnet efter Formelen $c = \frac{x^5}{1+x}$, idet man giver x Værdier fra 0 til — 1. Her er c negativ, og derfor findes i Tabellen beregnet den briggiske Logarithme til Talværdien af c; Mærket *n* ved Logarithmens Mantisse antyder, at c er negativ. Jeg har beregnet logbr. c for Værdier af x fra 0,000 til 0,100 for hver Tusindedel, derpaa for hver femte Tusindedel indtil 0,900, hvorfra atter Beregningen har fundet Sted for hver Tusindedel.

4. Ligningen $x^5 + ax + b = 0$

gaar, som før vist, ved Substitutionen $x = \frac{b}{a} y$ over i

$$y^5 + \frac{a^5}{b^4} y + \frac{a^5}{b^4} = 0$$

eller, naar man sætter $\frac{a^5}{b^4} = - c$:

$$y^5 - cy - c = 0.$$

Heraf følger: $y = \overset{5}{\overline{\mathbf{r}}}(c)$.

Indsættes Værdien for $c = - \frac{a^5}{b^4}$ og for $y = \frac{a}{b} x$, faaes:

$$\frac{a}{b} x = \overset{5}{\overline{\mathbf{r}}}\left(- \frac{a^5}{b^4}\right) \text{ eller } x = \frac{b}{a} \overset{5}{\overline{\mathbf{r}}}\left(- \frac{a^5}{b^4}\right).$$

Af det tidligere anførte (1) følger, at denne sidste Formel gjælder for alle positive og negative Værdier af a og b.

Ligningen $$x^5 + ax^4 + b = 0$$

gaar ved Substitutionen $x = \frac{1}{y}$ som før vist (1) over i

$$1 + ay + by^5 = 0 \text{ eller } y^5 + \frac{a}{b}y + \frac{1}{b} = 0.$$

Af denne sidste Ligning faaes umiddelbart ifølge det netop udviklede:

$$y = \frac{\left(\frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{a}{b}\right)} \overset{5}{\mathbf{r}}\left[-\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^5}{\left(\frac{1}{b}\right)^4}\right] = \frac{1}{a}\overset{5}{\mathbf{r}}\left[-\frac{a^5}{b}\right].$$

Indsættes Værdien af y i Formelen $x = \frac{1}{y}$, faaes

$$x = \frac{a}{\overset{5}{\mathbf{r}}\left[-\frac{a^5}{b}\right]} = a\,.\,\overset{5}{\mathbf{kr}}\left[-\frac{a^5}{b}\right].$$

Man har altsaa en Rod i Ligningen

$$x^5 + ax + b = 0$$

udtrykt ved: $$x = \frac{b}{a}\overset{5}{\mathbf{r}}\left[-\frac{a^5}{b^4}\right],$$

og en Rod i Ligningen

$$x^5 + ax^4 + b = 0$$

udtrykt ved: $$x = a\,.\,\overset{5}{\mathbf{kr}}\left[-\frac{a^5}{b}\right].$$

5. Som 1ste Exempel være Ligningen $x^5 - 3x - 5 = 0$.

Her er $a = -3$ og $b = -5$. Formelen $x = \frac{b}{a}\overset{5}{\mathbf{r}}\left[-\frac{a^5}{b^4}\right]$

bliver følgelig: $$x = \tfrac{5}{3}\overset{5}{\mathbf{r}}\left[\frac{3^5}{5^4}\right].$$

$\log 3 = 0{,}477\,1213$	$\log 3^5 = 2{,}385\,6065$
$\log 5 = 0{,}698\,9700$	$\log 5^4 = 2{,}795\,8800$

$$\log\left[\frac{3^5}{5^4}\right] = 0{,}589\,7265 - 1$$

Tabel No. 1 giver for $\log c = 0{,}5882\,394 - 1$ Værdien $\overset{5}{\mathbf{r}}\,(c) = 0{,}945$.

Differents 14 871.

Forat finde de to følgende Decimaler i Roden interpoleres som sædvanligt i en Logarithmetabel. Man finder i Tabellen Differentsen svarende til Argumenterne 0,945 og 0.950 at være 103440, altsaa maa Tilvæxten for 1 i 3die Decimal være 20688 (erholdes ved at multiplicere 103440 med 2 og dividere med 10). Altsaa bliver den søgte Tilvæxt $\frac{14871}{20688} = 0,72$, naar blot 2 Decimaler medtages. Den søgte Værdi af $\overset{5}{\mathrm{r}}\left[\frac{3^5}{5^4}\right]$ bliver følgelig 0,94572. Indsættes denne Værdi, faaes:

$$x = \tfrac{5}{3} \times 0,94572 = \frac{9,4572}{6} = 1,5762.$$

Ønsker man Roden udtrykt med flere Decimaler, beregner man logarithmisk $c = \frac{x^5}{x+1}$ svarende til 0,94571 og 0,94572. Man faar:

$\log 0,94571 = 0,975\,7580 - 1$	$\log 0,94572 = 0,975\,7626 - 1$
5	5
$0,878\,7900 - 1$	$0,878\,8130 - 1$
$\log 1,94571 = 0,280\,0781$	$\log 1,94572 = 0,289\,0804$
$0,589\,7119 - 1$	$0,589\,7326 - 1$
$\log \left[\frac{3^5}{5^4}\right] = 0,589\,7265 - 1$	$0,589\,7119 - 1$
Dif. $= 146.$	Dif. $= 207.$

Det søgte Tillæg til 0,94571 bliver følgelig $\frac{146}{207} = 0,705$ eller, naar kun 2 Decimaler beholdes, 0,71; følgelig bliver med 7 Decimaler $\overset{5}{\mathrm{r}}\left[\frac{3^5}{5^4}\right] = 0,945\,7171$ [1] og altsaa: $x = \frac{5}{3} \,.\, 0,945\,7171 = 1,576\,1952$, som er den søgte Rod i Ligningen $x^5 - 3x - 5 = 0$ med 7 Decimaler.

2 *Ex.* $x^5 - 7x + 2 = 0.$

Her er $a = -7$, $b = +2$; følgelig bliver

$$x = \frac{b}{a}\overset{5}{\mathrm{r}}\left[-\frac{a^5}{b^4}\right] = -\tfrac{2}{7}\,\overset{5}{\mathrm{r}}\left[\frac{7^5}{2^4}\right].$$

[1] Beregnes forat prøve denne Værdis Nøiagtighed $c = \frac{x^5}{x+1}$ med Værdien $x = 0,945\,7171$, faaes $\log c = 0,589\,7268 - 1$, der kun skiller sig om 3 i 7de Decimalsted fra $\log \left[\frac{3^5}{5^4}\right] = 0,589\,7265 - 1$.

$$\log 7 = 0{,}845\,0980 \quad\Big|\quad \log 7^5 = 4{,}225\,4900$$
$$\log 2 = 0{,}301\,0300 \quad\Big|\quad \log 2^4 = 1{,}204\,1200$$
$$\log\left[\frac{7^5}{2^4}\right] = 3{,}021\,3700$$

Tabel No. 2 giver for $\log c = 3{,}010\,0185$ Værdien $\overset{5}{\mathbf{kr}}(c) = 0{,}170.$

$$\text{Dif.} = 11\,3515.$$

Fremdeles findes af Tabellen for 5 Enheder i 3die Decimalsted Differentsen 537200 (svarende til Argumenterne 0,165 og 0,170), altsaa for 1 Enhed Differentsen 107440. Bemærkes her, at, naar log c voxer, aftager $\overset{5}{\mathbf{kr}}(c)$ (ligesom den trigonometriske Cotangens), saa bliver i dette Tilfælde det søgte Fradrag $= \frac{113515}{107440} = 1{,}06$, naar kun 2 Decimaler medtages. Man faar altsaa

$$\overset{5}{\mathbf{kr}}\left[\frac{7^5}{2^4}\right] = 0{,}170 - 0{,}00106 = 0{,}16894.$$ [1]

Erindres, at $\overset{5}{\mathbf{kr}}(c) \,.\, \overset{5}{\mathbf{r}}(c) = 1$ (se 3), faaes:

$$x = -\tfrac{2}{7}\,\overset{5}{\mathbf{r}}\left[\frac{7^5}{2^4}\right] = -\frac{2}{7\,\overset{5}{\mathbf{kr}}\left[\frac{7^5}{2^4}\right]} = -\frac{2}{7\,.\,0{,}16894}.$$

[1] Beregnes $\log c = \log\left[\frac{x^5}{x+1}\right] = \log\left[\frac{1}{\frac{1}{x^4}\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right] = -\left[\log\left(\frac{1}{x}\right)^4 + \log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$ (se 3) faaes, idet $\frac{1}{x}$ sættes $= 0{,}16894$ og $0{,}16893$:

4. log 0,16894 = 0,910 9300 — 4	4. log 0,16893 = 0,910 8272 — 4
log 1,16894 = 0,067 7922	log 1,16893 = 0,067 7885
0,978 7272 — 4	0,978 6157 — 4
Dek. Komplement = 3,021 2778	Dek. Komplement = 3,021 3843
3,021 3700	3,021 2778
Dif. = 922.	Dif. = 1065.

Følgelig bliver Fradraget fra Værdien 0,16894 $\frac{922}{1065} = 0{,}866$; altsaa bliver $\overset{5}{\mathbf{kr}}\left[\frac{7^5}{2^4}\right] = 0{,}168\,9313.$

Deraf faaes: $x = -\tfrac{2}{7}\,.\,\overset{5}{\mathbf{r}}\left[\frac{7^5}{2^4}\right] = -\frac{2}{7\,\overset{5}{\mathbf{kr}}\left[\frac{7^5}{2^4}\right]} = -1{,}69131.$

$$\log 7 = 0{,}845\,0980$$
$$\log 0{,}16894 = 0{,}227\,7325 - 1$$
$$0{,}072\,8305$$
$$\log 2 = 0{,}301\,0300$$
$$0{,}228\,1995.$$

Num . log . 0,228 1995 er 1,6912.

Den søgte Værdi for Roden bliver følgelig $x = -1{,}6912$. Den nøiagtige Værdi (se Noten) med 4 Decimaler er $x = -1{,}6913$.

Anm. I dette Tilfælde erholdes følgelig kun 3 rigtige Decimaler i Værdien for x, uagtet Værdien for $\overset{5}{\mathsf{kr}}\left(\frac{7^5}{2^4}\right) = 0{,}16894$ er mindre end 0,00001 for stor. Grunden hertil er, at Feilen i $\overset{5}{\mathsf{kr}}\left(\frac{7^5}{2^4}\right)$ i Værdien for x bliver divideret med $\left[\overset{5}{\mathsf{kr}}\left(\frac{7^5}{2^4}\right)\right]^2$, og da denne er mindre end 1, forøges Feilen i x. Sættes nemlig den sande Værdi af $\overset{5}{\mathsf{kr}}\left(\frac{7^5}{2^4}\right)$ lig α og Feilen i den fundne Værdi lig ε, saa er

$$x = \tfrac{2}{7} \cdot \frac{1}{\alpha+\varepsilon} = \tfrac{2}{7} \cdot \frac{1}{\alpha\left(1+\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)} \doteq \frac{2}{7\alpha}\left[1 - \frac{\varepsilon}{\alpha}\right] = \tfrac{2}{7} \cdot \frac{1}{\alpha} - \tfrac{2}{7} \cdot \frac{\varepsilon}{\alpha^2},$$

naar de høiere Potentser af $\frac{\varepsilon}{\alpha}$ sættes ud af Betragtning; Feilen i x bliver følgelig $\frac{2}{7} \cdot \frac{\varepsilon}{\alpha^2}$. Sættes $\varepsilon = 0{,}00001$ og $\alpha \doteq 0{,}16893$, saa bliver $\frac{2}{7} \cdot \frac{\varepsilon}{\alpha^2} = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{16893 . 0{,}16893} = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2853{,}7\ldots} = \frac{1}{9987{,}6\ldots}$ eller lidt over 0,0001. Den ovenfor fundne Værdi $x = -1{,}6912$ er altsaa omtrent 0,0001 for liden, og følgelig den rette Værdi $-1{,}6913$, hvilket stemmer med den oven angivne Værdi for x.

3 Ex. $x^5 + 4x + 2 = 0.$ [1]

Her er $a = 4$ og $b = 2$; følgelig bliver:

$$x = \frac{b}{a}\overset{5}{\mathsf{r}}\left[-\frac{a^5}{b^4}\right] = \tfrac{2}{4}\overset{5}{\mathsf{r}}\left[-\frac{4^5}{2^4}\right] = \tfrac{1}{2}\overset{5}{\mathsf{r}}\,[-64].$$

Man finder i Logarithmetabellen

$$\log(-64) = 1{,}806\,1800_n$$

Tabel No. 3 giver for $\log(c) = 1{,}791\,0897_n$ Værdien $-0{,}985$

$$\text{Dif.} = 15\,0903$$

Af Tabel No. 3 findes videre $\text{Dif.} = 32\,1668$ $\quad \frac{15\,0903}{32\,1668} = 0{,}47$

Den søgte Værdi af $\overset{5}{\mathsf{r}}\,[-64]$ bliver altsaa $-0{,}98547$.

[1] Denne Ligning findes behandlet i Bertrands Calcul différentiel pag. 321.

Indsættes denne Værdi, erholdes:

$$x = \tfrac{1}{2}\overset{5}{\mathbf{r}}\,[-64] = \tfrac{1}{2}\,.\,-0{,}98547 = -0{,}49274.$$ [1]

4 Ex. $x^5 + 3x^4 - 20 = 0$.

Her er $a = 3$ og $b = -20$. Indsættes disse Værdier i Formelen

$$x = a\,\overset{5}{\mathbf{kr}}\left[-\frac{a^5}{b}\right] \text{ (se 4), faaes:}$$

$$x = 3\,\overset{5}{\mathbf{kr}}\left[\frac{3^5}{20}\right].$$

Nu findes af Logarithmetabellen:

$$\begin{array}{rl} \log 3^5 = & 2{,}385\,6065 \\ \log 20 = & 1{,}301\,0300 \\ \hline & 1{,}084\,5765 \end{array}$$

Tabel No. 2 giver for log (c) $= 1{,}085\,3067$ Værdien 0,485.

$$\begin{array}{rl} \text{Dif.} = & 7302 \\ \hline \text{Af Tabel No. 2 findes fremdeles Dif.} = & 38554{,}8 \end{array} = 0{,}18.$$

Tillægget til 0,485 bliver altsaa 0,00018, følgelig

$$\overset{5}{\mathbf{kr}}\left[\frac{3^5}{20}\right] = 0{,}48518.$$

[1] Beregnes log c efter Formel $c = \frac{-x^5}{1-x}$ (se 3), idet man sætter $x = 0{,}98547$ og 0,98548, faaes:

$$\begin{array}{rl} \log 0{,}98547 = & 0{,}993\,6434 - 1 \\ & 5 \\ \hline & 0{,}968\,2170 - 1 \\ \log 0{,}01453 = & 0{,}162\,2656 - 2 \\ \hline & 1{,}805\,9514 \\ & 1{,}806\,1800 \\ \hline \text{Dif.} = & 2286. \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log 0{,}98548 = & 0{,}993\,6478 - 1 \\ & 5 \\ \hline & 0{,}968\,2390 - 1 \\ \log 0{,}01452 = & 0{,}161\,9666 - 2 \\ \hline & 1{,}806\,2724 \\ & 1{,}805\,9514 \\ \hline \text{Dif.} = & 3210. \end{array}$$

Tillæg til 0,98547 bliver altsaa $\frac{2286}{3210} = 0{,}712$; følgelig $\overset{5}{\mathbf{r}}\,[-64] = -0{,}9854771$ og altsaa $x = -0{,}49273855$.

Indsættes denne Værdi i Formelen for x, faaes:

$$x = 3\,.\,\overset{5}{\mathbf{kr}}\left[\frac{3^5}{20}\right] = 3.\,0{,}48418 = 1{,}45554.$$ [1]

[1] Beregnes log c efter Formel $c = \dfrac{1}{\frac{1}{x^4}\left(1+\frac{1}{x}\right)}$, idet $\dfrac{1}{x}$ sættes lig 0,48518 og 0,48519, faaes:

$$\begin{array}{rl}
\log 0{,}48518 = & 0{,}685\ 9029 - 1 \\
 & \underline{\qquad\qquad\quad 4} \\
 & 0{,}743\ 6116 - 2 \\
\log 1{,}48518 = & \underline{0{,}171\ 7991\qquad} \\
 & 0{,}915\ 4107 - 2 \\
\text{Dek. Komplement} = & 1{,}084\ 5893 \\
 & \underline{1{,}084\ 5765\qquad} \\
 & \text{Dif.} = \ 128.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\log 0{,}48519 = & 0{,}685\ 9118 - 1 \\
 & \underline{\qquad\qquad\quad 4} \\
 & 0{,}743\ 6472 - 2 \\
\log 1{,}48719 = & \underline{0{,}171\ 8020\qquad} \\
 & 0{,}915\ 4492 - 2 \\
\text{Dek. Komplement} = & 1{,}084\ 5508 \\
 & \underline{1{,}084\ 5893\qquad} \\
 & \text{Dif.} = \ 385.
\end{array}$$

Tillæg $= \dfrac{128}{385} = 0{,}332$; altsaa bliver med 7 Decimaler $\overset{5}{\mathbf{kr}}\left(\dfrac{3^5}{20}\right) = 0{,}485\ 1833$, hvoraf følger $x = 3\,.\,0{,}485\ 1833 = 1{,}455\ 5499$.

Resumé

du mémoire

sur l'équation du 5^{me} degré,

par M. Axel S. Guldberg.

Soit l'équation $x^5 - cx - c = 0$; je désigne une racine de cette équation par $\overset{5}{\mathbf{r}}(c)$. Dans la table suivante on trouvera les valeurs de logbr. c correspondantes aux valeurs de x, positives et negatives de 0 à 1 et -1 (n^0 1 et n^0 3); dans le n^0 2 on trouvera les valeurs de logbr. c correspondantes aux valeurs de $\frac{1}{x}$ de 0 à 1. À l'aide de cette table on peut toujours trouver une racine réelle des équations suivantes:

$$x^5 + ax + b = 0 \text{ et } x^5 + ax^4 + b = 0.$$

Posant $x = \frac{b}{a} y$ dans la première équation, on aura:

$$\frac{b^5}{a^5} y^5 + by + b = 0 \text{ d'òu } y^5 + \frac{a^5}{b^4} y + \frac{a^5}{b^4} = 0;$$

$$\text{donc } \; y = \overset{5}{\mathbf{r}}\left[-\frac{a^5}{b^4}\right] \text{ et par suite}$$

$$x = \frac{b}{a} \overset{5}{\mathbf{r}}\left[-\frac{a^5}{b^4}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Posant $x = \frac{1}{y}$ dans l'équation $x^5 + ax^4 + b = 0$ on aura:

$$\frac{1}{y^5} + a \,.\, \frac{1}{y^4} + b = 0 \text{ d'òu } y^5 + \frac{a}{b} y + \frac{1}{b} = 0,$$

$$\text{d'òu l'on tire: } y = \frac{\left(\frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{a}{b}\right)} \overset{5}{\mathbf{r}} \left[\frac{-\left(\frac{a}{b}\right)^5}{\left(\frac{1}{b}\right)^4}\right] = \frac{1}{a} \overset{5}{\mathbf{r}}\left[-\frac{a^5}{b}\right].$$

Si l'on désigne $\frac{1}{\overset{5}{\mathbf{r}}(c)}$ par $\overset{5}{\mathbf{kr}}(c)$ (la racine conjuguée) on aura en substituant la valeur de y:

$$(2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad x = a \,.\, \overset{5}{\mathbf{kr}}\left[-\frac{a^5}{b}\right].$$

1 Ex. $x^5 + 4x + 2 = 0$; donc $x = \frac{2}{4} \overset{5}{\mathrm{r}} [-\frac{4^5}{2^4}] = \frac{1}{2} \overset{5}{\mathrm{r}} [-64]$.

On trouve: $\log(-64) = 1,806\,1800_n$

La table n° 3 donne pour $\log c = \underline{1,791\,0897_n}$ la valeur $-0,985$.

Dif. $= 15\,0903$.

On trouve de la table la différence 321668; on trouve $\frac{150903}{321668} = 0,47$.

La valeur cherchée de $\overset{5}{\mathrm{r}} [-64]$ sera $-0,98547$. Substituant cette valeur on aura: $x = \frac{1}{2} . -0,98547 = -0,49274$.

2 *Ex.* $x^5 + 3x^4 - 20 = 0$; donc $x = 3 \overset{5}{\mathrm{kr}} [\frac{3^5}{20}]$.

On trouve $\log(\frac{3^5}{20}) = 1,084\,5765$

La table n° 2 donne pour $\log(c) = \underline{1,085\,3067}$ la valeur 0,485.

Dif. $= 7302$.

La table donne la difference 38554,8; on trouve $\frac{7302}{38554,8} = 0,18$.

La valeur cherchée de $\overset{5}{\mathrm{kr}} [\frac{3^5}{20}]$ sera 0,48518. Substituant cette valeur on aura: $x = 3 . 0,48518 = 1,45554$.

Tabel

over

Funktionen x bestemt ved Ligningen $c = \frac{x^5}{1+x}$.

No. 1, c er positiv.

$x = \sqrt[5]{(c)}$.	logbr. c.	$x = \sqrt[5]{(c)}$.	logbr. c.	$x = \sqrt[5]{(c)}$.	logbr. c.
0,000	— ∞	0,040	0,993 2667—8	0,980	0,482 0262—6
1	0,999 5659-16	1	0,046 4688—7	1	0,508 5993—6
2	0,504 2823-14	2	0,098 3788—7	2	0,534 8422—6
3	0,384 3056-13	3	0,149 0582—7	3	0,560 7620—6
4	0,008 5663-12	4	0,198 5630—7	4	0 586 3672—6
5	0,492 6839-12	5	0,246 9462—7	5	0,611 6648—6
6	0,888 1585-12	6	0,294 2573—7	6	0,636 6627—6
7	0,222 4605-11	7	0,340 5428—7	7	0,661 3670—6
8	0,511 9895-11	8	0,385 8447—7	8	0,685 7846—6
9	0,767 3213-11	9	0,430 2050—7	9	0,709 9221—6
0,010	0,995 6786-11	0,050	0,473 6607—7	0,090	0,733 7860—6
1	0,202 2123-10	1	0,516 2483—7	1	0,757 3822—6
2	0,390 7255-10	2	0,558 0008—7	2	0,780 7164—6
3	0,564 1076-10	3	0,598 9511—7	3	0,803 7933—6
4	0,724 6020-10	4	0,639 1284—7	4	0,826 6222—6
5	0,873 9905-10	5	0,678 5610—7	5	0,849 2039—6
6	0,013 7063—9	6	0,717 2761—7	6	0,871 5454—6
7	0,144 9235—9	7	0,755 2995—7	7	0,893 6519—6
8	0,268 6147—9	8	0,792 6543—7	8	0,915 5282—6
9	0,385 5938—9	9	0,829 3640—7	9	0,937 1783—6
0,020	0,496 5498—9	0,060	0,865 4506—7	0,100	0,958 6073—6
1	0,602 0708—9	1	0,900 9336—7	5	0,062 5842—5
2	0,702 6626—9	2	0,935 8340—7	10	0,161 6405—5
3	0,798 7634—9	3	0,970 1692—7	15	0,256 2141—5
4	0,890 7560—9	4	0,003 9584—6	20	0,346 6880—5
5	0,978 9761—9	5	0,037 2174—6	25	0,433 3975—5
6	0,063 7191—8	6	0,069 9623—6	30	0,516 6386—5
7	0,145 2486—8	7	0,102 2096—6	35	0,596 6731—5
8	0,223 7969—8	8	0,133 9732—6	40	0,673 7351—5
9	0,299 5746—8	9	0,165 2678—6	45	0,748 0345—5
0,030	0,372 7693—8	0,070	0,196 1062—6	50	0,819 7587—5
1	0,443 5498—8	1	0,226 5020—6	55	0,889 0765—5
2	0,512 0703—8	2	0,256 4677—6	60	0,956 1420—5
3	0,578 4692—8	3	0,286 0148—6	65	0,021 0936—4
4	0,642 8740—8	4	0,315 1542—6	70	0,084 0586—4
5	0,705 3997—8	5	0,343 8980—6	75	0,145 1521—4
6	0,766 1527—8	6	0,372 2557—6	80	0,204 4805—4
7	0,825 2297—8	7	0,400 2378—6	85	0,262 1401—4
8	0,882 7204—8	8	0,427 8542—6	90	0,318 2210—4
9	0,938 7075—8	9	0,455 1141—6	95	0,372 8051—4

No. 1, c er positiv, $c = \frac{x^5}{1+x}$.

$x = \sqrt[5]{c}$.	logbr. c,	$x = \sqrt[5]{c}$.	logbr. c.	$x = \sqrt[5]{c}$.	logbr. c.
0,200	0,425 9688—4	0,400	0,864 1720—3	0,600	0,686 6365—2
5	0,477 7825—4	5	0,889 5987—3	5	0,703 3020—2
10	0,528 3111—4	10	0,914 7004—3	10	0,719 8231—2
15	0,577 6162—4	15	0,939 4811—3	15	0,736 2030—2
20	0,625 7537—4	20	0,963 9582—3	20	0,752 4435—2
25	0,672 7764—4	25	0,988 1296—3	25	0,768 5466—2
30	0,718 7339—4	30	0,012 0025—2	30	0,784 5149—2
35	0,763 6725—4	35	0,035 5946—2	35	0,800 3507—2
40	0,807 6343—4	40	0,058 9010—2	40	0,816 0562—2
45	0,850 6611—4	45	0,081 9322—2	45	0,831 6326—2
50	0,892 7900—4	50	0,104 6945—2	50	0,847 0831—2
55	0,934 0573—4	55	0,127 1940—2	55	0,862 4085—2
60	0,973 9960—4	60	0,149 4361—2	60	0,877 6114—2
65	0,014 1390—3	65	0,171 4274—2	65	0,892 6938—2
70	0,053 0153—3	70	0,193 1722—2	70	0,907 6575—2
75	0,091 1523—3	75	0,214 6760—2	75	0,922 5042—2
80	0,128 5800—3	80	0,235 9443—2	80	0,937 2342—2
85	0,165 3214—3	85	0,256 9820—2	85	0,951 8531—2
90	0,201 4003—3	90	0,277 7942—2	90	0,966 3588—2
95	0,236 8402—3	95	0,298 3848—2	95	0,980 7543—2
0,300	0,271 6631—3	0,500	0,318 7587—2	0,700	0,995 0411—2
5	0,305 8885—3	5	0,338 9205—2	5	0,009 2211—1
10	0,339 5372—3	10	0,358 8741—2	10	0,023 2954—1
15	0,382 6272—3	15	0,378 6234—2	15	0,037 2659—1
20	0,405 1761—3	20	0,398 1729—2	20	0,051 1341—1
25	0,437 2011—3	25	0,417 5267—2	25	0,064 9009—1
30	0,468 7179—3	30	0,436 6881—2	30	0,078 5684—1
35	0,499 7427—3	35	0,455 6606—2	35	0,092 1370—1
40	0,530 2897—3	40	0,474 4483—2	40	0,105 6093—1
45	0,560 3732—3	45	0,492 5540—2	45	0,118 9861—1
50	0,590 0062—3	50	0,511 4818—2	50	0,132 2685—1
55	0,619 2027—3	55	0,529 7346—2	55	0,145 4579—1
60	0,647 9736—3	60	0,547 8154—2	60	0,158 5553—1
65	0,676 3318—3	65	0,565 7277—2	65	0,171 5623—1
70	0,704 2879—3	70	0,583 4748—2	70	0,184 4802—1
75	0,731 8538—3	75	0,601 0584—2	75	0,197 3101—1
80	0,759 0389—3	80	0,618 4829—2	80	0,210 0530—1
85	0,785 8537—3	85	0,635 7502—2	85	0,222 7103—1
90	0,812 3082—3	90	0,652 8629—2	90	0,235 2825—1
95	0,838 4113—3	95	0,669 8243—2	95	0,247 7710—1

No. 1, c er positiv, $c = \frac{x^5}{1+x}$.

$x = \overset{5}{\mathbf{r}}\,(c)$.	logbr. c.	$x = \overset{5}{\mathbf{r}}\,(c)$.	logbr. c.	$x = \overset{5}{\mathbf{r}}\,(c)$.	logbr. c.
0,800	0,260 1775—1	0,875	0,437 0392—1	0,950	0,598 5834—1
5	0,272 5023—1	80	0,448 2557—1	55	0,608 8702—1
10	0,284 7464—1	85	0,459 4051—1	60	0,619 0999—1
15	0,296 9114—1	90	0,470 4882—1	65	0,629 2739—1
20	0,308 9981—1	95	0,481 5058—1	70	0,639 3923—1
25	0,321 0066—1	0,900	0,492 4589—1	75	0,649 4559—1
30	0,332 9394—1	5	0,503 3480—1	80	0,659 4653—1
35	0,344 7954—1	10	0,514 1736—1	85	0,669 4205—1
40	0,356 5787—1	15	0,524 9367—1	90	0,679 3229—1
45	0,368 2871—1	20	0,535 6378—1	95	0,689 1726—1
50	0,379 9228—1	25	0,546 2778—1	1,000	0,698 9700—1
55	0,391 4866—1	30	0,556 8572—1		
60	0,402 9796—1	35	0,567 3770—1		
65	0,414 4017—1	40	0,577 8378—1		
70	0,425 7549—1	45	0,588 2394—1		

Tabel

over

Funktionen $\frac{1}{x}$ bestemt ved Ligningen $c = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^4\left[1+\frac{1}{x}\right]}$

No. 2, c er positiv.

$\frac{1}{x} = \overset{5}{\mathbf{kr}}\,(c)$.	logbr. c.	$\frac{1}{x} = \overset{5}{\mathbf{kr}}\,(c)$.	logbr. c.	$\frac{1}{x} = \overset{5}{\mathbf{kr}}\,(c)$.	logbr. c.
0,000	$+\infty$	0,015	7,289 1688	0,030	6,078 6776
1	11,999 5659	6	7,176 6263	1	6,021 2945
2	10,795 0123	7	7,070 8834	2	5,965 7203
3	10,090 2139	8	6,971 1622	3	5,911 8441
4	9,590 0263	9	6,876 8114	4	5,859 5639
5	9,201 9539	0,020	6,787 2798	5	5,808 7877
6	8,884 7968	1	6,702 0971	6	5,759 4302
7	8,616 5785	2	6,620 8583	7	5,711 4144
8	8,384 1795	3	6,543 2132	8	5,664 6682
9	8,179 1388	4	6,468 8552	9	5,619 1261
0,010	7,995 6786	5	6,397 5161	0,040	5,574 7264
1	7,829 6780	6	6,328 9594	1	5,531 4137
2	7,678 0947	7	6,262 9744	2	5,489 1351
3	7,538 6170	8	6,199 3749	3	5,447 8417
4	7,409 4500	9	6,137 9926	4	5,407 4887

No. 2, c er positiv, $c = \dfrac{1}{(\frac{1}{x})^4[1 + \frac{1}{x}]}$.

$\frac{1}{x} = \overset{5}{\mathrm{kr}}(c)$.	logbr. c.	$\frac{1}{x} = \overset{5}{\mathrm{kr}}(c)$.	logbr. c.	$\frac{1}{x} = \overset{5}{\mathrm{kr}}(c)$.	logbr. c.
0,045	5,368 0337	0,085	4,246 8947	0,225	2,503 1339
6	5,329 4371	6	4,226 1762	30	2,463 1837
7	5,291 6617	7	4,205 6933	35	2,424 0614
8	5,254 6739	8	4,185 4403	40	2,385 7335
9	5,218 4401	9	4,165 4121	45	2,348 1662
0,050	5,282 9307	0,090	4,145 6035	50	2,311 3300
1	5,148 1165	1	4,126 0096	55	2,275 1955
2	5,113 9711	2	4,106 6262	60	2,239 7363
3	5,080 4680	3	4,087 4482	65	2,204 9259
4	5,047 5842	4	4,068 4711	70	2,170 7411
5	5,015 2967	5	4,049 6915	75	2,137 1590
6	4,983 5841	6	4,031 1046	80	2,104 1580
7	4,952 4254	7	4,012 7066	85	2,071 7173
8	4,921 8023	8	3,994 4933	90	2,039 8183
9	4,891 6960	9	3,976 4615	95	2,008 4422
0,060	4,862 0889	0,100	3,958 6073	0,300	1,977 5714
1	4,832 9654	5	3,871 8805	5	1,947 1903
2	4,804 3087	10	3,789 1062	10	1,917 2819
3	4,776 1047	15	3,709 9339	15	1,887 8318
4	4,748 3384	20	3,634 0572	20	1,858 8261
5	4,720 9968	25	3,561 2075	25	1,830 2505
6	4,694 0672	30	3,491 1480	30	1,802 0928
7	4,667 5364	35	3,423 6689	35	1,774 3395
8	4,641 3931	40	3,358 5831	40	1,746 9796
9	4,615 6259	45	3,295 7225	45	1,720 0013
0,070	4,590 2242	50	3,234 9370	50	1,693 3942
1	4,565 1773	55	3,176 0912	55	1,667 1471
2	4,540 4752	60	3,119 0620	60	1,641 2511
3	4,516 1087	65	3,063 7385	65	1,615 6957
4	4,492 0689	70	3,010 0185	70	1,590 4726
5	4,468 3463	75	2,957 8101	75	1,565 5721
6	4,444 9333	80	2,907 0280	80	1,540 9865
7	4,421 8215	85	2,857 5948	85	1,516 7074
8	4,399 0028	90	2,809 4386	90	1,492 7268
9	4,376 4702	95	2,762 4937	95	1,469 0374
0,080	4,354 2162	0,200	2,716 6988	0,400	1,445 6320
1	4,332 2343	5	2,671 9974	5	1,422 5037
2	4,310 5171	10	2,628 3374	10	1,399 6453
3	4,289 0591	15	2,585 6697	15	1,377 0512
4	4,267 8535	20	2,543 9494	20	1,354 7145

No. 2, c er positiv, $c = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^4 \left[1 + \frac{1}{x}\right]}$.

$\frac{1}{x} = \overset{5}{\text{kr}}\,(c)$.	logbr. c.	$\frac{1}{x} = \overset{5}{\text{kr}}\,(c)$.	logbr. c.	$\frac{1}{x} = \overset{5}{\text{kr}}\,(c)$.	logbr. c.
0,425	1,332 6295	0,625	0,605 6266	0,825	0,072 9215
30	1,310 7900	30	0,590 4504	30	0,061 2365
35	1,289 1909	35	0,575 3874	35	0,049 6179
40	1,267 9267	40	0,560 4362	40	0,038 0650
45	1,246 6922	45	0,545 5953	45	0,026 5768
50	1,225 7820	50	0,530 8625	50	0,015 1527
55	1,205 0904	55	0,516 2368	55	0,003 7917
60	1,184 6159	60	0,501 7163	60	0,992 4931—1
65	1,164 3504	65	0,487 2994	65	0,981 2568—1
70	1,144 2911	70	0,472 9843	70	0,970 0812—1
75	1,124 4336	75	0,458 7700	75	0,958 9663—1
80	1,104 7735	80	0,444 6551	80	0,947 9114—1
85	1,085 3067	85	0,430 6377	85	0,936 9154—1
90	1,066 0293	90	0,416 7169	90	0,925 9782—1
95	1,046 9380	95	0,402 8911	95	0,915 0988—1
0,500	1,028 0287	0,700	0,389 1591	0,900	0,904 2764—1
5	1,009 2979	5	0,375 5192	5	0,893 5106—1
10	0,990 7423	10	0,361 9707	10	0,882 8010—1
15	0,972 3586	15	0,348 5119	15	0,872 1468—1
20	0,954 1432	20	0,335 1416	20	0,861 5476—1
25	0,936 0930	25	0,321 8589	25	0,851 0025—1
30	0,918 2050	30	0,308 6623	30	0,840 5111—1
35	0,900 4764	35	0,295 5513	35	0,830 0726—1
40	0,882 9041	40	0,282 5240	40	0,819 6867—1
45	0,865 4855	45	0,269 5794	45	0,809 3532—1
50	0,848 2175	50	0,256 7168	50	0,799 0710—1
55	0,831 0976	55	0,243 9349	55	0,788 8396—1
60	0,814 1234	60	0,231 2329	60	0,778 6591—1
65	0,797 2921	65	0,218 6097	65	0,768 5282—1
70	0,780 6007	70	0,206 0639	70	0,758 4470—1
75	0,764 0682	75	0,193 5948	75	0,748 4145—1
80	0,747 6309	80	0,181 2016	80	0,738 4304—1
85	0,731 3471	85	0,168 8830	85	0,728 4947—1
90	0,715 1949	90	0,156 6386	90	0,718 6061—1
95	0,699 1713	95	0,144 4671	95	0,708 7647—1
0,600	0,683 2748	0,800	0,132 3675	1,000	0,698 9700—1
5	0,667 5034	5	0,120 3392		
10	0,651 8549	10	0,108 3814		
15	0,636 3271	15	0,096 4930		
20	0,620 9182	20	0,084 6730		

Tabel

over

Funktionen x, bestemt ved Ligningen $c = \frac{-x^5}{1-x}$.

No. 3, c er negativ.

$x = \overset{5}{r}\,(c)$.	logbr. c.	$x = \overset{5}{r}\,(c)$.	logbr. c.	$x = \overset{5}{r}\,(c)$.	logbr. c.
-0,000	$-\infty_n$	— 0,040	0,028 0288_n -7	— 0,080	0,551 6622_n -6
1	0,000 4345_n -15	1	0,082 1009—7	1	0,579 1095—6
2	0,506 0195—14	2	0,134 8810—7	2	0,606 2268—6
3	0,386 9113—13	3	0,186 4306—7	3	0,633 0212—6
4	0,012 0407—12	4	0,236 8056—7	4	0,659 5010—6
5	0,497 0269—12	5	0,286 0591—7	5	0,685 6734—6
6	0,893 3701—12	6	0,334 2406—7	6	0,711 5463—6
7	0,228 5408—11	7	0,381 3966—7	7	0,737 1257—6
8	0,518 9383—11	8	0,427 5691—7	8	0,762 4187—6
9	0,775 1388—11	9	0,472 8000—7	9	0,787 4316—6
-0,010	0,004 3648—10	— 0,050	0,517 1264—7	— 0,090	0,812 1711—6
1	0,211 7672—10	1	0,560 5848—7	1	0,836 6431—6
2	0,401 1491—10	2	0,603 2082—7	2	0,860 8532—6
3	0,575 3998—10	3	0,645 0295—7	3	0,884 8072—6
4	0,736 7631—10	4	0,686 0779—7	4	0,908 5113—6
5	0,887 0203—10	5	0,726 3817—7	5	0,931 9694—6
6	0,027 6049—9	6	0,765 9680—7	6	0,955 1876—6
7	0,159 6910—9	7	0,804 8628—7	7	0,978 1707—6
8	0,284 2510—9	8	0,843 0891—7	8	0,000 9240—5
9	0,402 0990—9	9	0,880 6704—7	9	0,023 4512—5
-0,020	0,513 9239—9	— 0,060	0,917 6286—7	— 0,100	0,045 7575—5
1	0,620 3138—9	1	0,953 9834—7	5	0,154 1235—5
2	0,721 7746—9	2	0,989 7557—7	10	0,257 5735—5
3	0,818 7444—9	3	0,024 9629—6	15	0,356 5457—5
4	0,911 6062—9	4	0,059 6242—6	20	0,451 4233—5
5	0,000 6954—8	5	0,093 7554—6	25	0,542 5419—5
6	0.086 3075—8	6	0,127 3726—6	30	0,630 1977—5
7	0,168 7062—8	7	0,160 4924—6	35	0,714 6529—5
8	0.248 1237—8	8	0.193 1286—6	40	0,796 1415—5
9	0.324 7708—8	9	0,225 2958—6	45	0,874 8739—5
-0,030	0.398 8348—8	— 0,070	0,257 0071—6	50	0,951 0376—5
1	0,470 4847—8	1	0,288 2758—6	55	0,024 8018—4
2	0,539 8746—8	2	0,319 1145—6	60	0,096 3207—4
3	0,607 1430—8	3	0,349 5348—6	65	0,165 7330—4
4	0,672 4174—8	4	0,379 5475—6	70	0,233 1664—4
5	0,735 8127—8	5	0,409 1648—6	75	0,298 7361—4
6	0,797 4355—8	6	0,438 3960—6	80	0,362 5486—4
7	0,857 3822—8	7	0,467 2518—6	85	0,424 7009—4
8	0,915 7429—8	8	0,495 7421—6	90	0,485 2830—4
9	0,972 5996—8	9	0,523 8759—6	95	0,544 3771—4

No. 3, c er negativ, $c = \frac{-x^5}{1-x}$.

$x = \sqrt[5]{(c)}$.	logbr. c.	$x = \sqrt[5]{(c)}$.	logbr. c.	$x = \sqrt[5]{(c)}$.	logbr. c.
— 0,200	0,602 0600$_n$ -4	— 0,400	0,232 1487$_n$ -2	— 0,600	0,288 6965$_n$ -1
5	0,658 4024—4	5	0,262 7580—2	5	0,312 1799—1
10	0,713 4694—4	10	0,293 0675—2	10	0,335 5844—1
15	0,767 3228—4	15	0,323 0846—2	15	0,358 9148—1
20	0,820 0189—4	20	0,352 8185—2	20	0,382 1749—1
25	0,871 6108—4	25	0,382 2767—2	25	0,405 3687—1
30	0,922 1483—4	30	0,411 4676—2	30	0,428 5008—1
35	0,971 6781—4	35	0,440 3981—2	35	0,451 5756—1
40	0,020 2424—3	40	0,469 0755—2	40	0,474 5975—1
45	0,067 8835—3	45	0,497 5070—2	45	0,497 5701—1
50	0,114 6387—3	50	0,525 6998—2	50	0,520 4990—1
55	0,160 5447—3	55	0,553 6605—2	55	0,543 3864—1
60	0,205 1348—3	60	0,581 3952—2	60	0,566 2406—1
65	0,249 9422—3	65	0,608 9112—2	65	0,589 0632—1
70	0,293 4961—3	70	0,636 2136—2	70	0,611 8601—1
75	0,336 3255—3	75	0,663 3087—2	75	0,634 6356—1
80	0,378 4575—3	80	0,690 2027—2	80	0,657 3945—1
85	0,419 9185—3	85	0,716 9013—2	85	0,680 1424—1
90	0,460 7317—3	90	0,743 4103—2	90	0,702 8838—1
95	0,500 9209—3	95	0,769 7346—2	95	0,725 6242—1
— 0,300	0,540 5085—3	— 0,500	0,795 8800—2	— 0,700	0,748 3687—1
5	0,579 5142—3	5	0,821 8518—2	5	0,771 1235—1
10	0,617 9594—3	10	o,847 6549—2	10	0,793 8935—1
15	0,655 8624—3	15	0,873 2943—2	15	0,816 6851—1
20	0,693 2411—3	20	0,898 7753—2	20	0,839 5045—1
25	0,730 1132—3	25	0,924 1029—2	25	0,862 3573—1
30	0,766 4947—3	30	0,949 2816—2	30	0,885 2507—1
35	0,802 4024—3	35	0,977 3160—2	35	0,908 1906—1
40	0,837 8506—3	40	0,999 2112—2	40	0,931 1852—1
45	0,872 8542—3	45	0,023 4711—1	45	0,954 2413—1
50	0,907 4266—3	50	0,048 6010—1	50	0,977 3665—1
55	0,941 5823—3	55	0,073 1050—1	55	0,000 5689
60	0,975 3325—3	60	0,097 4873—1	60	0,023 8568
65	0,008 6908—2	65	0,121 7577—1	65	0,047 2391
70	0,041 6680—2	70	0,145 9060—1	70	0,070 7257
75	0,074 2765—2	75	0,169 9501—1	75	0,094 3260
80	0,106 5263—2	80	0,193 8907—1	80	0,118 0503
85	0,138 4284—2	85	0,217 7314—1	85	0,141 9100
90	0,169 9932—2	90	0,241 4761—1	90	0,165 9152
95	0,201 2301—2	95	0,265 1300—1	95	0,190 0816

No. 3, c er negativ, $c = \frac{-x^5}{1-x}$.

$x = \sqrt[5]{(c)}$.	logbr. c.	$x = \sqrt[5]{(c)}$.	logbr. c.	$x = \sqrt[5]{(c)}$.	logbr. c.
− 0,800	0,214 4200$_n$	− 0,925	0,955 6462$_n$	− 0,970	1,456 7372$_n$
5	0,238 9449	6	0,963 8233	1	1,473 6980
10	0,263 6714	7	0,972 0756	2	1,491 1735
15	0,288 6163	8	0,980 4075	3	1,509 2002
20	0,313 7970	9	0,988 8202	4	1,527 8217
25	0,339 2315	− 0,930	0,997 3165	5	1,547 0830
30	0,364 9416	1	1,005 8994	6	1,567 0378
35	0,390 9486	2	1,014 5706	7	1,587 7452
40	0,417 2765	3	1,023 3332	8	1,609 2718
45	0,443 9518	4	1,032 1906	9	1,631 6942
50	0,471 0032	5	1,041 1456	− 0,980	1,655 1005
55	0,498 4625	6	1,050 1990	1	1,679 5924
60	0,526 3645	7	1,059 3575	2	1,705 2850
65	0,554 7467	8	1,068 6223	3	1,732 3186
70	0,583 6531	9	1,077 9982	4	1,760 8555
75	0,613 1305	− 0,940	1,087 4882	5	1,791 0897
80	0,643 2323	1	1,097 0960	6	1,823 2565
85	0,674 0187	2	1,106 8265	7	1,857 6426
90	0,705 5573	3	1,116 6836	8	1,894 6033
95	0,737 9257	4	1,126 6720	9	1,934 5888
− 0,900	0,771 2125	5	1,136 7963	− 0,990	1,978 1760
1	0,777 9888	6	1,147 0617	1	2,026 1260
2	0,784 8064	7	1,157 4741	2	2,071 5785
3	0,791 6673	8	1,168 0382	3	2,139 6480
4	0,798 5708	9	1,178 7608	4	2,208 7807
5	0,805 5194	− 0,950	1,189 6480	5	2,290 1455
6	0,812 5131	1	1,200 7084	6	2,389 2365
7	0,819 5536	2	1,211 9433	7	2,516 3547
8	0,826 6412	3	1,223 3666	8	2,694 6225
9	0,833 7781	4	1,234 9842	9	2,997 8275
− 0,910	0,840 9645	5	1,246 8045	− 1,000	∞_n
1	0,848 2020	6	1,258 8368		
2	0,855 4913	7	1,271 0910		
3	0,862 8347	8	1,283 5782		
4	0,870 2325	9	1,296 3091		
5	0,877 6866	− 0,960	1,309 2960		
6	0,885 1982	1	1,322 5524		
7	0,892 7684	2	1,336 0919		
8	0,900 3996	3	1,349 9298		
9	0,908 0925	4	1,364 0825		
− 0,920	0,915 8490	5	1,378 5685		
1	0,923 6709	6	1,393 4066		
2	0,931 5599	7	1,408 6186		
3	0,939 5178	8	1,424 2270		
4	0,947 5464	9	1,440 2573		

Sur le mouvement simultané de corps sphériques variables dans un fluide indéfini et incompressible.

Premier mémoire.

Par

C. A. Bjerknes.

Présenté le 15 septembre 1871.

INTRODUCTION.

Le problème sur le mouvement de corps solides dans un fluide indéfini et incompressible est traité d'abord par *Dirichlet,* au cas le plus simple d'un corps sphérique; les composantes des vitesses qui en résulteraient dans le fluide devaient être les dérivées, suivant les coordonnées, d'une seule fonction, c'est á dire il fallait qu'il y existât un potentiel. Il avait indiqué que l'on pourrait encore trouver la solution en cas d'un ellipsoide; ce dernier problème est résolu ensuite par *Clebsch*, dans un mémoire publié dans le journal de Crelle, LII. Du reste, les deux problèmes peuvent être généralisés en supposant que le corps varie, mais en restant toujours semblable par rapport à sa forme. À côté du mouvement de la sphère et de l'ellipsoide, on a aussi cherché à étudier le mouvement d'autres corps; mais, à peu près toujours, on s'est borné à ne considérer, à la fois, que celui d'un seul.

Un fait caractéristique, qui se manifeste dans la solution de ces deux problèmes, en cas de formes invariables, c'est que le fluide ne s'oppose pas à un mouvement uniforme et rectiligne du corps; en d'autres termes, la pression totale sera alors égale à zéro. Par contre, il résistera, comme aussi la masse du corps lui même, à des variations dans les mouvements: de sorte que l'on aura un effet analogue à celui d'une masse augmenté, constante, ou variable avec les directions.

On peut demander si cette propriété d'un libre passage existera encore lorsqu'il y a une pluralité de corps. S'il en était ainsi, on pourrait, autant que le fluide était parfait, et qu'on partait d'ailleurs d'un état de repos au commencement du temps, faire mouvoir le système de corps avec des vitesses uniformes et différentes, d'une infinité de manières, sans qu'il serait pour cela necessaire d'employer aucun effort. Un corps quelconque qui était en repos devait y rester: il ne serait pas poussé en avant par les mouvements uniformes que l'on faisait effectuer les autres. Un corps qui se mouvait continuirait à pénétrer dans le fluide, sans être géné ni par les courants qu'il y produirait si les autres corps n'existaient pas, ni même par les courants secondaires et perturbatifs qui s'y forment encore à raison de l'existence d'un système de corps environnants.

Nous avons abordé le problème du mouvement en cas d'une pluralité de corps sphériques, mais d'une manière approximative, en admettant que les rayons doivent être très petits par rapport aux distances centrales. Dans le cas de deux sphères qui se meuvent suivant une droite centrale, on peut du reste traiter le problème proposé d'une manière exacte. Nous avons indiqué, autrefois, quelques résultats généraux auxquels nous sommes ainsi parvenu, — Forhandlinger ved de skandinaviske Naturforskeres 10de Møde, 1868 —, et on en voit qu'il n'en est pas comme nous avons supposé pour un moment, dans ce qui précéde.

Le mouvement rectiligne et uniforme d'une sphère ne peut plus être soutenu qu'avec application d'une force, lorsqu'il existe dans le fluide d'autres corps sphériques que l'on fait mouvoir d'une manière uniforme, ou qui doivent rester, en attendant, immobiles; on aurait à ajouter une force nouvelle si l'on faisait varier ces mouvements derniers. On les pourrait comparer avec des forces naturelles et extérieures, résidant dans les centres des sphères environnantes; quoiqu'elles n'agissent pas, comme ordinairement, suivant la ligne droite. Si, de l'autre côté, on faisait dévier ou accélérer le mouvement du corps premier, il fallait apporter encore une force, d'abord pour vaincre la résistance de sa masse elle même; et ensuite celle d'une masse fictive, qui dépend de la quantité du fluide déplacé, et, dans les termes secondaires, aussi des positions et des grandeurs des sphères agissantes. Cette dernière action du fluide, qui peut, de la même manière, être conçue comme émanant des corps qu'il renferme, de la sphère ci-dessus considérée et des sphères environnantes, tiendra par suite lieu d'une force d'inertie, additive. Ainsi, on peut se figurer que ces autres corps du système, sans intermédiaire du fluide, font pousser la sphère désignée, en même temps qu'ils font encore changer sa masse.

Lorsqu' enfin les sphères varient par rapport aux volumes tandis qu'elles se meuvent ensemble, on aura à regarder des effets nouveaux, conjointement à ceux que nous venons de considérer. Les actions qui produisent dans l'intérieur d'une sphère ces variations de volume, se traduiront, en quelque sorte, en dehors en forces motrices, — plus puissantes, et agissant, cette fois, suivant la ligne droite des centres. Nous croyons que ce problème, quoique un peu compliqué et étendu, ne sera pas néanmoins sans intérêt d'étudier.

À côté de ces questions, qui reviennent à chercher la pression totale autour d'une sphère quelconque, et à étudier, séparément, les parties distinctes dont elle est composée, on peut aussi examiner les mouvements dans l'intérieur du fluide, les vitesses en chaque point, les pressions etc., en un mot, l'état général de ce fluide dans lequel se doivent déplacer et varier les corps du système.

Pour cela il sera nécessaire de déterminer, en premier lieu, le potentiel de vitesse, qui est supposé d'exister, avec un degré d'approximation suffisante et convenable; et, c'est cette recherche, et les études préparatoires qu'elle demande, qui conséquemment doit être d'abord notre l'objet principal.

Dans les trois chapitres suivants, essentiellement préliminaires, que nous allons exposer dans ce premier mémoire, nous définirons avec plus de précision en quoi consiste le problème; nous montrerons comment on le pourrait ramener à une suite de problèmes plus simples, et, de l'autre côté aussi, le généraliser. Nous essayerons ensuite d'étudier, d'après les propriétés fondamentales qu'elles doivent posséder, certaines fonctions auxiliaires, des potentiels partiels, qui constitueront les termes diverses dans le potentiel approximé cherché; ce qui nous fournira encore une méthode générale pour les évaluer successivement, l'une de l'autre. Enfin, nous donnerons la forme du potentiel et le degré d'approximation correspondante; en examinant encore, à cette même occasion, et pour plus de clarté, la signification importante de ces fonctions nouvelles dont est composée l'expression cherchée totale, et que nous avons désigné, par suite, comme des potentiels partiels. Nous en déduirons les propriétés principales d'une serie de mouvements fictifs, partiels aussi, et qui font les éléments constituants du mouvement final, qui se doit former dans le fluide agité.

CHAPITRE I.

LE PROBLÈME, SA RÉDUCTION ET GÉNÉRALISATIONS.

§ 1.

Énoncé du problème.

1. Les deux problèmes principaux. — Le premier problème principal, dont nous nous occuperons ici, peut être énoncé comme il suit.

Dans un fluide indéfini, qui doit encore être *homogène, incompressible, et d'une fluidité parfaite, on fait mouvoir un système de corps sphériques dont les rayons sont supposés d'être petits par rapport à leurs distances centrales.* Ils n'y existent qu'en nombre fini; de sorte que, quelque grand que soit ce nombre, le fluide s'étend indéfiniment et sans limite en dehors du lieu qu'occupe le système des sphères.

On admet que l'état de mouvement dans lequel se trouve le fluide soit compatible avec *l'existence d'un potentiel.* Ce potentiel et ses dérivées, par rapport aux coordonnées et au temps, doivent avoir des valeurs uniques, et doivent rester finis et continus partout dans le fluide. Ils s'approchent indéfiniment à zéro à mesure que l'on s'éloigne de plus en plus du lieu occupé par les sphères mobiles.

Il n'y a pas de forces agissant dans l'intérieur du fluide, — si ce n'est pas les forces moléculaires, dont on peut s'imaginer que dépendent les propriétés générales d'un fluide parfait et incompressible.

Enfin, la pression doit, à l'infini, converger vers une limite qui ne dépend que du temps; mais cette valeur limite, qui par conséquent peut aussi être constante, doit d'ailleurs être assez grande pour que les mouvements puissent exister sans qu'ils fassent cesser la continuité du fluide. Il faut, comme on sait, que la pression ne s'abaisse pas en aucun point au dessous du zéro.

Cela étant, on demande de trouver, approximativement, la valeur du potentiel de vitesse; de déterminer par là l'état de mouvement et de pression dans le fluide indéfini; et enfin les pressions totales qu'éprouveront les sphères mobiles qu'y sont renfermées.

Si l'on parvient à trouver la solution de ce problème, on peut passer sans difficulté à un deuxiéme problème, que nous considérons aussi comme étant principal. On peut, en effet, se proposer de trouver, approximativement, le potentiel de vitesse, de déterminer par là l'état de mouvement et de pression etc., lorsque les *sphères varient* par rapport aux volumes, *leurs centres restant en repos.* Les conditions et restrictions doivent être alors les mêmes que celles dont ci-dessus.

2. Le problème composé. — Enfin, en formant la somme des deux potentiels, on aura, comme nous allons montrer plus tard, la solution d'un problème composé et plus général: c'est celui de la détermination approximative des *mouvements dans un fluide dans lequel se meut un système de sphères dont les volumes varient.* Ici encore, il faut satisfaire aux mêmes conditions qu'à celles dont plus haut. On déterminera, après, l'état correspondant du fluide indéfini, les vitesses, les pressions et les pressions totales.

§ 2.

Les conditions aux surfaces et réductions.

3. Notions. — Soit S_g une sphère quelconque parmi les m sphères du système donné S_1, S_2, S_3, . . . S_m; soit de plus d_g le rayon, et a_g, b_g, c_g les coordonées du centre g par rapport aux axes des x, y, z.

La *vitesse de variation*, c'est à dire celle avec laquelle un point à la surface de S_g et appartenant à cette sphère s'éloigne du centre g, sera alors exprimée par d'_g. La *vitesse de translation*, ou celle du centre g lui même, aura pour valeur absolue s'_g; ses trois composantes relatives aux axes des x, y, z seront a'_g, b'_g, c'_g. La troisième vitesse, ou celle de la *rotation*, peut être negligée.

Par r_g nous représenterons le rayon vecteur mené du centre g au point M ou x, y, z. $(s'_g\, r_g)$ deviendra ainsi l'angle que forme avec ce rayon vecteur la direction de la vitesse au centre g.

Enfin, nous désignons par dn l'élément d'une normale, et plus particulièrement par dn_g l'élément d'une normale extérieure à la surface de la sphère S_g. dn_g sera donc égal à dr_g, pour r_g égale à d_g.

4. Conditions aux surfaces. — Cela posé, on déterminera, comme il suit, les conditions à la surface.

On peut s'imaginer que d'abord le volume de la sphère varie le centre g restant en repos; qu'elle tourne ensuite autour de ce point; et qu'enfin elle effectue un mouvement de translation.

Le deuxième de ces mouvements élémentaires ne produit aucun effet, à cause de la forme sphérique et de la fluidité absolue. On peut donc ici, comme nous venons de dire, en faire abstraction.

D'après l'hypothèse ordinaire, une molécule du fluide située à la surface d'un corps mobile, qui peut encore varier par rapport à sa forme, doit s'y trouver indéfiniment; ou, au moins, elle doit se mouvoir de manière à ce qu'elle y touchera tangentialement avant de s'en éloigner. En remarquant donc qu'en décomposant le mouvement total de la sphère dans l'élément du temps en mouvements simples, comme nous venons de le faire, on ne commet qu'une erreur du deuxième ordre, et, par conséquent, infiniment petite par rapport au déplacement élémentaire des points de la surface, on reconnaîtra tout de suite qu'en direction normale une molecule du fluide située à la surface de S_g doit être imprimée d'une vitesse égale à

$$d'_g + s'_g \cos(s'_g\, r_g).$$

C'est, en effet, cette vitesse dont est doué, en sens normal et extérieurement dirigé, le point coïncidant qui appartient à la surface de la sphère.

De l'autre coté, φ étant le potentiel, $\frac{d\varphi}{dn_g}$ par conséquent la composante de vitesse de la molécule fluide à la surface nommée et également dirigée en dehors, c'est à dire vers le fluide, on trouvera la condition suivante:

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \frac{d\varphi}{dn_g} = d'_g + s'_g \cos(s'_g\, r_g),$$

qui doit être remplie pour tous les points à la surface de S_g.

5. Réductions. — De l'équation précédente, dans laquelle doivent être attribuées à g toutes les valeurs 1,2,3,.. m, on déduit que

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \begin{gathered} \varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} = S\varphi^i, \\ i = (0), (1); \end{gathered}$$

où donc les fonctions φ^i doivent remplir les conditions suivantes à la surface d'une sphère quelconque S_g:

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad \begin{gathered} \frac{d\varphi^{(0)}}{dn_g} = d'_g = N_g^{(0)}, \\ \frac{d\varphi^{(1)}}{dn_g} = s'_g \cos(s'_g\, r_g) = N_g^{(1)}. \end{gathered}$$

La fonction φ, satisfaisant à l'équation $\Delta_2 = 0$, c'est à dire à

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2} = 0,$$

on voit qu'elle peut être formée en déterminant et ajoutant deux fonctions plus simples φ^i, qui satisfont aussi à $\Delta_2 = 0$, et qui remplissent, en même temps, les conditions nouvelles (3). On doit encore demander que les fonctions φ^i soient continues et finies, avec leurs dérivées, dans tout l'espace occupé par le fluide; qu'elles convergent, à l'infini, vers zéro; et qu'elles y conservent des valeurs uniques.

On en conclut que *le problème sur le mouvement des sphères variables*, déterminé par le potentiel φ, *peut être composé des deux problémes plus simples*: celui des *sphères mobiles et invariables* ($\varphi^{(1)}$), et celui des *sphères variables mais immobiles* ($\varphi^{(0)}$). Par suite aussi, la vitesse en un point quelconque x, y, z du fluide se compose de deux vitesses indépendantes: celles que produisent les mouvements translatoires des sphères, et celles auxquelles donnerons lieu leurs variations de volumes.

6. De l'équation de condition (1) à la surface d'une sphère quelconque S_g, on déduit encore que *le potentiel peut être composé de* m *potentiels partiels*. Un quelconque entre eux, par exemple *celui qui est déterminé par l'index* r, *correspond au cas où la sphère* S_r *se meut, et varie* par rapport au volume, toutes *les autres restant immobiles et invariables*.

De là on reconnaît aussi que les composantes de vitesse peuvent être exprimées, de même, comme une somme de m composantes partielles. Le r^{me} système de ces vitesses partielles se rattache, comme auparavant, au cas où la sphère S_r se meut et varie les autres restant en repos et invariables.

7. Dans l'équation (1), le membre à droite peut être écrit comme il suit:

$$a'_g \cos(a'_g\, r_g) + b'_g \cos(b'_g\, r_g) + c'_g \cos(c'_g\, r_g) + d'_g\,;$$

et ici on remarquera que les angles $(a'_g\, r_g)$, $(b'_g\, r_g)$, $(c'_g\, r_g)$ seront les mêmes que $(x\, r_g)$, $(y\, r_g)$, $(z\, r_g)$, que fait avec les axes des x, y, z le rayon vecteur r_g du centre g au point M à la surface de la sphère S_g. Par conséquent, ces angles ne dépendent pas des valeurs attribuées à a'_g, b'_g, c'_g.

Cela posé, déterminons quatre fonctions A_g, B_g, C_g, D_g avec les mêmes propriétés fondamentales que les fonctions φ; toutefois. ces fonctions doivent être choisies particulièrement, de sorte qu'à la surface de S_g leurs dérivées suivant la normale extérieure seront égales à

$$\cos(x\, r_g),\ \cos(y\, r_g), \cos(z,\, r_g),\ 1,$$

et aux surfaces des autres sphères égales à zéro. Ces quatre potentiels correspondent alors aux cas où la sphère S_g se meut avec la vitesse 1 parallèlement à l'axe des x, ou à l'axe des y, ou à l'axe des z, ou enfin au cas qu'elle varie par rapport au volume avec une vitesse radiale qui est aussi égale à l'unité; les autres sphères doivent démeurer, en attendant, immobiles et invariables. Ils auront ainsi la propriété commune: qu'ils ne dépendent que des rayons des sphères, des positions de leurs centres, et de celle du point x, y, z que l'on considère.

Maintenant, on peut former les quatre fonctions $a'_g A_g$, $b'_g B_g$, $c'_g C_g$, $d'_g D_g$,

$$A_g, \ B_g, \ C_g, \ D_g$$

étant supposées d'être connues; et, en les ajoutant,

$$a'_g A_g + b'_g B_g + c'_g C_g + d'_g D_g.$$

Ce potentiel, correspondant au cas que la sphère S_g se meut avec la vitesse a'_g, b'_g, c'_g et varie avec la vitesse d'_g toutes les autres restant immobiles et invariables, aura ainsi la propriéte suivante: d'être une fonction linéaire et homogène de ces quatre vitesses a'_g, b'_g, c'_g, d'_g. Les facteurs A_g, B_g, C_g, D_g ne dépendent, du reste, que des a, b, c, d et de x, y, z.

En vertu du n°6, on en conclura plus généralement que *le potentiel* total

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad \varphi = \Sigma(a'_g A_g + b'_g B_g + c'_g C_g + d'_g D_g),$$

où la somme doit être étendue sur toutes les g depuis 1 jusqu'à m, *sera une fonction lineaire et homogène des composantes* a', b', c' *de toutes les vitesses centrales et des vitesses de variation* d'. Les coefficients ne dépendent que des grandeurs et des positions des sphères, et d'ailleurs du point donné x, y, z dans le fluide.

8. Sur un potentiel qui ne satisfait pas à toutes les conditions. — Nous finissons en faisant ici une petite remarque.

Soient données les positions et les grandeurs des corps sphériques au temps t; de sorte que les fonctions coefficients soient aussi déterminées. Mais choisissons, après, dans l'expression du potentiel, ci-dessus présenté, les quantités a', b', c', d', fonctions du temps, d'une manière tout-à-faite arbitraire. Alors les propriétés analytiques et les plus essentielles du potentiel se trouvent encore conservées; et cependant il n'y a plus de compatibilité entre les mouvements dans le fluide et ceux des sphères qu'il renferme. Pour cela il faut encore et nécessairement que

$$a'_g - \frac{da_g}{dt} = o,\ b'_g - \frac{db_g}{dt} = o,\ c'_g - \frac{dc_g}{dt} = o,\ d'_g - \frac{dd_g}{dt} = o,$$

les corps ne devant être pénétrés par le fluide.

Ce cas d'incompatibilité, le plus simple, meritera, nous croyons, d'être étudié particulièrement. Il faut supposer alors l'espace entier rempli du fluide; les sphères le partagent en un espace extérieur, dans lequel on admet que les mouvements dans le fluide doivent être exprimés par des potentiels, — qui conviennent aux grandeurs et aux positions des corps mais non plus aux vitesses diverses qu'ils possedent; ensuite, en une serie d'espaces intérieurs, dans lesquels les mouvements du fluide seront déterminés aux surfaces; des parois minces et perméables doivent permettre aux courants un passage libre. On pourrait se proposer de déterminer aussi les mouvements complets dans ces derniers espaces, correspondant à ceux qui existent en dehors; ou bien, de tous ces mouvements possibles, au moins celui qui est le plus simple.

Ce problème hydrodynamique ne pouvant être résolu par des potentiels, il faut se borner à considérer le cas d'une seule sphère, les composantes des vitesses aux surfaces étant alors définies par des expressions commodes.

Nous reviendrons tout-de-suite à ce sujet, dans un paragraphe qui aura pour but de montrer de quelles manières on pourrait généraliser le problème. Nous nous proposons d'abord, en traitant le problème ordinaire, de tirer des équations fondamentales une autre conclusion, celle qu'il n'y existera alors qu'une seule solution.

§ 3.

Il n'existe qu'une seule solution.

9. Nous avons admis que les mouvements dans le fluide étaient compatibles avec l'existence d'un potentiel de vitesse. Rien ne s'op-

posera aussi à concevoir que d'abord il y ait été de repos en tous les points du système entier, qu'ensuite on soit arrivé à l'état actuellement existant, en vertu de forces qui viennent depuis à paraître.

Les positions ainsi acquises, les mouvements qui tendent à s'effectuer, et les changements enfin qu'éprouveraient au moment considéré les corps sphériques, pouvaient évidemment être amenés d'une infinité de manières. On pourrait donc s'imaginer que les mouvements du fluide ne dépendaient pas seulement de l'état simultané des corps mobiles, mais aussi des états initiaux et intermédiaires.

Nous allons démontrer que dans le cas que nous traitons ici ces états antérieurs n'exercent aucune influence.

10. Considérons un espace F, terminé d'une surface du même nom. Cet espace doit être fini dans tous les sens; il renferme un certain nombre des corps donnés.

Si ces corps sont tous des solides invariables, la quantité du fluide entrant sera, à cause de l'incompressibilité, égale à celle qui en sortira; et cela, quels que soient les mouvements effectués par les sphères mobiles, dans l'intérieur de F, comme en dehors.

Supposons, en second lieu, que les corps mobiles varient par rapport aux volumes. Alors la quantité de fluide en partie gagnée en partie perdue en traversant l'enveloppe fermée, ne sera pas en général la même. Cependant, de l'incompressibilité du fluide il résulte que le gain ou la perte totale ne dépende que de l'état de changement dans lequel se trouvent les corps en dedans au temps considéré; comme auparavant leurs mouvements de translation n'y contribuent pour rien. On reconnaîtra donc que, algébriquement compris, la quantité du fluide sortant de l'enveloppe dans l'unité du temps se mesure par les accroissements des corps dans l'intérieur de l'espace F.

11. Cela posé, soient φ et ψ deux potentiels de vitesse, correspondant au même état instantané des corps mobiles et variables; les états antérieurs doivent d'ailleurs être différents. Désignons enfin par χ la différence entre les deux fonctions.

De ce que nous venons de dire, on conclura facilement que

(6) . . . . $\int \frac{d\chi}{dn} dF = 0;$

où l'intégrale doit être étendue sur toute la surface F, dF étant un élément superficiel appartenant à la surface nommée; $\frac{d}{dn}$ désignera la dérivée suivant la normale, dirigée en dedans.

χ étant la différence entre φ et ψ, l'équation trouvée exprimera évidemment que la quantité de fluide qui s'amasse ou qui se perd, en passant à travers la surface F, sera dans l'un et l'autre cas la même.

12. Maintenant déterminons la surface F d'une manière particulière. Soit F une sphère qui renferme tous les corps donnés, — ce qui, en effet, sera possible, parce que les corps n'existent qu'en nombre fini, tandis que le fluide s'étend au delà et sans limite. Le centre de cette sphère doit être l'origine des coordonnées, son rayon égal à R.

Cela fait, on peut développer en series les fonctions φ et ψ, et, par conséquent, aussi leur différence χ, dans l'espace extérieur qui entoure la sphère F. Les deux premières fonctions resteront ici partout finies et continues, avec leurs dérivées par rapport aux coordonnées; elles auront des valeurs uniques; convergeront à zéro, aux limites infiniment éloignées du fluide; et elles satisferont enfin à l'équation différentielle $\Delta_2 = 0$.

Il en résulte que la fonction nouvelle χ jouit encore des mêmes propriétés; et qu'on trouve ainsi

(7) . . . . $\chi = \sum_{0,\infty}^{n} \frac{R^{n+1}}{r^{n+1}} X_n,$

où donc X_n sera une fonction de sphère de l'ordre n, et r le rayon vecteur mené du centre de la sphère F au point (x, y, z) ou M. On aura d'ailleurs $r \overline{\geqq} R$.

13. Nous choisissons enfin l'espace F d'une dernière manière, que voici:

L'espace nouvel et continu est terminé par un système de surfaces intérieures, coïncidant avec celles des corps donnés, et, de l'autre côté, par une surface extérieure, appartenant à un sphère idéelle S, de rayon r, dont le centre est situé à l'origine des coordonnées. Le rayon nommé, plus grand que R, doit varier; il peut ainsi croître au dessus de toutes limites.

On déduit maintenant, à l'aide des équations trouvées, quelques propriétés importantes que possédera la fonction χ, aux limites de l'espace que nous venons de définir.

Faisons usage de l'équation (6). L'intégrale doit être étendue à la surface extérieure, sphérique, S; l'autre partie de l'intégrale, qui devait s'étendre à toutes les surfaces intérieures de l'espace, va disparaître, $\frac{d\chi}{dn}$ étant alors égale à zéro, comme nous allons le montrer plus bas. En remarquant donc que $\frac{d}{dn}$ doit être, dans ce cas, égale à $-\frac{d}{dr}$, l'équation (7) nous donnera

$$0 = \sum_{0,\infty} (n+1) \frac{R^{n+1}}{r^{n+2}} \int X_n \, dF,$$

dF étant un élément superficiel de la sphère nommée. Or, chaque terme de cette serie s'évanouira, à celui près qui correspond à n égale à zéro. De l'autre côté, X_0 sera constant, ou, au moins, il ne doit dépendre que du temps. Il résultera donc:

$$0 = 4\pi R X_0,$$

et on conclura ainsi que

$$X_0 = 0.$$

À cause de cela, on tirera enfin de l'équation (7) la conséquence suivante:

(8′) . . . . . . $\lim r\chi = 0, \ \lim r^2 \frac{d\chi}{dn} = 0,$

r croissant indéfiniment.

Aux limites intérieures de l'espace que nous considérons ici, c'est à dire, aux surfaces des corps donnés, on doit avoir, comme nous avons dit déjà, cette autre condition:

(8″) . . . . $\left(\frac{d\chi}{dn}\right) = 0.$

C'est cela que l'on obtient, en effet, facilement, en remarquant qu'ici, à chaque point, la composante normale de la vitesse doit être déterminée d'avance; et qu'en outre cette composante s'exprime par la dérivée du potentiel φ ou ψ suivant la normale.

14. Après avoir établi les propriétés précédentes de la fonction χ, on la déterminera comme il suit.

Dans l'espace considéré en dernier lieu, les potentiels φ et ψ avec leurs dérivées par rapport aux coordonnées doivent être finis et continus, et avoir des valeurs uniques; ils doivent, de plus, satisfaire à l'équation différentielle $\Delta_2 = 0$. La fonction χ, étant la différence entre les deux fonctions, possédera évidemment aussi les mêmes propriétes. On conclura donc, en vertu d'un théorème bien connu, que

$$(9) \quad . \quad . \quad . \quad \int \chi \frac{d\chi}{dn} df + \int \left(\frac{d\chi^2}{dx^2} + \frac{d\chi^2}{dy^2} + \frac{d\chi^2}{dz^2}\right) dv = 0.$$

La première de ces intégrales s'étend aux surfaces de l'espace continu que nous venons de choisir; df désignera un élement superficiel quelconque, et dn l'élément de la normale intérieure. L'intégrale seconde, dans laquelle dv représentera un élément du volume, doit être étendue à l'espace considéré entier.

Cela étant, si le rayon r de la surface sphérique, qui terminera extérieurement l'espace donné, croît sans cesse, on démontrera facilement que

$$\lim \int \left(\frac{d\chi^2}{dx^2} + \frac{d\chi^2}{dy^2} + \frac{d\chi^2}{dz^2}\right) dv = 0.$$

En effet, la première intégrale dans l'équation (9) peut s'écrire

$$\int \chi \cdot r^2 \frac{d\chi}{dn} \cdot d\omega,$$

où $d\omega$ désigne l'élément superficiel d'une sphère concentrique dont le rayon est égal à l'unité. Mais en allant à la limite, cette intégrale s'évanouira; ce qu'on voit d'ailleurs, immédiatement, à l'aide des équations (8').

De l'équation que nous venons d'établir on fera la conclusion suivante: que dans tout l'espace infini entourant les sphères données

$$\frac{d\chi}{dx} = 0, \quad \frac{d\chi}{dy} = 0, \quad \frac{d\chi}{dz} = 0,$$

et que, par suite, χ ne doit dépendre que du temps. Or, lorsqu'on observe que les potentiels φ et ψ doivent converger tous deux vers zéro, r croissant au dessus de toute limite, on reconnaît que χ convergera aussi vers cette même limite; et il s'ensuit que partout dans cet espace doit être

$$\chi = 0.$$

15. De ce qui précéde, il résulte que dans tout l'espace en dehors des corps donnés, ou, autrement dit, dans tout l'espace infini rempli du fluide, les potentiels φ et ψ doivent être égaux. On arrivera donc à la conclusion suivante:

S'il existe un potentiel de vitesse, il n'en existe qu'un seul.

Au reste, on suppose, comme nous allons le résumer ici, que le potentiel nommé et ses dérivées par rapport aux coordonnées soient finis et continus partout dans le fluide, et qu'ils y aient des valeurs uniques; ils doivent tous s'évanouir aux limites infiniment éloignées de l'espace.

§ 4.

Interprétation nouvelle de l'équation du potentiel et généralisation du problème.

16. Interprétation nouvelle des coefficients. Perméabilité. — Le problème posé étant résolu, on peut passer à un autre, en ôtant une restriction, ou en interprétant d'une autre manière les coefficients dans l'équation du potentiel.

Soient données à la fin du temps t les valeurs de a_g, b_g, c_g, d_g etc., par conséquent les positions et les grandeurs des sphères. Attribuons ensuite des valeurs arbitraires aux quantités a'_g, b'_g, c'_g, d'_g etc., dont dépend linéairement le potentiel φ (5), mais qui peuvent être considérées aussi comme des coefficients d'une équation linéaire par rapport à A_g, B_g, C_g, D_g etc. Dans ce cas, on aura encore un potentiel, — comme nous le répetons (n⁰ 8) —; mais, il déterminera un mouvement, tel que les corps doivent être traversés par les courants: on pourrait les concevoir alors comme des parties du fluide, lieux de systèmes de forces convenables.

Il se présente ainsi un problème secondaire: c'est celui de trouver des mouvements correspondants dans l'intérieur d'un tel corps sphérique, creux et parfaitement perméable: supposé toutefois qu'il n'y ait pas, quant aux directions des vitesses, de changements sensibles en passant d'un point situé sur la paroi extérieure de l'enveloppe à un point voisin, appartenant aussi au fluide, mais situé en dedans.

Cette fois encore, *le mouvement du fluide dans l'espace extérieur,* qui d'après l'hypothèse dépend d'un *potentiel*, peut être considéré comme une *somme de deux mouvements* :

Le premier est déterminé par les mouvements de translation et les variations des sphères, considérées comme des corps imperméables, par conséquent par les vitesses ordinaires

$$\frac{da_g}{dt}, \frac{db_g}{dt}, \frac{dc_g}{dt}, \frac{dd_g}{dt}.$$

L'autre sera le mouvement d'un courant qui passe à travers les corps, – ces derniers considérés comme immobiles et invariables –, *et qui peut même changer sa densité pendant qu'il traverse les surfaces des sphères.* Il correspondra aux *vitesses de passage* et aux *vitesses de radiation*

$$a'_g - \frac{da_g}{dt}, b'_g - \frac{db_g}{dt}, c'_g - \frac{dc_g}{dt}, d'_g - \frac{dd_g}{dt}.$$

Les mouvements dans l'intérieur des sphères ne peuvent être exprimés par des potentiels. Ainsi nous ne les traitons que dans quelques cas particuliers et plus simples, que nous allons exposer ici.

17. Cas particulier de mouvements aux deux côtés d'une enveloppe sphérique, perméable. — Admettons qu'il n'y ait qu'une seule sphère. L'intérieur de cette sphère creuse, qui doit être immobile et invariable, est rempli d'un fluide dont la densité variera avec le temps: par exemple, la température va changer d'une manière égale partout en dedans. L'épaisseur de l'enveloppe perméable, qui sépare les deux parties du même fluide, est supposée d'être extrêmement mince. Dans l'espace extérieur enfin, la densité du fluide doit être constante: la température en dehors est égale à zéro.

Cela posé, par l'enveloppe poreuse il passe alors un courant radial; et on déterminera facilement les mouvements dans les deux espaces. On reconnaîtra, sans difficulté, que le mouvement en dedans devient une dilatation ou une compression uniforme.

Un cas plus difficile serait celui d'une diffusion, en sens radial, entre deux fluides différents.

18. Autre cas particulier. — Comme auparavant on n'a qu'une seule sphère. Cette sphère, immobile et invariable,

est remplie d'un fluide de la même nature que le fluide en dehors; mais, cette fois, la densité doit aussi être la même des deux côtés de l'enveloppe sphérique. L'epaisseur de cette dernière doit être negligée, comme étant extrêmement petite par rapport au rayon de la sphère.

Cela étant, nous adopterons, d'après le numéro 8, *l'hypothèse mathématique* suivante:

Le fluide passe à travers la sphère; et il se meut dans l'espace extérieur comme si la sphère immobile se deplaçât, au moment donné, avec la vitesse a', b', c', — qui peut varier avec le temps. Ce mouvement étant déterminé par un potentiel, qu'on sait d'ailleurs évaluer, on peut déterminer les composantes de vitesse à chaque point de la surface sphérique. On admettra maintenant que la vitesse à la paroi intérieure doive coïncider avec celle, à la surface extérieure, que nous venons de nommer; de sorte qu'il reste à trouver un mouvement du fluide dans l'intérieur de la sphère, compatible avec celui du fluide entrant ou sortant à sa surface. Du reste, nous nous bornons à donner une seule solution de ce problème, la plus simple de toutes, parce qu'on exprime par des fonctions entières des coordonnées les composantes de vitesse à chaque point.

Dans l'espace intérieur, il doit agir un système de forces accélératrices, convenablement choisies; et, ordinairement, la sphère doit être retenue par une autre force, puisqu'elle est supposée de rester immobile. Les forces accélératrices nommées peuvent être considérées comme résultant des actions entre les particules du fluide qui se trouvent dans l'intérieur de la sphère, conformément aux lois générales des forces rotatoires. Lorsqu'elles s'évanouissent, on aura un courant permanent: la vitesse a', b', c' sera alors constante, et la sphère demeurera en repos, sans qu'il sera plus necessaire, comme on verra, de faire aucun effort. Lorsque la vitesse idéelle a', b', c' varie, de manière à conserver sa direction, on peut prouver qu'on satisfera par des forces accélératrices proportionelles aux vitesses dans le fluide aux points considérés, et d'ailleurs dirigées en même sens ou bien en sens opposé.

19. On peut demander s'il existera un problème physique auquel pourrait être appliqué, au moins jusqu'à un certain degré, la solution du problème mathématique précédent. Nous nous figurons que le problème hydrodynamique suivant soit au moins de quelque ressemblance:

La sphère, que nous venons de nommer, se trouve au milieu du fluide en repos. La pression dans l'espace extérieur doit être assez grande pour que l'enveloppe très mince, mais d'abord imperméable, soit sur le point d'être pénétrée par le fluide; et pour que, de plus, le fluide doive s'attacher au corps, même quand il-y-a de grandes variations dans les mouvements qu'on s'efforce de produire.

Maintenant, on fait mouvoir la sphère; et ensuite, on l'arrête. Par là, la pression sur la face antérieure s'abaisse, celle existant sur la face postérieure s'éleve. Dans l'intérieur de la sphère, le mouvement tend à se continuer. Il résulte de cela une différence, plus ou moins grande, entre les pressions aux deux côtés de l'enveloppe sphérique. En même temps, en dehors de la sphère le fluide passera, de nouveau, d'un état de mouvement à repos.

Mais si l'on fait arrêter la sphère assez rapidement, on peut supposer que les différences entre les pressions des deux cotés deviennent si grandes que le fluide doit enfin pénétrer par les pores de l'enveloppe, qui jusqu'ici devaient être considérés comme fermés; et au lieu de passer à l'état de repos, le fluide continuera son mouvement. De ce moment, le passage étant forcé, et quoique il n'existe plus entre les pressions de si grandes différences, on pourrait admettre que l'enveloppe, à l'avenir, dût être constamment pénétrée par le courant, et cela même assez facilement.

L'hypothèse la plus simple à faire, pour se donner une *idée première* sur les mouvements résultants, serait alors de supposer: que le mouvement dans l'espace infini et extérieur, au commencement du second période, ne doive pas différer sensiblement de celui qui y existât à la fin de la période précédente; et cela, ce qui est un peu plus problématique, même dans le voisinage du corps sphérique. Si le passage du fluide serait depuis absolument libre, on aurait un courant permanent. Si, au contraire, il y avait en dedans des obstacles fixes, on pourrait peut-être, en cas de mouvements lents, en tenir compte d'une manière approximée, par introduction de forces accélératrices proportionelles aux vitesses et dirigées dans le sens contraire.

§ 5

Introduction d'une force qui ne dépend que du temps.

20. L'introduction d'une force, fonction du temps. — Revenons aux problèmes principaux, et essayons encore une fois de généraliser.

Nous supposons, de nouveau, que dans l'expression du potentiel il y ait de l'incompatibilité entre les coefficients et les vitesses du corps; mais nous admettons ici particulièrement que

$$a'_g - \frac{da_g}{dt} = -a', \; b'_g - \frac{db_g}{dt} = -b', \; c'_g - \frac{dc_g}{dt} = -c', \; d'_g - \frac{dd_g}{dt} = 0,$$

quelle que soit la valeur de l'index g.

Le potentiel se décomposera alors (n⁰ 16) en une somme de deux potentiels. Le premier est celui qui correspond aux mouvements et aux variations des sphères, considérées comme des corps imperméables, et il se déterminera par les quantités

$$\frac{da_g}{dt}, \; \frac{db_g}{dt}, \; \frac{dc_g}{dt}, \; \frac{dd_g}{dt}$$

etc. L'autre se rattache à un courant qui traverse les sphères, ces dernières considérées, au moment donné, comme des corps immobiles et invariables. Ce mouvement nouvel est celui qui devait exister dans l'espace extérieur, lorsque à ce même temps toutes les sphères, en restant invariables, se mouvaient avec une vitesse commune, déterminée par les composantes

$$-a', \; -b', \; -c'.$$

Maintenant, si les corps ne devaient être pénétrés par le fluide, il faudrait donner aux sphères la vitesse additionelle

$$-a', \; -b', \; -c';$$

mais, en même temps, on pourrait donner à l'ensemble du fluide et des corps qu'il contient un mouvement commun, déterminé par la vitesse $a', \; b', \; c',$

de sorte que l'on réstitue le mouvement ancien des sphères. Cela reviendra à introduire un troisième potentiel de vitesse

(10) . . . . $V = a'x + b'y + c'z$;

et à supposer, en même temps, qu'il existe dans tous les points du fluide une force accélératrice, dont les trois composantes sont les dérivées par rapport à x, y, z de W, où

(11) . . . . . . $W = \frac{da'}{dt}x + \frac{db'}{dt}y + \frac{dc'}{dt}z$.

Ainsi, *lorsqu'il agit,* dans l'intérieur du fluide, *une force accélératrice qui ne dépend que du temps,* et qui produit, aux parties de ce fluide infiniment éloignées du système des sphères mobiles et variables, la vitesse a', b', c', *on peut former un potentiel* qui déterminera le mouvement du fluide, *en ajoutant à V un potentiel correspondant à* a'_g, b'_g, c'_g, d'_g, etc., *c'est à dire à*

$$\frac{da_g}{dt} - a', \ \frac{db_g}{dt} - b', \ \frac{dc_g}{dt} - c', \ \frac{dd_g}{dt}$$

etc., g étant un index quelconque appartenant à la serie des nombres 1, 2, 3, . . . m.

21. La pression. — Comme on voit, les conditions aux limites seront par là changées, les vitesses ne convergeant plus, à l'infini, vers zéro. Voyons maintenant si la pression peut conserver la propriété essentielle d'être partout positive.

Soit φ_1 le potentiel partiel que nous venons de nommer, et ω le potentiel total; de sorte que

(12) . . . . $\omega = \varphi_1 + V$.

Soit, de plus, p la pression; P la pression limite, qui ne dépend que du temps; T une fonction arbitraire, qui ne dépend aussi que du temps; enfin, q la densité du fluide. Cela posé, on aura

$$\frac{p}{q} = T + W - \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\omega^2}{dx^2} + \frac{d\omega^2}{dy^2} + \frac{d\omega^2}{dz^2}\right) - \frac{d\omega}{dt},$$

et il faut ici déterminer T de sorte que la pression limite peut être égalée à P.

D'après les propriétes que possédent la fonction φ_1 et ses dérivées, on reconnaît facilement qu'à l'infini on doit avoir

$$\frac{P}{q} = T - \tfrac{1}{2}(a'^2 + b'^2 + c'^2).$$

En remettant dans l'équation précédente la valeur de T, et en ayant égard aux équations (10), (11) et (12), on trouvera enfin:

$$\frac{p}{q} = \frac{P}{q} + U - \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi_1^2}{dx^2} + \frac{d\varphi_1^2}{dy^2} + \frac{d\varphi_1^2}{dz^2}\right) - \frac{d\varphi_1}{dt},$$

$$U = -\frac{d\varphi_1}{dx}a' - \frac{d\varphi_1}{dy}b' - \frac{d\varphi_1}{dz}c'.$$

φ_1 et ses dérivées étant continues et finies dans tout l'espace occupé par le fluide et convergeant, à l'infini, vers zéro, il s'ensuivra qu'il sera toujours possible de choisir la valeur limite de manière à ce que la pression p peut être partout positive.

22. Des équations obtenues on tirera encore une autre conséquence, que voici:

Lorsqu'il agit dans l'intérieur du fluide des forces accélératrices qui ne dépendent que du temps, la pression peut être égalée, au moment t, à celle dans un fluide qui dans ses parties infiniment éloignées doit rester en repos; dans le cas dernier, les molécules du fluide doivent encore être soumises à des forces accélératrices dont les composantes sont les dérivées, suivant les coordonnées, d'une seule fonction: cette fonction, différente de W, est la fonction U, que nous venons de définir ci-dessus; les mouvements des sphères doivent ensuite être modifiés, de sorte qu'au lieu des vitesses anciennes $\frac{da_g}{dt}$, $\frac{db_g}{dt}$, $\frac{dc_g}{dt}$, $\frac{dd_g}{dt}$ etc. on aura maintenant

$$\frac{da_g}{dt} - a', \frac{db_g}{dt} - b', \frac{dc_g}{dt} - c', \frac{dd_g}{dt}.$$

De ces quantités et de la vitesse limite dépend aussi, comme on verra facilement, la fonction U. Cette fonction, qui multipliée par q peut être considérée comme une pression partielle avec des valeurs aussi bien négatives que positives, satisfait évidemment à l'équation $\Delta_2 = 0$. Elle reste, de plus, continue et finie avec ses dérivées dans tout l'espace occupé par le fluide, et converge, à l'infini, vers zéro. La force qu'elle définie aura ainsi dans plusieurs rapports des analogies aves les forces ordinaires.

D'ailleurs, ayant sous une autre forme

$$U = -s'\frac{d\varphi_1}{ds},$$

on voit que la fonction U doit être égale au produit de la vitesse limite s′ et la composante de vitesse en x, y, z, $-\frac{d\varphi_1}{ds}$, suivant la direction de celle-là prise en sens contraire. La vitesse nommée se déduit du potentiel φ_1, correspondant au cas le plus simple: que les sphères se meuvent et varient avec les vitesses nouvelles mentionées plus haut; que le fluide se trouve, à l'infini, en état de repos, et que des forces accélératrices n'agissent pas.

23. Transformations en rapportant aux axes mobiles. — Nous allons donner une autre forme à l'équation de pression, en rapportant à un système des axes qui se meuvent parallèlement aux axes anciens, de sorte que la vitesse de l'origine devient égale à la vitesse limite a′, b′, c′. Nous nous rappellerons aussi comment on pourrait déterminer le mouvement cherché d'une autre manière, en commençant par évaluer le mouvement relatif.

Soient a′, b′, c′ les dérivées de a, b, c par rapport au temps, et faisons:

$$x = \xi + a, \quad y = \eta + b, \quad z = \zeta + c.$$

Alors, en observant que les dérivées $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$ doivent être égales aux $-a', -b', -c'$, on trouvera:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right) - a'\frac{d\varphi_1}{d\xi} - b'\frac{d\varphi_1}{d\eta} - c'\frac{d\varphi_1}{d\zeta};$$

où donc $\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)$ doit désigner la dérivée partielle par rapport au temps, ξ, η, ζ étant considérées comme des quantités indépendantes. En ayant égard à la valeur de U, on sera par conséquent conduit à cette équation nouvelle:

$$\frac{p}{q} = \frac{P}{q} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\varphi_1{}^2}{d\xi^2} + \frac{d\varphi_1{}^2}{d\eta^2} + \frac{d\varphi_1{}^2}{d\zeta^2}\right) - \left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right),$$

$\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)$ comprise comme nous venons de l'indiquer.

En combinant avec ce qui est dit au nº 20, on arrivera donc à la conclusion suivante:

Lorsqu'il agit dans l'intérieur du fluide des forces accélératrices qui ne dépendent que du temps, des forces telles qu'à l'infini, la vitesse en chaque point doit tendre indéfiniment vers une limite commune, déterminée par les composantes a′, b′, c′, les mouvements et les pressions dans le fluide peuvent être évalués comme nous allons expliquer.

D'abord *on peut déterminer les mouvements relatifs*, en rapportant à un système d'axes mobiles qui se meut, parallèlement à lui même, avec la vitesse limite a′, b′, c′; et cela, *comme si le fluide était à l'infini en repos, et comme si les forces accélératrices n'existaient pas.* Le potentiel correspondent

$$\varphi_1$$

dépend de ces vitesses nouvelles et relatives que nous venons de nommer ci-dessus

$$\frac{da_g}{dt} - a', \ \frac{db_g}{dt} - b', \ \frac{dc_g}{dt} - c',$$

et ainsi de suite; de plus des vitesses $\frac{dd_g}{dt}$ etc. *Pour passer ensuite aux mouvements absolus, il faut ajouter à* φ_1 *le potentiel* V, *donné par l'équation*

$$V = a'x + b'y + c'z;$$

de sorte que l'on aura, pour déterminer *le potentiel cherché*, comme auparavant:

$$\omega = \varphi_1 + v.$$

La pression en un point quelconque x, y, z se trouve enfin, *en déterminant celle au point relativement fixe* ξ, η, ζ, avec lequel le point premier doit coïncider au temps donné.

CHAPITRE II.

SUR QUELQUES FONCTIONS AUXILIAIRES,

$\varphi'_{ghi\ldots l}$ ET $f_{ghi\ldots l}$.

24. Avant d'essayer de déterminer la forme des potentiels φ', et le degré d'approximation qu'on obtiendra en arrêtant à un terme quelconque des series ou des sommes trouvées, il faut d'abord se poser quelques problèmes préliminaires. Par là, on aura pour but de former les fonctions qui constitueront les termes des sommes en question, ou, au moins, de montrer d'après quelle loi on pourrait les déduire, l'une de l'autre. On étudiera aussi l'ordre de ces

fonctions lorsque les distances centrales croissent au dessus de toute limite.

§ 1.

La fonction φ^i_g.

25. Nous nous proposons le problème suivante:

Trouver une fonction φ^i_g *qui satisfait à l'équation différentielle* $\Delta_2 = 0$, *et qui remplit. à la surface de la sphère* S_g, *la condition* (n°5):

$$(13) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{d\varphi^i_g}{dn_g} = N^i_g.$$

La fonction et ses dérivées par rapport à x, y, z *doivent de plus avoir des valeurs uniques, restant finies et continues, dans tout l'espace infini qui entoure la sphère* S_g, *et enfin tendre indéfiniment vers zéro à mesure que l'on s'éloigne de plus en plus du centre de la même sphère.*

On verra, sans difficulté, que les fonctions cherchées seront:

$$(14) \quad \ldots\ldots \quad \begin{aligned} \varphi^0_g &= -d'_g \cdot \frac{d^2_g}{r_g}, \\ \varphi'_g &= -\tfrac{1}{2}s'_g \cdot \frac{d^3_g}{r^2_g} \cos(s'_g\, r_g). \end{aligned}$$

En effet, elles satisfont à l'équation différentielle $\Delta_2 = 0$. Ensuite, comme on aura ici $\frac{d}{dn}$ égale à $\frac{d}{dr}$, parce que la normale dirigée en dedans, c'est à dire vers l'espace dans lequel doit subsister l'équation différentielle donnée, coïncide avec la normale extérieure de la sphère, on conclura facilement que les fonctions à droite doivent satisfaire aussi à la condition (13). Ces fonctions, possédant enfin évidemment les autres propriétés demandées, seront par conséquent les fonctions cherchées φ^i_g.

26. Les fonctions trouvées résolvent complétement le problème hydrodynamique proposé dans le cas particulier qu'il n'existe qu'une seule sphère S_g. Alors on aura même l'équation exacte du potentiel que l'on demande.

Du reste, dans le voisinage de la sphère S_g, la fonction φ^i_g et ses derivées seront finies et différentes de zéro. A distances infinies de cette sphère, l'ordre de la fonction est égal à $i+1$, et celui de ses dérivées par rapport à x, y, z égal à $2+i$.

§ 2.

Les fonctions $\varphi^i_{ghj\ldots lp}$.

27. Détermination au moyen des series; les termes de $\varphi^i_{ghj\ldots lp}$ par ceux de $\varphi^i_{ghj\ldots l}$. — Considérons maintenant les fonctions nouvelles:

$$\varphi^i_{gh},\ \varphi^i_{ghj}, \ldots \varphi^i_{ghj\ldots l},\ \varphi^i_{ghj\ldots lp}, \ldots$$

dont le nombre des index soit plus grand que 1. *Les index* g, h, j... l, p.. *appartiennent à la suite de nombres* 1, 2, 3, ... m, qui désigneront les index diverses des m sphères. Elles peuvent être choisies arbitrairement, autant que subsistent les *inégalités*:

$$(15) \quad \ldots \quad g \gtrless h,\ h \gtrless j, \ldots l \gtrless p, \ldots$$

Les fonctions nommées sont définies comme il suit:

La fonction $\varphi^i_{ghj\ldots lp}$ *satisfait à l'équation différentielle* $\Delta_2 = 0$, *et remplit, à la surface de* S_p, *la condition:*

$$(16) \quad \ldots \quad \frac{d\varphi^i_{ghj\ldots lp}}{dn_p} + \frac{d\varphi^i_{ghj\ldots l}}{dn_p} = 0.$$

La fonction et ses dérivées par rapport x, y, z *doivent de plus avoir des valeurs uniques, restant finies et continues, dans tout l'espace infini qui entoure la sphère* S_p, *et enfin, elles doivent tendre indéfiniment vers zéro, à mesure que l'on s'éloigne de plus en plus du centre* p *de la dite sphère.*

Cela posé, nous nous proposons de *déterminer la fonction* $\varphi^i_{ghj\ldots lp}$, *la précédente* $\varphi^i_{ghj\ldots l}$ *étant supposée d'être connue.*

28. D'après les propriétés attribuées à la dernière fonction $\varphi^i_{ghj\ldots l}$, qui particulièrement est finie et continue avec ses dérivées par rapport à x, y, z dans tout l'espace entourant la sphère S_l, on peut la développer de la manière suivante autour du centre l:

$$(17) \quad \ldots \quad \varphi^i_{ghj\ldots l} = \sum_{0,\infty}^{n} \frac{Z_n}{r_l^{n+1}},$$

Z_n étant une fonction de sphère de l'ordre n.

En rapportant à un système polaire dont le pole est p, le centre de la sphère S_p, l'équation précédente se transformera en

$$(18) \quad \ldots \quad \varphi^i_{ghj\ldots l} = \sum_{0,\infty}^{n} r_p^n X_n;$$

où X_n sera aussi une fonction de sphère, de l'ordre n. Les sphères S_l et S_p ne se coupant ou se touchant pas les unes les autres, la fonction restera finie et continue dans l'intérieur d'une certaine sphère idéelle T_p, concentrique à S_p, et dont le rayon δ_p est plus grand que d_p. Il s'ensuivra qui le développement nouveau subsiste pour toutes les valeurs de r_p entre o et δ_p.

Cela étant, on démontrera maintenant comme il suit que

$$(19) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varphi^i_{ghj\ldots lp} = \sum_{0,\infty}^{n} \frac{n}{n+1} \frac{d_p^{2n+1}}{r_p^{n+1}} X_n;$$

où donc r_p doit être égale ou plus grande que d_p.

À cause de la convergeance de la serie (18), pour une valeur de r_p égale à δ_p, la valeur numérique de

$$\lim \frac{\delta_p X_{n+1}}{X_n}$$

doit être égale ou plus petite que l'unité, n croissant indéfiniment. De là on conclut d'abord que la serie que nous venons d'écrire (19) converge pour toutes les valeurs de r_p, depuis r_p égale à d_p jusqu'à r_p égale à l'infini. En effet, la limite du rapport d'un terme au précédent devient

$$\lim \frac{d_p^2}{r_p} \cdot \frac{X_{n+1}}{X_n},$$

dont la valeur numérique pour les valeurs de r_p ci-dessus nommées est plus petite que l'unité, d_p étant moindre que δ_p.

En différentiant par rapport à r_p, on formera les series nouvelles :

$$\frac{d\varphi^i_{ghj\ldots l}}{dr_p} = \sum_{0,\infty}^{n} n r_p^{n-1} X_n,$$

$$-\sum_{0,\infty}^{n} n \frac{\delta_p^{2n+1}}{r_p^{n+2}} X_n,$$

qui seront encore convergeantes, la première depuis r_p égale à zéro jusqu'à r_p égale à d_p inclusive, la seconde depuis r_p égale à d_p inclusive jusqu'à l'infini. En effet, en formant la limite du rapport d'un terme au précédent, ou trouvera, dans l'un et l'autre cas,

$$\lim r_p \cdot \frac{X_{n+1}}{X_n} \quad \text{et} \quad \lim \frac{d^2_p}{r_p} \cdot \frac{X_{n+1}}{X_n},$$

dont les valeurs numériques sont toutes les deux plus petites que celle de l'expression

$$\lim \frac{d_p X_{n+1}}{X_n},$$

et, par conséquent, plus petites que l'unité; et cela même, en donnant dans le cas premier à r_p sa plus grande valeur d_p, dans le second sa plus petite, qui est aussi celle du rayon de la sphère S_p.

En vertu de ce qui précède, pouvant dans les series nouvelles substituer r_p égale à d_p, sans qu'elles cessent d'être convergeantes, on reconnaîtra que la condition à la surface de S_p (16) doit être remplie en prenant pour la fonction $\varphi^i_{ghj..lp}$ la serie définie par l'équation (19). Or, comme la fonction dernière, avec ses dérivées par rapport à x, y, z, reste finie et continue partout en dehors de la sphère S_p, comme elle tend, à l'infini, vers zéro, comme elle satisfait enfin à l'équation fondamentale $\Delta_2 = o$, on conclut qu'elle sera réellement la fonction cherchée $\varphi^i_{ghj...lp}$; ce qu'il fallait démontrer.

29. Solutions en formes finies; la fonction $\varphi^i_{ghj...lp}$ par la fonction $\varphi^i_{ghj...l}$. — La détermination précédente de la fonction $\varphi^i_{ghj...lp}$ suppose que l'on connaisse déjà le développement de $\varphi^i_{ghj...l}$ autour du centre p de la sphère S_p. Les termes doivent alors être modifiés d'après la loi que nous venons d'indiquer ci-dessus.

Cependant la fonction $\varphi^i_{ghj...lp}$ pourrait être trouvée sans qu'il fût necessaire de déterminer d'abord les termes de la serie en question. Nous supposerons seulement qu'on sache exprimer la fonction $\varphi^i_{ghj...l}$ en coordonnées polaires nouvelles, le centre p étant le pole.

Après avoir effectué la transformation mentionée, nous admettons que l'on ait trouvé:

$$(20) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varphi^i_{ghj...l} = \psi^i_{ghj...l}(r_p, \omega_p, \Theta_p),$$

ou plus simplement $\psi^i_{ghj...l}(r_p)$. r_p désignera le rayon vecteur au point M, mené du centre p; ω_p sera l'angle compris entre ce rayon et l'axe polaire; Θ_p enfin l'angle dièdre que forme avec un plan fixe, passant par l'axe polaire, un autre plan, déterminé par cette ligne dernière et le rayon vecteur.

Cela posé, comparons les termes généraux dans les équations (18) et (19).

De la première de ces deux équations on peut déduire la seconde de la manière suivante. Dans le terme général, mettons à la place de r_p la quantité conjuguée $r_p^{(\pi)}$, déterminée par l'équation:

$$(21) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad r_p^{(\pi)} = \frac{\pi^2}{r_p};$$

différentions ensuite par rapport à π; multiplions enfin avec $\frac{r_p^{(\pi)}}{d_p}$, et intégrons entre les limites 0 et d_p. L'expression nouvelle sera le terme général de la serie seconde. On le reconnaît facilement, en remarquant que

$$\frac{1}{d_p}\int_0^{d_p}\frac{d}{d\pi}\left(\frac{\pi^{2n}}{r_p^{\,n}}\right)\cdot\frac{\pi^2}{r_p}\,d\pi = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{d_p^{\,2n+1}}{r_p^{\,n+1}}.$$

De là, on conclut immédiatement: que la fonction cherchée peut s'exprimer, en forme finie, comme il suivra

$$(22) \quad . \; . \; . \; . \quad \varphi^i_{ghj\ldots lp} = \frac{1}{d_p}\int_0^{d_p}\frac{d}{d\pi}\left(\frac{1}{r_p}\,\psi^i_{ghj\ldots l}\left(\frac{\pi^2}{r_p},\ \omega_p,\ \Theta_p\right)\right).\pi^2 d\pi.$$

À l'aide de l'équation (21), on en tirera aussi:

$$(23) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \varphi^i_{ghj\ldots lp} = \frac{1}{d_p}\int_0^{\frac{d_p^{\,2}}{r_p}}\rho\cdot\frac{d}{d\rho}\,\psi^i_{ghj\ldots l}(\rho,\ \omega_p,\ \Theta)\,d\rho.$$

30. On peut donner à la fonction trouvée encore d'autres formes, qui nous seront utiles plus tard.

Les points

$$(r_p, \omega_p, \Theta_p), \quad (r_p^{(\pi)}, \omega_p, \Theta_p)$$

ou

$$(x, y, z), \quad (x^{(\pi)}, y^{(\pi)}, z^{(\pi)})$$

étant des points conjugués, par rapport à une sphère concentrique à S_p et dont le rayon π est égal ou plus petit que d_p, $x^{(\pi)}$, $y^{(\pi)}$, $z^{(\pi)}$ se déterminent par les équations:

$$x^{(\pi)}-a_p : r_p^{(\pi)} = x - a_p : r_p,$$

(24) . . . . . $$y^{(\pi)}-b_p : r_{p_i}^{(\pi)} = y - b_p : r_p,$$

$$z^{(\pi)}-c_p, : r_p^{(\pi)} = z - c_p : r_p,$$

auxquelles il faut ajouter l'équation (21).

Cela posé, après avoir exprimé par x, y, z la fonction $\varphi^i_{ghj...l}$:

(25) . . . . . . $$\varphi^i_{ghj..l} = \psi^i_{ghj...l}(x, y, z),$$

on déduit pour la fonction cherchée, des équations (22) et (23), les formes nouvelles:

$$\varphi^i_{ghj...lp} = \frac{1}{d_p}\int_0^{d_p} \frac{d}{d\pi}\left(\frac{1}{r_p}\,\psi^i_{ghj...l}(x^{(\pi)}, y^{(\pi)}, z^{(\pi)})\right).\,\pi^2 d\pi,$$

(26) . .

$$\varphi^i_{ghj...lp} = \frac{1}{d_p}\int_0^{\frac{d_p^2}{r_p}} \rho \cdot \frac{d}{d\rho}\,\psi^i_{ghj...l}(x^{(\pi)}, y^{(\pi)}, z^{(\pi)})\,d\rho.$$

31. Vérification. — On vérifiera d'abord que la fonction $\varphi^i_{ghj...lp}$, ainsi déterminée, satisfait à l'équation différentielle $\Delta_2 = 0$.

En effet, il est supposé que $\varphi^i_{ghj...l}$, c'est à dire $\psi^i_{ghj...l}(r_p, \omega_p, \Theta)$, satisfasse à la même équation. D'après un théorème connu, on en obtiendra une intégrale nouvelle:

$$\frac{1}{r_p}\,\psi^i_{ghj...l}\left(\frac{\pi^2}{r_p}, \omega_p, \Theta_p\right),$$

et on formera enfin une integrale coïncidant avec celle donnée par l'expression (22), en différentiant par rapport à π, en multipliant ensuite avec $\frac{\pi^2}{d_p}$, et en intégrant entre les limites o et d_p. Donc, $\varphi^i_{ghj...lp}$ satisfait aussi à l'équation différentielle $\Delta_2 = o$: ce qu'il fallait démontrer.

32. Pour prouver qu'à la surface de la sphère S_p on satisfait encore à la condition essentielle (16), nous partirons de l'équation seconde, (23), par laquelle est représentée la fonction $\varphi^i_{ghj...lp}$.

On en trouvera immédiatement:

$$\frac{d\varphi^i_{ghj...lp}}{dr_p} = -\frac{d_p^3}{r_p^3}\left(\frac{d}{d\rho}\,\psi^i_{ghj...l}(\rho, \omega_p, \Theta_p)\right)_{\frac{d_p^2}{r_p}}:$$

et comme aussi

$$\frac{d\varphi^i_{ghj\ldots l}}{dr_p} = \frac{d}{dr_p}\psi^i_{ghj\ldots l}(r_p, \omega_p, \Theta_p),$$

on arrivera à l'équation cherchée, en ajoutant les deux équations et en substituant ensuite r_p égale à d_p.

33. Nous allons maintenant démontrer que, si la fonction $\varphi^i_{ghj\ldots l}$ et ses dérivées par rapport aux x, y, z sont continues et finies dans tout l'espace infini qui entoure la sphère S_l, $\varphi^i_{ghj\ldots lp}$ et ses dérivées par rapport aux mêmes coordonnées seront aussi continues et finies, dans tout l'espace entourant la sphère S_p.

En vertu de ce que nous venons d'admettre, on voit, de l'équation (20), que $\psi^i_{ghj\ldots l}(r_p, \omega_p, \Theta_p)$ et ses dérivées par rapport aux coordonnées seront finies et continues, pour peu que le point $(r_p, \omega_p, \Theta_p)$ soit situé en dehors de la sphère S_l. Pareillement, la fonction $\psi^i_{ghj\ldots l}\left(\frac{\pi^2}{r_p}, \omega_p, \Theta_p\right)$ et ses dérivées seront aussi finies et continues, pourvu que le point $\left(\frac{\pi^2}{r_p}, \omega_p, \Theta_p\right)$ soit placé en dehors de la même sphère: ce qui, en effet, aurait lieu particulièrement, lorsqu'il était choisi dans l'intérieur ou à la surface d'une sphère $S_p^{(\pi)}$, concentrique à S_p, et d'un rayon π égal ou plus petit que d_p. Mais, quand un point $(r_p, \omega_p, \Theta_p)$ est situé en dehors de la sphère S_p, le point conjugué $\left(\frac{\pi^2}{r_p}, \omega_p, \Theta_p\right)$ se trouvera, nécessairement, dans l'intérieur de la sphère concentrique $S_p^{(\pi)}$, et, par conséquent, en dehors de S_l. Il s'ensuivra que la fonction dernièrement considérée $\psi^i_{ghj\ldots l}\left(\frac{\pi^2}{r_p}, \omega_p, \Theta_p\right)$ et ses dérivées par rapport aux coordonnées seront toujours continues et finies, autant que le point $(r_p, \omega_p, \Theta_p)$ soit situé en dehors de la sphère S_p.

Au moyen de l'équation (22), on en tire la conclusion que la fonction $\varphi^i_{ghj\ldots lp}$, avec ses dérivées, doit avoir aussi la même propriété; ce qu'il fallait démontrer.

34. Il reste à prouver que $\varphi^i_{ghj\ldots lp}$ et ses dérivées, par rapport aux x, y, z, tendent vers zéro, à mesure que l'on s'éloigne de plus en plus du système des corps, et cela, quelle que soit d'ailleurs la direction dans laquelle on part.

Considérons, en effet, un point infiniment éloigné $(r_p, \omega_p, \Theta_p)$, où donc r_p tend vers l'infini. Le point conjugué $\left(\frac{\pi^2}{r_p}, \omega_p, \Theta_p\right)$ tendra alors, évidemment, vers le centre p de la sphère S_p. Or, comme la fonction $\varphi^i_{ghj\ldots l}$ est continue et finie dans le voisinage de ce point, et aura ici, en chaque point, une valeur déterminée et unique, il s'ensuivra que la fonction $\psi^i_{ghj\ldots l}\left(\frac{\pi^2}{r_p}, \omega_p, \Theta_p\right)$ peut être développée comme il suit:

$$X_0 + \frac{\pi^2}{r_p} X_1 + \ldots;$$

où donc X_0, X_1 etc. ne dependent ni de π, ni de r_p, et, en outre, X_0 ne variera pas avec les angles ω_p et Θ_p. La fonction $\varphi^i_{ghj\ldots l}$ ou $\psi^i_{ghj\ldots l}(r_p, \omega_p, \Theta_p)$ satisfaisant à l'équation différentielle $\Delta_2 = 0$, on peut même remarquer que les coefficientes X_0. X_1 etc. sont des fonctions de sphère; par conséquent, ils sont aussi continus, avec ses dérivées par rapport à ω_p où à Θ_p.

Maintenant, si l'on multiplie avec $\frac{1}{r_p}$, et qu'on forme ensuite la dérivée par rapport à π, on obtiendra une expression nouvelle, qui convergera vers zéro comme une quantité du deuxième ordre, r_p croissant vers l'infini comme une quantité du premier ordre. En accomplissant les opérations restantes, indiquées par l'équation (22), on arrivera au même résultat pour la fonction $\varphi^i_{ghj\ldots lp}$; ce que nous nous avions proposé d'établir.

On voit, de plus, qu'en effectuant ensuite les operations nouvelles:

$$(27) \quad \ldots\ldots \quad \frac{d}{dr_p}, \quad \frac{1}{r_p}\cdot\frac{d}{d\omega_p}, \quad \frac{1}{r_p \sin\omega_p}\cdot\frac{d}{d\omega_p},$$

les fonctions trouvées convergeront vers zéro comme des quantités du troisième ordre, $\frac{1}{r_p}$ étant du premier. De là on conclut enfin, sans difficulté, que les trois dérivées de la fonction $\varphi^i_{ghj\ldots lp}$ par rapport aux coordonnées x, y, z ont toutes la même propriété. L'autre partie de la proposition à démontrer sera donc aussi vérifiée.

Du reste, ce qui précède ne s'applique pas, évidemment, à la fonction φ^i_g, — qui tend vers zéro comme une quantité de l'ordre $1+i$, tandis que ses trois dérivées sont d'un ordre plus haut, égal à $2+i$.

§ 3.

Les fonctions f_g et $f_{ghj\ldots lp}$, par lesquelles peuvent être déterminées φ^i_g et $\varphi^i_{ghj\ldots lp}$.

35. Définitions. — Au lieu de considérer les sphères S_g, S_h, S_j, . . S_l, S_p, qui coïncident avec les données S_1, S_2, S_3, . . . S_m, quelque grand que soit le nombre des index $g, h, j, \ldots l, p$, nous considérons ici un *autre système de sphères* $S_{\mathfrak{g}}$, $S_{\mathfrak{h}}$, $S_{\mathfrak{j}}$, . . . $S_{\mathfrak{l}}$, $S_{\mathfrak{p}}$, *toutes différentes entre elles, les index* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{j}$, .. $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{p}$ *étant des nombres entiers quelconques.* Les positions de leurs centres et les grandeurs de leurs rayons sont données par les quantités

$$a_{\mathfrak{g}},\ b_{\mathfrak{g}},\ c_{\mathfrak{g}},\ d_{\mathfrak{g}},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{\mathfrak{p}},\ b_{\mathfrak{p}},\ c_{\mathfrak{p}},\ d_{\mathfrak{p}}.$$

Cela posé, les fonctions $f_{\mathfrak{g}}$, . . $f_{\mathfrak{ghj}\ldots\mathfrak{lp}}$ doivent être définies de la manière suivante:

La fonction $f_{\mathfrak{g}}$ *doit satisfaire à l'équation différentielle* $\Delta_2 = 0$ dans tout l'espace extérieur qui entoure la sphère $S_{\mathfrak{g}}$. *Elle doit y être continue et finie, avec ses dérivées par rapport aux coordonnées, et avoir des valeurs uniques; enfin, elle doit converger, à l'infini, vers zéro. À la surface de* $S_{\mathfrak{g}}$, *il faut avoir:*

$$\frac{df_{\mathfrak{g}}}{dn_{\mathfrak{g}}} = 1. \tag{28}$$

La fonction $f_{\mathfrak{ghj}\ldots\mathfrak{lp}}$, correspondant à un nombre des index plus grand que 1, *doit satisfaire à l'équation* $\Delta_2 = 0$ dans tout l'espace extérieur qui entoure la sphère $S_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p}$ étant le dernier index. *Elle doit y être continue et finie, avec ses dérivées par rapport aux coordonnées, et avoir des valeurs uniques; enfin, elle doit converger, à l'infini, vers zéro. À la surface de* $S_{\mathfrak{p}}$, *il faut avoir:*

$$\frac{df_{\mathfrak{ghj}\ldots\mathfrak{l}}}{dn_{\mathfrak{p}}} + \frac{df_{\mathfrak{ghj}\ldots\mathfrak{lp}}}{dn_{\mathfrak{p}}} = 0. \tag{29}$$

36. Détermination de φ^i_g par $f_{\mathfrak{g}}$. — On peut facilement démontrer que:

$$(30) \quad \ldots \quad \begin{cases} \varphi^{(0)}{}_g = \left\{ \dfrac{d_{\mathfrak{g}}}{2} \cdot \dfrac{df_{\mathfrak{g}}}{dd_{\mathfrak{g}}} d'_{\mathfrak{g}} \right\} = \dfrac{d_g}{2} \cdot \dfrac{df_g}{dd_g} d'_g, \\[2ex] \varphi^{(1)}{}_g = \left\{ \dfrac{d_{\mathfrak{g}}}{2} \cdot \dfrac{df_{\mathfrak{g}}}{ds_{\mathfrak{g}}} s'_{\mathfrak{g}} \right\} = \dfrac{d_g}{2} \cdot \dfrac{df_g}{ds_g} s'_g; \end{cases}$$

où l'on indique par la parenthèse que l'index $\mathfrak{g}$ doit être changé en g, les opérations effectuées.

En effet, on a évidemment

$$f_{\mathfrak{g}} = -\frac{d_{\mathfrak{g}}^2}{r_{\mathfrak{g}}};$$

en remarquant donc que

$$\frac{df_{\mathfrak{g}}}{ds_{\mathfrak{g}}} s'_{\mathfrak{g}} = \frac{df_{\mathfrak{g}}}{da_{\mathfrak{g}}} a'_{\mathfrak{g}} + \frac{df_{\mathfrak{g}}}{db_{\mathfrak{g}}} b'_{\mathfrak{g}} + \frac{df_{\mathfrak{g}}}{dc_{\mathfrak{g}}} c'_{\mathfrak{g}},$$

on voit que les deux expressions renfermées entre les crochets prennent les formes suivantes:

$$-d'_{\mathfrak{g}} \cdot \frac{d_{\mathfrak{g}}^2}{r_{\mathfrak{g}}^2}$$

et

$$-\tfrac{1}{2} a'_{\mathfrak{g}} \cdot \frac{d_{\mathfrak{g}}^3}{r_{\mathfrak{g}}^3} (x - a_{\mathfrak{g}}) - \tfrac{1}{2} b'_{\mathfrak{g}} \cdot \frac{d_{\mathfrak{g}}^3}{r_{\mathfrak{g}}^3} (y - b_{\mathfrak{g}}) - \tfrac{1}{2} c'_{\mathfrak{g}} \cdot \frac{d_{\mathfrak{g}}^3}{r_{\mathfrak{g}}^3} (z - c_{\mathfrak{g}}).$$

La première de ces expressions coïncidera avec la valeur de $\varphi^{(0)}{}_g$, lorsqu'on y remet g à la place de $\mathfrak{g}$. Quant à la seconde, elle aura, après une substitution analogue, la valeur de $\varphi^{(1)}{}_g$: ce que l'on reconnaît immédiatement en observant qu'elle peut aussi être écrite

$$-\tfrac{1}{2} s'_{\mathfrak{g}} \cdot \frac{d_{\mathfrak{g}}^3}{r_{\mathfrak{g}}^2} \cos(s'_{\mathfrak{g}}\, r_{\mathfrak{g}}).$$

37. Détermination de $\varphi'_{ghj\ldots lp}$ par $f_{\mathfrak{ghj}\ldots\mathfrak{lp}}$. — On peut également démontrer que:

$$(31) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \varphi^{(0)}{}_{ghj\ldots lp} = \left\{ \dfrac{d_{\mathfrak{g}}}{2} \cdot \dfrac{df_{\mathfrak{ghj}\ldots\mathfrak{lp}}}{dd_{\mathfrak{g}}} . d'_{\mathfrak{g}} \right\}, \\[2ex] \varphi^{(1)}{}_{ghj\ldots lp} = \left\{ \dfrac{d_{\mathfrak{g}}}{2} \cdot \dfrac{df_{\mathfrak{ghj}\ldots\mathfrak{lp}}}{ds_{\mathfrak{g}}} . s'_{\mathfrak{g}} \right\}, \end{cases}$$

les parenthèses indiquant qu'il faut changer les index $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{j}, \ldots \mathfrak{l}, \mathfrak{p}$ en g. h. j. . . . l. p. après avoir effectué les opérations.

Pour le prouver, observons d'abord que $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{p}$, comme des index arbitraires, soient supposés d'être différents; ce qui ne sera pas (nº 27) nécessairement le cas avec g et p, lorsque le nombre des index est plus grand que 2. Cela posé, partons de l'équation de condition (29); prenons la dérivée par rapport à $e_{\mathfrak{g}}$,

e_g étant une quelconque des quantités a_g, b_g, c_g, d_g, et cherchons enfin à transformer l'équation nouvelle que nous trouvons ainsi:

$$\frac{d}{de_g}\left(\frac{df_{\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{j}\ldots\mathfrak{l}}}{dn_\mathfrak{p}} + \frac{df_{\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{j}\ldots\mathfrak{l}\mathfrak{p}}}{dn_\mathfrak{p}}\right) = 0.$$

Les élements de_g et $dn_\mathfrak{p}$ étant indépendants, comme il résulte de ce que nous venons de remarquer, l'équation précédente peut être écrite:

$$\frac{d}{dn_\mathfrak{p}}\left(\frac{df_{\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{j}\ldots\mathfrak{l}}}{de_g}\right) + \frac{d}{dn_\mathfrak{p}}\left(\frac{df_{\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{j}\ldots\mathfrak{l}\mathfrak{p}}}{de_g}\right) = 0.$$

Dans cette équation, on peut remplacer les index $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{j}, \ldots \mathfrak{l}, \mathfrak{p}$ par $g, h, j, \ldots l, p$, après avoir effectué le calcul. Mais, comme on a

$$\frac{dF}{dn_\mathfrak{p}} = \frac{dF}{dx}\cdot\frac{x-a_\mathfrak{p}}{r_\mathfrak{p}} + \frac{dF}{dy}\cdot\frac{y-b_\mathfrak{p}}{r_\mathfrak{p}} + \frac{dF}{dz}\cdot\frac{z-c_\mathfrak{p}}{r_\mathfrak{p}}$$

et, par conséquent,

$$\left\{\frac{dF}{dn_\mathfrak{p}}\right\} = \frac{d\{F\}}{dx}\cdot\frac{x-a_p}{r_p} + \frac{d\{F\}}{dy}\cdot\frac{y-b_p}{r_p} + \frac{d\{F\}}{dz}\cdot\frac{z-c_p}{r_p},$$

c'est à dire

$$\left\{\frac{dF}{dn_\mathfrak{p}}\right\} = \frac{d\{F\}}{dn_p},$$

il vient:

$$\frac{d}{dn_p}\left\{\frac{df_{\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{j}\ldots\mathfrak{l}}}{de_g}\right\} + \frac{d}{dn_p}\left\{\frac{df_{\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{j}\ldots\mathfrak{l}\mathfrak{p}}}{de_g}\right\} = 0.$$

Et de là il s'ensuivra qu'on aura aussi:

$$\frac{d}{dn_p}\left\{\frac{d_g}{2}\cdot\frac{df_{\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{j}\ldots\mathfrak{l}}}{dd_g}d'_g\right\} + \frac{d}{dn_p}\left\{\frac{d_g}{2}\cdot\frac{df_{\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{j}\ldots\mathfrak{l}\mathfrak{p}}}{dd_g}d'_g\right\} = 0,$$

$$\frac{d}{dn_p}\left\{\frac{d_g}{2}\cdot\frac{df_{\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{j}\ldots\mathfrak{l}}}{ds_g}s'_g\right\} + \frac{d}{dn_p}\left\{\frac{d_g}{2}\cdot\frac{df_{\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{j}\ldots\mathfrak{l}\mathfrak{p}}}{ds_g}s'_g\right\} = 0.$$

Ces équations trouvées, on déduit de celles que nous venons d'établir au numéro 36 que:

$$\varphi^{(0)}_{gh} = \left\{\frac{d_g}{2}\cdot\frac{df_{\mathfrak{g}\mathfrak{h}}}{dd_g}d'_g\right\},$$

$$\varphi^{(1)}_{gh} = \left\{\frac{d_g}{2}\cdot\frac{df_{\mathfrak{g}\mathfrak{h}}}{ds_g}s'_g\right\}.$$

De là on déduit encore:

$$\varphi^{(0)}_{ghj} = \left\{\frac{d_g}{2} \cdot \frac{df_{gbi}}{dd_g} d'_g\right\},$$

$$\varphi^{(1)}_{ghj} = \left\{\frac{d_g}{2} \cdot \frac{df_{gbi}}{ds_g} s'_g\right\},$$

et ainsi de suite. La proposition est donc démontrée.

37. Lorsqu'il y a au plus deux index, on peut écrire plus simplement :

$$\varphi^{(0)}_g = \frac{d_g}{2} \cdot \frac{df_g}{dd_g} d'_g,$$

$$\varphi^{(1)}_g = \frac{d_g}{2} \cdot \frac{df_g}{ds_g} s'_g,$$

et

$$\varphi^{(0)}_{gh} = \frac{d_g}{2} \cdot \frac{df_{gh}}{dd_g} d'_g,$$

$$\varphi^{(1)}_{gh} = \frac{d_g}{2} \cdot \frac{df_{gh}}{ds_g} s'_g;$$

ce qui est permis parce que g et h doivent toujours être différents.

Lorsqu'au contraire, le nombre des index est plus grand, on ne peut que dans des cas particuliers simplifier les expressions comme nous venons de le faire. Si l'on a, par exemple, les trois index suivants g, h, j, on doit avoir aussi $g \gtrless h$, $h \gtrless j$, mais rien n'empêche que la valeur de g ne puisse être attribuée au dernier index j. Alors on ne peut ôter les parenthèses, — qui indiquent qu'il faut différentier par rapport à a_g, b_g, c_g, d_g, en supposant que a_i, b_i, c_i, d_i en diffèrent et en sont indépendants, et substituer ensuite g, h, j au lieu de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, j, soit que j et g doivent être égaux ou inégaux.

39. Sur la formation des fonctions $f_{abj\ldots l}$. — Les fonctions $f_{abj\ldots l}$ étant analogues aux fonctions $\varphi^{(i)}_{ghj\ldots l}$, on conclut, de la même manière qu'auparavant (n° 27), qu'elles sont de la forme suivante :

$$(32) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad f_{gbi\ldots l} = \sum_{0,\infty}^{n} \frac{\mathfrak{Z}_n}{r_l^{n+1}},$$

où $\mathfrak{Z}_n$ doit être une fonction de sphère de l'ordre n.

En rapportant à un système polaire nouveau, dont le pole est le centre $\mathfrak{p}$ de la sphère $S_{\mathfrak{p}}$, l'équation précédente se transformera en celle-ci :

$$(33) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; f_{\mathfrak{ghi}\ldots\mathfrak{l}} = \sum_{0,\infty}^{n} r_{\mathfrak{p}}^{n} \mathfrak{X}_n ,$$

où $\mathfrak{X}_n$ sera aussi une fonction de sphère de l'ordre n. Cette dernière formule subsiste dans le voisinage du point $\mathfrak{p}$, la première dans tout l'espace qui entoure la sphère $S_{\mathfrak{l}}$.

On déduit enfin que

$$(34) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; f_{\mathfrak{ghi}\ldots\mathfrak{lp}} = \sum_{0,\infty}^{n} \frac{n}{n+1} \frac{d_{\mathfrak{p}}^{2n+1}}{r_{\mathfrak{p}}^{n+1}} \mathfrak{X}_n ;$$

et on aura encore un développement convergent, pour tous les points dans l'espace infini entourant la sphère $S_{\mathfrak{p}}$.

40. On peut aussi former les fonctions nommées en opérant comme nous l'avons fait voir au nº 30. Ainsi, il faut d'abord exprimer les fonctions par x, y, z, en faisant par conséquent

$$(35) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; f_{\mathfrak{ghi}\ldots\mathfrak{l}} = F_{\mathfrak{ghi}\ldots\mathfrak{l}}(x, y, z).$$

Cela posé, on aura ensuite:

$$(36) \qquad f_{\mathfrak{ghi}\ldots\mathfrak{lp}} = \frac{1}{d_{\mathfrak{p}}} \int_0^{d_{\mathfrak{p}}} \frac{d}{d\pi} \left(\frac{1}{r_{\mathfrak{p}}} F_{\mathfrak{ghi}\ldots\mathfrak{l}} (x^{(\pi)}, y^{(\pi)}, z^{(\pi)}) \right) \pi^2 d\pi ;$$

où donc

$$(37) \quad . \; . \; . \; \begin{aligned} x^{(\pi)} - a_{\mathfrak{p}} : r_{\mathfrak{p}}^{(\pi)} &= x - a_{\mathfrak{p}} : r_{\mathfrak{p}}, \\ y^{(\pi)} - b_{\mathfrak{p}} : r_{\mathfrak{p}}^{(\pi)} &= y - b_{\mathfrak{p}} : r_{\mathfrak{p}}, \\ z^{(\pi)} - c_{\mathfrak{p}} : r_{\mathfrak{p}}^{(\pi)} &= z - c_{\mathfrak{p}} : r_{\mathfrak{p}}, \\ r_{\mathfrak{p}} . r_{\mathfrak{p}}^{(\pi)} &= \pi^2. \end{aligned}$$

π sera le rayon d'une sphère concentrique à $S_{\mathfrak{p}}$, π d'ailleurs plus petit que $d_{\mathfrak{p}}$. Par rapport à cette sphère intérieure du rayon π, les points $x^{(\pi)}, y^{(\pi)}, z^{(\pi)}$ et x, y, z, situés sur la même ligne droite centrale et dans les distances $r_{\mathfrak{p}}^{(\pi)}$ et $r_{\mathfrak{p}}$ du centre $\mathfrak{p}$, seront des points conjugués.

41. N o t a t i o n s n o u v e l l e s ; s y s t è m e s d e p o i n t s c o n j u g u é s e t r e l a t i o n s. — Avant de continuer, nous allons introduire quelques notations nouvelles.

Soient donnés les points

$$\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{i}, \ldots \mathfrak{k}, \mathfrak{l}, \mathfrak{p},$$

centres des sphères

$$\mathfrak{S}_{\mathfrak{g}},\ \mathfrak{S}_{\mathfrak{h}},\ \mathfrak{S}_{\mathfrak{i}},\ \ldots\ \mathfrak{S}_{\mathfrak{k}},\ \mathfrak{S}_{\mathfrak{l}},\ \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}},$$

et

$$\mathfrak{S}_{\mathfrak{g}}(\gamma),\ \mathfrak{S}_{\mathfrak{h}}(\eta),\ \mathfrak{S}_{\mathfrak{i}}(\iota),\ \ldots\ \mathfrak{S}_{\mathfrak{k}}(\varkappa),\ \mathfrak{S}_{\mathfrak{l}}(\lambda),\ \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}(\pi),$$

dont les rayons seront respectivement

$$d_{\mathfrak{g}},\ d_{\mathfrak{h}},\ d_{\mathfrak{i}},\ \ldots\ d_{\mathfrak{k}},\ d_{\mathfrak{l}},\ d_{\mathfrak{p}},$$

et

$$d_{\gamma},\ d_{\eta},\ d_{\iota},\ \ldots\ d_{\varkappa},\ d_{\lambda},\ d_{\pi},$$

ou, comme nous écrirons plus simplement,

$$\gamma,\ \eta,\ \iota,\ \ldots\ \varkappa,\ \lambda,\ \pi.$$

Cela posé, en partant du point $\mathfrak{g}$, on peut déterminer un système de points conjugués comme il suit :

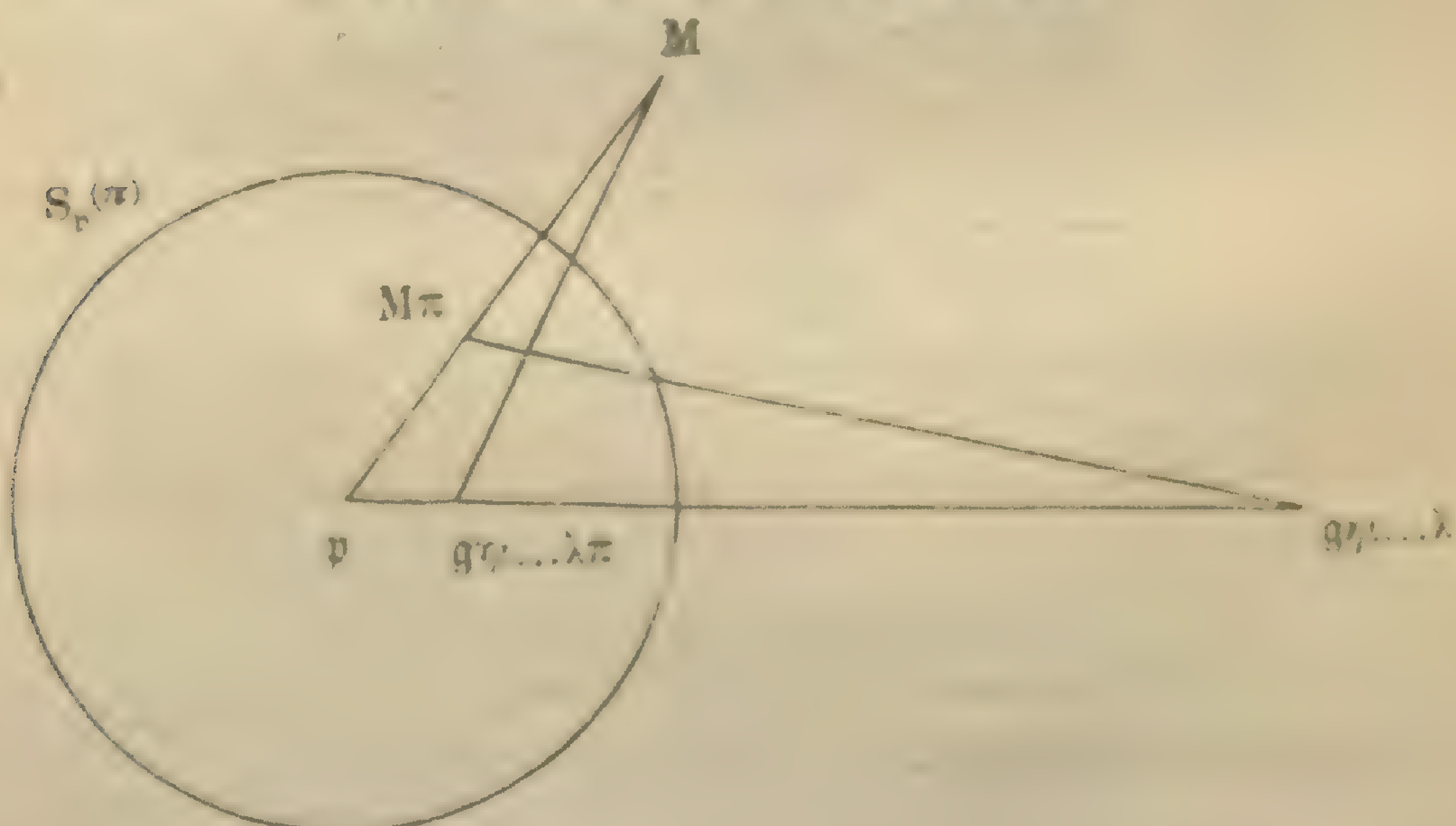
$$(38)\quad \begin{array}{llll}
\mathfrak{g}\eta & \text{conjugué à} & \mathfrak{g} & \text{par rapport à } \mathfrak{S}_{\mathfrak{h}}(\eta). \\
\mathfrak{g}\eta\iota & \ldots\ldots & \mathfrak{g}\eta & \ldots\ldots\ \mathfrak{S}_{\mathfrak{i}}(\iota), \\
\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
\mathfrak{g}\eta\iota\ldots\varkappa\lambda & \ldots\ldots & \mathfrak{g}\eta\iota\ldots\varkappa & \ldots\ldots\ \mathfrak{S}_{\mathfrak{l}}(\lambda), \\
\mathfrak{g}\eta\iota\ldots\varkappa\lambda\pi & \ldots\ldots & \mathfrak{g}\eta\iota\ldots\varkappa\lambda & \ldots\ldots\ \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}(\pi).
\end{array}$$

En partant du point $\mathfrak{M}$ ou x, y, z, on formera un autre système de points, qui sont tous conjugués à $\mathfrak{M}$:

$$(39)\quad \begin{array}{llll}
\mathfrak{M}\eta & \text{conjugué à} & \mathfrak{M} & \text{par rapport à } \mathfrak{S}_{\mathfrak{h}}(\eta). \\
\mathfrak{M}\iota & \ldots\ldots & \mathfrak{M} & \ldots\ldots\ \mathfrak{S}_{\mathfrak{i}}(\iota), \\
\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
\mathfrak{M}\lambda & \ldots\ldots & \mathfrak{M} & \ldots\ldots\ \mathfrak{S}_{\mathfrak{l}}(\lambda), \\
\mathfrak{M}\pi & \ldots\ldots & \mathfrak{M} & \ldots\ldots\ \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}(\pi).
\end{array}$$

43. Cela étant, considérons les deux triangles donnés par les points :

$$\mathfrak{p},\ \mathfrak{M},\ \mathfrak{g}\eta\iota\ldots\lambda\pi,\quad \text{et}\quad \mathfrak{p}.\ \mathfrak{g}\eta\iota\ldots\lambda,\ \mathfrak{M}\pi.$$



Les côtés de ces triangles sont

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{p},M && = r_{\mathfrak{p}},\\
(40)\ldots\ldots\quad &M, g\eta\iota\ldots\lambda\pi && = r_{g\eta\ldots\lambda\pi},\\
&g\eta\iota\ldots\lambda\pi, \mathfrak{p} && = \mathfrak{p}, g\eta\iota\ldots\lambda\pi,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{p}, g\eta\iota\ldots\lambda && = g\eta\iota\ldots\lambda, \mathfrak{p},\\
(41)\ldots\ldots\quad &g\eta\iota\ldots\lambda, M\pi && = r^{(\pi)}_{g\eta\iota\ldots\lambda},\\
&M\pi, \mathfrak{p} && = r^{(\pi)}_{\mathfrak{p}}.
\end{aligned}$$

On démontrera que ces deux triangles sont semblables.

D'abord, au point $\mathfrak{p}$ les triangles auront un angle commune, parce que

$$\mathfrak{p}, M \quad \text{et} \quad \mathfrak{p}, M\pi$$

sont des portions d'une même ligne droite, comme aussi, de l'autre côté,

$$\mathfrak{p}, g\eta\iota\ldots\lambda\pi \quad \text{et} \quad \mathfrak{p}, g\eta\iota\ldots\lambda.$$

On remarquera ensuite qu'entre ces mêmes droites, on aura les relations

$$\mathfrak{p}, M \times \mathfrak{p}, M\pi = \pi^2,$$
$$\mathfrak{p}, g\eta\iota\ldots\lambda\pi \times \mathfrak{p}, g\eta\iota\ldots\lambda = \pi^2,$$

d'où il suivra

$$\frac{\mathfrak{p},M}{\mathfrak{p},g\eta\iota\ldots\lambda} = \frac{\mathfrak{p},g\eta\iota\ldots\lambda\pi}{\mathfrak{p},M\pi}.$$

Les triangles étant ainsi semblables, on conclut enfin:

$$\frac{\mathfrak{p},M}{\mathfrak{p},g\eta\iota\ldots\lambda} = \frac{M, g\eta\iota\ldots\lambda\pi}{g\eta\iota\ldots\lambda, M\pi} = \frac{g\eta\iota\ldots\lambda\pi,\mathfrak{p}}{M\pi,\mathfrak{p}},$$

ou autrement écrit:

$$(42)\ldots\quad \frac{r_{\mathfrak{p}}}{g\eta\iota\ldots\lambda, \mathfrak{p}} = \frac{r_{g\eta\iota\ldots\lambda\pi}}{r^{(\pi)}_{g\eta\iota\ldots\lambda}} = \frac{g\eta\iota\ldots\lambda\pi, \mathfrak{p}}{r^{(\pi)}_{\mathfrak{p}}}.$$

À côté de ces formules, on aura aussi, comme nous venons de le prouver,

$$(43)\ldots\quad \begin{aligned} &r_{\mathfrak{p}} \,.\, r^{(\pi)}_{\mathfrak{p}} = \pi^2,\\ &(g\eta\iota\ldots\lambda,\mathfrak{p}) \,.\, (g\eta\iota\ldots\lambda\pi,\mathfrak{p}) = \pi^2.\end{aligned}$$

43. Représentation indépendante de $f_{g\mathfrak{h}i\ldots l\mathfrak{p}}$. — On va maintenant démontrer la proposition suivante:

La fonction $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{j}\ldots\mathfrak{l}\mathfrak{p}}$ *peut être représentée d'une manière indépendante, en posant*

(44) . . . . . . $\mathfrak{f}_{\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{j}\ldots\mathfrak{l}\mathfrak{p}} = I_{\mathfrak{h}\mathfrak{j}\ldots\mathfrak{l}\mathfrak{p}}\,(S_{g\eta\iota\ldots\pi\lambda})$.

$I_{\mathfrak{h}\mathfrak{j}\ldots\mathfrak{l}\mathfrak{p}}$ *désigne ici l'opération:*

$$(45)\quad \frac{1}{d_{\mathfrak{p}}}\int_0^{d_{\mathfrak{p}}} d\pi\,.\,\pi^2\frac{d}{d\pi}\,\frac{1}{d_{\mathfrak{l}}}\int_0^{d_{\mathfrak{l}}} d\lambda\,.\,\lambda^2\frac{d}{d\lambda}\cdots\frac{1}{d_{\mathfrak{j}}}\int_0^{d_{\mathfrak{j}}} d\iota\,.\,\iota^2\frac{d}{d\iota}\,\frac{1}{d_{\mathfrak{h}}}\int_0^{d_{\mathfrak{h}}} d\eta\,.\,\eta^2\frac{d}{d\eta};$$

$S_{g\eta\iota\ldots\lambda\pi}$ *est donné par l'équation:*

$$(46)\qquad S_{g\eta\iota\ldots\lambda\pi} = -\frac{1}{(\mathfrak{g},\mathfrak{h})\,(\mathfrak{g}\eta,\mathfrak{j})\ldots(\mathfrak{g}\eta\iota\ldots\lambda,\mathfrak{p})}\cdot\frac{d_{\mathfrak{g}}^2}{r_{g\eta\iota\ldots\lambda\pi}}.$$

On aura de même:

$$(47)\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad \mathfrak{f}_{\mathfrak{g}} = S_{\mathfrak{g}} = -\frac{d_{\mathfrak{g}}^2}{r_{\mathfrak{g}}}.$$

On prouve, en effet, à l'aide de l'équation (36), qu'on peut déduire la formule proposée, en partant de la formule analogue et précédente correspondant à l'index $\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{j}\ldots\mathfrak{l}$.

D'après l'hypothèse on doit donc avoir:

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{j}\ldots\mathfrak{l}} = I_{\mathfrak{h}\mathfrak{j}\ldots\mathfrak{l}}\,(S_{g\eta\iota\ldots\lambda}).$$

Mais, en désignant par

$$S^{(\pi)}_{g\eta\iota\ldots\lambda}$$

la valeur de $S_{g\eta\iota\ldots\lambda}$, lorsqu'on a remplacé x, y, z par $x^{(\pi)}, y^{(\pi)}, z^{(\pi)}$, c'est à dire, lorsqu'on a remplacé les coordonnées polaires $r_{\mathfrak{p}}, \omega_{\mathfrak{p}}, \Theta_{\mathfrak{p}}$, introduits au lieu de $r_{\mathfrak{l}}, \omega_{\mathfrak{l}}, \Theta_{\mathfrak{l}}$, par $\frac{\pi^2}{r_{\mathfrak{p}}}, \omega'_{\mathfrak{p}}, \Theta_{\mathfrak{p}}$, on doit avoir, en vertu de l'équation citée:

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{j}\ldots\mathfrak{l}\mathfrak{p}} = \frac{1}{d_{\mathfrak{p}}}\int_0^{d_{\mathfrak{p}}} d\pi\,.\,\pi^2\frac{d}{d\pi}\left(\frac{1}{r_{\mathfrak{p}}}\,I_{\mathfrak{h}\ldots\mathfrak{l}}\,(S^{(\pi)}_{g\eta\iota\ldots\lambda})\right).$$

On aura, par conséquent:

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{j}\ldots\mathfrak{l}\mathfrak{p}} = I_{\mathfrak{h}\mathfrak{j}\ldots\mathfrak{l}\mathfrak{p}}\left(\frac{1}{r_{\mathfrak{p}}}\,S^{(\pi)}_{g\eta\iota\ldots\lambda}\right).$$

Cette formule peut cependant être transformée, à l'aide de l'équation (42) que nous venons de démontrer. En effet, on trouvera d'abord que

$$\frac{S^{(\pi)}_{g\eta\iota\ldots\lambda}}{S_{g\eta\iota\ldots\lambda\pi}} = \frac{(\mathfrak{g}\eta\iota\ldots\lambda,\mathfrak{p})\,r_{g\eta\iota\ldots\lambda\pi}}{r^{(\pi)}_{g\eta\iota\ldots\lambda}},$$

d'où il viendra

$$S^{(\pi)}_{g\eta\iota..\lambda} = r_p \, . \, S_{g\eta\iota..\lambda\pi};$$

et, en substituant, on obtient enfin:

$$f_{ghi...lp} = I_{hi..lp}(S_{g\eta\iota\lambda..\pi}).$$

Ce qui est l'équation qu'il s'agissait de prouver.

§ 4.

L'ordre des fonctions φ^i_g et $\varphi^i_{ghj...lp}$ et de leurs dérivées dans le voisinage des sphères.

44. L'ordre dans le voisinage d'une sphère. — Nous avons montré quel sera l'ordre des fonctions φ^i_g et $\varphi^i_{ghj...lp}$ et de leurs dérivées, quand le point considéré est censé de s'éloigner indéfiniment du système des corps. Les distances centrales étaient alors regardées comme des quantités fixes.

Maintenant le point doit être pris dans le voisinage d'une sphère déterminée. Il doit demeurer ici relativement fixe tandis que l'on fait déplacer les sphères. Dans ce cas, si les distances centrales croissent comme des quantités infiniment grandes du premier ordre, on peut chercher quel sera l'ordre de la fonction elle même au point donné. On peut aussi chercher quel sera l'ordre de la fonction dans le voisinage d'une autre sphère; d'où il peut résulter quelquefois un ordre différent, parce que les propriétés des fonctions dont il est ici question ne sont pas les mêmes relativement à chaque sphère du système.

En tant qu'une fonction est continue et finie dans tout l'intérieur d'une sphère donnée, on peut encore demander quel sera l'ordre de la fonction dans le voisinage du centre de cette sphère: ce qui ne sera, en effet, qu'une autre manière de s'exprimer.

Au reste, pour plus de commodité, nous désignerons par

$$(\mathrm{F})_K \text{ et } (\mathrm{F})_k$$

les valeurs de la fonction F à la surface d'une sphère S_k et à son centre k.

45. L'ordre de la fonction φ^i_g et de ses dérivées. — Des équations (14) on tirera immédiatement la conclusion suivante:

Dans le voisinage de la sphère S_g, la fonction φ^i_g et ses dérivées *par rapport aux coordonnées* x, y, z *sont finies et généralement différentes de zéro.* Elles sont, par conséquent, de l'ordre 0.

Dans le voisinage d'une autre sphère quelconque S_h ou de son centre h, *l'ordre de la fonction* $\varphi^i{}_g$ *est égal à* $1 + i$, et *celui de ses dérivées par rapport à* x, y, z *égal à* $2 + i$.

On voit aussi que *l'ordre de la fonction*

$$(\varphi^i{}_g)_h - (\varphi^i{}_g)_H$$

et de sa dérivée par rapport au temps doit être égal à $2 + i$.

46. L'ordre de la fonction $\varphi^i{}_g$ étant déterminé, on peut aussi trouver celui de la fonction $\dot{\varphi}^i{}_{ghj\ldots lp}$ et de ses dérivées. Cependant, il faut d'abord, avec un peu plus de détail, étudier les opérations diverses par lesquelles on la déduit des fonctions précédentes $\varphi^i{}_g$, $\varphi^i{}_{gh}$ etc. jusqu'à $\varphi^i{}_{ghj\ldots l}$. Pour cela, commençons par établir quelques propositions préliminaires.

47. Sur la fonction homogène et entière $r^m{}_e \mathfrak{U}_m$, et la serie dans laquelle peut être développée $\dfrac{\mathfrak{U}_m}{r_e^{m+1}}$ autour d'un point f. — Soit $\mathfrak{U}_m$ formé de sorte que $r_e{}^m \mathfrak{U}_m$ deviendra une fonction entière et homogène de $x - a_e$, $y - b_e$, $z - c_e$ et du degré m. Alors, quand on développe en serie, autour d'un point arbitrairement choisi f, mais différent du point e, on aura évidemment :

$$(48) \quad . \quad . \quad . \quad : \qquad \frac{\mathfrak{U}_m}{r_e{}^{m+1}} = \frac{1}{(e, f)^{m+1}} \sum_{0,\, \infty}^{n} \frac{r_f{}^n}{(e, f)^n} \mathfrak{B}_n{}^{(m)}.$$

Et cette serie convergera, autant que r_f est plus petit que la distance (e, f).

Dans cette équation, $\mathfrak{B}_n{}^{(m)}$ restera finie, tandis que la distance nommée croisse au dessus de toute limite : le coefficient $\mathfrak{B}_n{}^{(m)}$ sera, de plus, une expression telle que $r_f{}^n \mathfrak{B}_n{}^{(m)}$ deviendra une fonction entière et homogène de $x - a_f$, $y - b_f$, $z - c_f$, et du degré n. Enfin, f étant arbitrairement choisi, il faut qu'au moins $\mathfrak{B}_0{}^{(m)}$ doive être, généralement, différent de zéro.

Nous allons démontrer qu'il en soit ainsi avec toutes les fonctions $\mathfrak{B}_n{}^{(m)}$, — quelques valeurs particulières qu'on attribuera aux coefficients contenus dans $\mathfrak{U}_m$, en tant que cette dernière fonction ne soit pas, par là, identiquement nulle.

48. Démontrons d'abord: que *la fonction* $r_e^m \mathfrak{U}_m$ *ne peut s'évanouir, à la surface d'une sphère, que sur certaines courbes ou points qui y sont situés.*

La fonction nommée étant entière, elle ne peut devenir nulle qu'en points, ou sur courbes, ou enfin sur surfaces. Elle ne peut alors s'évanouir en aucun espace, parce que l'équation établie ne donnera pour chaque valeur de x et y que des valeurs déterminées, et en nombre fini, de la variable z.

Maintenant, si la fonction homogène ne contient qu'une seule variable, par exemple x, l'équation représentera un plan. Si elle n'en contient que deux, par exemple x et y, l'équation que l'on forme, $r_e^m \mathfrak{U}_m = 0$, représentera un système de surfaces cylindriques, et les varietés qui y appartiennent, des plans et des lignes droites. Dans le cas général où toutes les variables x, y, z se trouvent en même temps, on aura évidemment, parce que la fonction est homogène, un système de surfaces coniques avec ses variétés. Le sommet de ces cones sera le point e.

Ainsi, dans tous les cas, la fonction ne peut s'évanouir à la surface d'une sphère donnée qu'en points, ou sur des courbes, où elle est coupée par les surfaces et par les courbes, non sphériques, que nous venons de nommer.

On peut aussi raisonner comme il suit.

Le nombre de variables indépendantes dans l'équation de la sphère étant deux, la fonction ne peut s'évanouir partout à sa surface, lorsque le nombre de variables que contient la fonction est plus petit que trois; car alors, dans l'équation homogène que l'on établira, il n'y a au plus qu'une seule variable indépendante.

Dans le cas général, on peut poser $y-b_e$ et $z-c_e$ égales à $(x-a_e)u$ et à $(x-a_e)v$. L'équation que l'on aura à former se réduit alors à l'équation d'un plan $x-a_e=0$, et à une autre équation entre u et v; cela résultera de ce que la fonction doit être homogène. De l'autre coté, l'équation de la sphère se transforme, par là, en une équation entre u, v et x, qui est necessairement tellement constituée qu'on ne peut faire disparaître la variable x. Il s'ensuivra qu'ici on peut donner à u et à v des valeurs indépendantes.

tandis que dans l'équation précédente la valeur de v doit dépendre de celle qu'on a attribuée à la variable u.

Ainsi, dans tous les cas, la fonction ne peut s'évanouir partout sur la surface de la sphère donnée. De plus, la fonction étant algébrique, comme aussi l'équation irréductible d'une sphère, on conclut enfin que, lorsqu' elle s'y évanouit, cela ne se fera qu'en points ou sur des courbes, mais non sur des parties continues de la surface.

49. Nous démontrerons ensuite que: *le premier terme de la fonction* $r_e^m \mathfrak{U}_m$, *contenant la puissance* $(x-a_e)^m$, *ne peut s'évanouir qu'en cas de positions particulières du système des axes*; *et ces positions exceptionelles peuvent toujours être évitées, par d'aussi petits déplacements que l'on veut.*

Transportons d'abord les axes parallèlement à eux-mêmes, en sorte que e devienne l'origine nouvelle. Nommons ξ, η, ζ les coordonnées ainsi introduites. Changeons ensuite la direction des axes, sans déplacer l'origine; et appelons ξ', η', ζ' les coordonnées que nous venons de considérer en dernier lieu. La fonction donnée, qui est homogène par rapport à ξ, η, ζ, le sera encore par rapport à ξ', η', ζ'.

Cette fonction étant entière et homogène, comme nous avons admis, le coefficient de ξ'^m sera égal à la valeur particulière qu'obtient la fonction, au point où une sphère autour du centre e, et d'un rayon égal à 1, est percée par l'axe des ξ'. D'après ce que nous venons de développer, le coefficient nommé ne peut, par conséquent, devenir nul qu'autant que l'axe des ξ' est choisi particulièrement, de manière à passer par un de ces points ou courbes, à la surface sphérique, où doit s'évanouir la fonction proposée.

Ainsi, généralement, la fonction contient un terme correspondant à la puissance ξ'^m; et dans le cas particulier et exceptionnel où ce terme disparaît, il est toujours possible de l'introduire de nouveau, en changeant la direction des axes aussi peu que l'on voudra, mais à la condition qu'ils ne doivent pas suivre certaines courbes tracées à la surface d'une sphère.

50. Revenons à la fonction $\frac{\mathfrak{U}_m}{r_e^{m+1}}$, dont le développement en série est donné par l'équation (48).

Introduisons les coordonnées ξ, η, ζ au lieu de $x-a_e$, $y-b_e$, $z-c_e$. Changeons ensuite la direction des axes nouveaux, en conservant la même origine e; et choisissons l'axe des ξ' de manière à passer par le point f. Si, par là, l'axe des ξ' obtenait une position telle que le terme en ξ'^m s'évanouirait, on pourrait faire un petit déplacement du point f, par lequel doit encore passer cet axe des ξ'; et le terme mentionné serait restitué.

Supposons maintenant qu'on veuille développer la fonction donnée dans le voisinage du point f, mais seulement en points situés sur la ligne (e, f), ou sur ses prolongements; η' et ζ' doivent alors s'évanouir, r_e se réduira à la valeur numérique de ξ', et $r_e{}^m \mathfrak{U}_m$ deviendra égale à ξ^m, à un facteur près qui est constant et différent de zéro. La fonction proposée se transforme, par cette raison, à ξ'^{-m-1}, multipliée par le coefficient constant que nous venons de nommer. Or, quand on développe cette fonction en série suivant les puissances croissantes de $\xi' - r_{e,f}$, on reconnaîtra, avec facilité, que tous les coefficients sont à la fois différents de zéro.

Par conséquent, la série (48), dans laquelle peut être développée la fonction homogène donnée, doit avoir la propriété analogue : que les coefficients $\mathfrak{B}_n{}^{(m)}$ deviendront, tous à la fois, différents de zéro, pourvu que l'on considère le développement en série, des deux côtés du point f, suivant les directions déterminées par une ligne droite qui passe par les points e et f. Le point f pouvant être arbitrairement choisi, on doit faire dans quelques cas exceptionnels de petits déplacements; et on rentrera dans le cas normal.

A cause de la continuité des fonctions, on en peut enfin conclure que *les coefficients* $\mathfrak{B}_n^{(m)}$, *dans le développement en série de la fonction* $\dfrac{\mathfrak{U}_m}{r_e^{m+1}}$ (48), *sont, généralement, tous à la fois différents de zéro*; et cela, non seulement pour les deux directions opposées sur la ligne droite que nous venons de nommer, mais aussi pour une infinité de directions voisines, ou pour un espace.

C'est parce qu'il existe un tel espace continu, où ces fonctions en nombre infini, conservent en même temps des valeurs différentes de zéro, que nous avons dit qu'elles en diffèrent toutes, en général.

51. L'ordre relatif des termes de la série dans laquelle peut être développée $\varphi^i_{ghj..l}$ dans le voisinage du point p. — Nous allons appliquer ce qui précède, pour chercher quel sera l'ordre relatif des termes diverses de la série dans laquelle peut être développée la fonction $\varphi^i_{ghj..l}$ dans le voisinage du point p. Le nombre des index g, h, j. . . . l peut être 1 ou plus grand que 1. On s'imaginera, d'ailleurs, que les points p et M, ou (x, y, z), doivent rester des points fixes, tandis que le centre l s'éloigne de plus en plus; ou bien aussi, que le point (x, y, z) doit demeurer dans le voisinage de la sphère S_p, de quelque manière que l'on fasse croître la distance centrale (l, p).

52. On remarquera d'abord que la fonction φ^i_g appartient à la classe des fonctions traitées en (nº 47), et qu'on aura, par suite, une série analogue à celle donnée par l'équation (48), lorsqu'on la développe autour d'un point h, différent de g. Donc, on arrivera (nº 50 et 47) à la conclusion suivante:

Les termes divers de la série dans laquelle peut être développée la fonction φ^i_g dans le voisinage du point h, *sont d'un ordre infinitésimal plus haut d'une unité par rapport à celui qui précède: aucun de ces termes ne peut, en général, devenir identiquement nul, ou se réduire à un ordre plus haut ou égal à celui du terme suivant.*

53. *La fonction $\varphi^i_{ghj..l}$ doit avoir la même propriété, lorsqu'on la développe en série autour du point* p; de sorte que tous les termes seront d'un ordre infinitésimal plus haut d'une unité par rapport à celui qui précède, supposé que l'ordre de la distance $r_{l,p}$ croisse comme une quantité infiniment grande du premier ordre. Aucun des termes ne peut, en général, s'évanouir identiquement ou, par réduction, atteindre à un ordre plus élevé.

54. Pour le démontrer, admettons qu'il en soit ainsi pour une certaine fontion $\varphi^i_{ghj..l}$: on peut prouver que la fonction $\varphi^i_{ghj..lp}$ doit avoir une propriété analogue, si on la développe autour d'un point q; et qu'on fasse ensuite croître la distance $r_{p,q}$ au-dessus de toute limite. Donc, en partant de ce que la propriété existe pour la première de ces fonctions, φ_g, on conclura aisément qu'elle

existe, en général, pour toutes, par conséquent aussi pour $\varphi^i_{ghj\ldots l}$, comme nous venons de le supposer.

La fonction $\varphi^i_{ghj\ldots l}$, développée en série autour du point p, est donnée par l'équation (18). De là on déduit le développement en série, autour de la sphère S_p, de la fonction $\varphi^i_{ghj.\,lp}$; et on obtient ainsi l'équation nouvelle (19). A chaque terme de la première série, il correspond, évidemment, un terme du même ordre de la seconde dans le voisinage de cette sphère, à cela près que le premier, correspondant à n égale à o, doit alors s'évanouir.

En ne tenant plus compte de ce premier terme, qui disparaîtra, on aura donc encore la propriété que chaque terme dont consiste le développement de $\varphi^i_{ghj\ldots lp}$ autour de la sphère S_p sera, dans son voisinage, d'un ordre infinitésimal plus grand d'une unité par rapport à celui qui précède. Plus particulièrement ainsi, le terme correspondant à n égale à 1 doit être d'un ordre plus petit que tous les autres dont est composée la série. Cet ordre ne peut, en général, être élevé par des réductions; de même, il ne doit devenir infini, ce qui veut dire que le terme nommé va s'évanouir identiquement.

Les termes de la série (19), — qui représente le développement de $\varphi^i_{ghj\ldots lp}$ autour de la sphère S_p —, étant des fonctions homogènes de $x-a_p$, $y-b_p$, $z-c_p$, de la même espèce que celle que nous venons de traiter plus haut (n° 47), on peut les développer, à leur tour, en séries dans le voisinage du point q. On aura alors des développements suivant les puissances croissantes de r_q, qui sont tout-à-fait analogues à celui donné par l'équation 48; et on formera ainsi facilement, en sommant, une série nouvelle, qui représentera la fonction cherchée $\varphi^i_{ghj\ldots lp}$ dans le voisinage de ce dernier point.

Observons maintenant que les termes en r^m_q provenant de tous ceux de la série ancienne qui correspondent à des valeurs de n plus grandes que 1, doivent être d'un ordre infinitésimal plus haut que ce terme en r^m_q qui dérive du premier, correspondant à n égale à 1. L'ordre des termes totaux dont consiste la série nouvelle doit donc se régler sur ceux que fournit tout seul le dit terme prédominant; et on reconnaît ainsi immédiatement que la série, dans laquelle peut être développée la fonction $\varphi^i_{ghj...lp}$ dans le voisinage du point q, doit avoir une propriété analogue à celle de la série (18), qui donnera la fonction $\varphi^i_{ghi...l}$ dans le voisinage de p. Chaque terme doit être d'un ordre infinitésimal plus haut d'une unité par rapport à celui qui précède: il ne peut pas, en général, se réduire à un ordre plus haut, ou s'évanouir identiquement.

La proposition est donc démontrée; car la propriété supposée de la fonction $\varphi^i_{ghj...l}$ amènera nécessairement une propriété analogue pour la fonction suivante $\varphi^i_{ghj...lp}$.

55. L'ordre de la fonction $\varphi^i_{ghj...lp}$ et de ses dérivées. — Ces propriétés des termes qui composent les séries que nous venons de discuter, permettent enfin de déterminer quel sera l'ordre de la fonction $\varphi^i_{ghj..lp}$ dans le voisinage de la sphère S_p, et dans celui d'une autre sphère quelconque, S_q. On n'aura plus à redouter des incertitudes à cause de réductions possibles, — qu'on peut toujours éviter, comme nous le savons déjà, en excluant quelques positions particulières, que pourraient occuper les centres autour desquels on fait effectuer certains développements en séries. Nous supposerons, du reste, que le nombre des index g, h, j...l,p doive être 2, ou plus grand que 2.

Cela posé, considérons deux fonctions consécutives, $\varphi^i_{ghj...l}$ et $\varphi^i_{ghj...lp}$. *Soit,* de plus, s *l'ordre de la fonction* $\varphi^i_{ghj...l}$ *dans le voisinage du point* p; on démontrera alors que s + 3 *sera celui de la fonction* $\varphi^i_{ghj...lp}$ *dans le voisinage du point* q.

En effet, des équations (18) et (19) on voit que, si l'ordre de la première fonction, dans le voisinage du point p, est s, celui de la seconde $\varphi^i_{ghj...lp}$, près de S_p, doit être s + 1; car les termes correspondant à la même valeur de n sont, dans le voisinage de p et de S_p, du même ordre infinitésimal, excepté que le terme particulier qui correspond à zéro disparaîtra dans la série exprimant la fonction $\varphi^i_{ghj...lp}$. De l'autre côté, chaque terme doit être d'un ordre infinitésimal plus haut d'une unité par rapport à celui du terme précédent; et il n'y a pas, comme on sait, d'élévations, que dans des cas particuliers que l'on peut toujours exclure.

En remarquant enfin que l'ordre de la fonction $\varphi_{ghj...lp}$ dans le voisinage du point q, ne dépend, comme nous avons démontré, que du premier terme de la série dans laquelle peut être développée la fonction autour de la sphère S_p, on voit immédiatement, de l'équation (10), que l'ordre de la fonction nommée dans le voisinage du point q, doit surpasser celui de la même fonction dans le voisinage de la sphère S_p avec deux unités. De là il s'ensuit que l'ordre de la fonction $\varphi^i_{ghj...lp}$ dans le voisinage du point q doit être, effectivement, $s + 3$. Ce qu'il fallait démontrer.

56. Maintenant on peut déterminer enfin l'ordre définitif comme il suivra.

Celui de la fonction φ^i_g dans le voisinage du point h est égal à $1 + i$, celui de la fonction φ^i_{gh} dans le voisinage du point j, par conséquent, égal à $4 + i$. En continuant à raisonner de cette manière, on arrivera à la conclusion suivante:

$n + 2$ *étant le nombre des index* g, h, i, .. l, p, *l'ordre de la fonction* $\varphi^i_{ghj...lp}$ *dans le voisinage du centre* q *doit être*

$$3n + 4 + i;$$

$$3n + 2 + i$$

sera, par conséquent, *celui de la même fonction dans le voisinage de la sphère* S_p.

57. On reconnaît aussi que l'ordre de la différence:

$$(\varphi^i_{ghj...lp})_Q - (\varphi^i_{ghj...lp})_q,$$

ou de sa dérivée par rapport au temps, doit être égal à $3n + 5 + i$.

En effet, le premier terme désignera la valeur de la fonction $\varphi^i_{ghj...lp}$ en un point sur la surface de la sphère S_q, tandis que le second sera celle de la même fonction au centre q. Or, lorsqu'on développe la fonction nommée en série autour du point q, le premier terme deviendra évidemment $(\varphi^i_{ghj...lp})_q$, et il sera de l'ordre $3n + 4 + i$; celui qui suit doit, par conséquent, être d'un ordre plus haut d'une unité. L'expression ci-dessus est donc aussi de cet ordre plus élevé que nous venons d'indiquer.

Il en est de même si l'on forme sa dérivée par rapport au temps. La fonction φ^i_g contient un facteur qui dépend en général du temps; mais ce facteur se conservera sous toutes les opérations par lesquelles on passe de cette fonction à la fonction proposée, et il entrera dans tous les termes de la série dans laquelle elle peut être développée. Il en résulte qu'il n'y a pas, généralement, de réductions et d'élevations de l'ordre, quand on fait différentier, par rapport au temps, l'expression que l'on vient de considérer.

58. L'ordre des dérivées par rapport à x, y, z se trouvera aussi, sans difficulté, à l'aide de l'équation (19), et il suffira, comme on sait, de ne faire attention qu'au premier terme de la série.

Commençons par déterminer les trois variations de la fonction proposée qui sont données par les opérations (27). Ces variations ou, si l'on veut, ces trois dérivées polaires sont, évidemment, du même ordre infinitésimal, dans le voisinage de la sphère S_p, que celui de la fonction elle-même. Dans le voisinage du point q, elles sont, au contraire, d'un ordre plus haut d'une unité, par rapport à celui de la fonction au lieu considéré. Or, les dérivées par rapport à x, y, z étant des fonctions homogènes et linéaires des trois variations ou dérivées polaires que nous venons de nommer, elles auront conséquemment les mêmes propriétés. Donc on peut énoncer:

L'ordre des dérivées de la fonction $\varphi^i_{ghj\ldots lp}$ dans le voisinage du centre q *doit être*

$$3n + 5 + i;$$

$$3n + 2 + i$$

sera celui des mêmes fonctions dérivées dans le voisinage de la sphère S_p.

Comme auparavant, le nombre des index $g, h, j \ldots l, p$ est égal à $n + 2$, n étant un nombre entier quelconque, depuis 0 jusqu'à l'infini.

59. L'ordre de la fonction $\varphi^i_{ghj\ldots l}$, et de ses dérivées dans le voisinage du centre p. — On peut réunir en une seule formule les deux expressions qui représentent l'ordre des fonctions φ^i_g et $\varphi^i_{ghj\ldots lp}$ dans le voisinage des centres h et q. La même chose aura lieu pour leurs dérivées.

Soit $\varphi^i_{ghj\ldots l}$ une fonction qui représentera φ^i_g, aussi bien que les fonctions suivantes, — le nombre des index $g, h, j, \ldots l$ *étant* $n + 1$, qui peut être égal à 1, ou plus grand que 1. On aura alors ce résultat: que, respectivement,

$$3n+1+i \text{ et } 3n+2+i$$

sera l'ordre de la fonction, ou de sa dérivée par rapport au temps, dans le voisinage du centre p, *et l'ordre de ses dérivées par rapport aux coordonnées, au même lieu.*

CHAPITRE III.

LES FONCTIONS AUXILIAIRES $\varphi^i{}_{ghj..l}$ SONT DES POTENTIELS. LE DEGRÉ D'APPROXIMATION POUR LES POTENTIELS TOTAUX QU'ON EN FORME, ET LES MOUVEMENS PARTIELS QU'ILS REPRÉSENTENT.

§ 1.

Le potentiel φ^i déterminé approximativement par des potentiels partiels.

60. Formes qui peuvent être données au potentiel φ^i. — On pourrait essayer de mettre le potentiel φ^i sous la *forme suivante:*

(49) . . $\varphi^i = \Sigma\varphi^i{}_g + \Sigma\varphi^i{}_{gh} + \Sigma\varphi^i{}_{ghj} + \ldots + \Sigma\varphi^i{}_{ghj..l} + \chi^i{}_n$,

χ^i_n étant une fonction inconnue qu'il faut déterminer. La première somme s'étend sur tous les g, la deuxième sur tous les g et h etc., et la dernière sur tous les g, h, j. . . . et l. *Ces index*, appartenant à la série des nombres 1, 2, 3, . . m, *doivent satisfaire aux inégalités* (15):

$$g \gtrless h,\ h \gtrless j, \ldots .\ k \gtrless l,\ l \gtrless p$$

etc. Le nombre des lettres g, h, j, . . . l est égal à n + 1, où $n \geqq o$.

61. Les conditions relatives aux inégalités permettent encore de donner au potentiel une *autre forme*, qu'il sera utile de connaître.

Soit donc m un nombre déterminé quelconque appartenant à la série des index 1, 2, 3, . . m. Désignons, en outre, par

$$\overset{j}{\Sigma}_m \varphi^i{}_{ghj...l}$$

une somme de fonctions $\varphi^i{}_{ghj...l}$, étendue sur toutes les valeurs de g, h, . . . l satisfaisant aux conditions ci-dessus indiquées, mais en excluant les combinaisons correspondant à j = m.

Cela posé, on aura d'abord:

$$\Sigma\varphi^i_{ghj\ldots kl} = \Sigma\varphi^i_{ghj\ldots km} + \overset{l}{\Sigma}_m\varphi^i_{ghj\ldots kl},$$

où il faut remarquer que m doit rester fixe, tandis que g, h, j, ... k, l varient; k devant satisfaire à l'inégalité $k \gtrless m$, il s'ensuivra que l'on peut aussi écrire:

$$\Sigma\varphi^i_{ghj\ldots kl} = \overset{k}{\Sigma}_m\varphi^i_{ghj\ldots km} + \overset{l}{\Sigma}_m\varphi^i_{ghj\ldots kl}.$$

Maintenant, lorsqu'on décompose, de la manière que nous venons d'indiquer, toutes les sommes que contient l'équation du potentiel (49_1), et qu'on ordonne ensuite les termes nouveaux suivant le nombre des index variables, on trouvera:

$$(49_2) \quad \begin{aligned} \varphi^i = \varphi^i_m &+ \overset{g}{\Sigma}_m(\varphi^i_g + \varphi^i_{gm}) \\ &+ \overset{h}{\Sigma}_m(\varphi^i_{gh} + \varphi^i_{ghm}) \\ &+ \overset{j}{\Sigma}_m(\varphi^i_{ghj} + \varphi^i_{ghjm}) \\ &\quad \cdots\cdots \\ &+ \overset{k}{\Sigma}_m(\varphi^i_{ghj..k} + \varphi^i_{ghj..km}) \\ &+ \overset{l}{\Sigma}_m\varphi^i_{ghj..kl} \\ &+ \chi^i_n. \end{aligned}$$

62. La première expression du potentiel φ^i (49_1) est composée d'une fonction de reste χ^i_n et d'un nombre de $n+1$ sommes de fonctions auxiliaires. La première de ces sommes est formée de m termes. A cause des inégalités supposées, on voit aussi que le nombre des termes contenus dans la deuxième doit être $m(m-1)$, dans la troisième $m(m-1)^2$ etc. La somme dont le rang est k, et qui contient, par conséquent, k index variables, sera ainsi composée d'un nombre de termes égal à

$$m(m-1)^{k-1}.$$

La dernière enfin, dont le rang est $n+1$, se composera particulièrement de $m(m-1)^n$.

L'expression du potentiel φ^i, donnée par la seconde formule (49_2), sera, de son côté, composée de la fonction χ^i_n et d'un nombre de $n+3$ sommes de fonctions auxiliaires. La première de ces sommes, n'ayant aucun index variable, se réduira au potentiel φ^i_m. La deuxième, qui ne contient, en tout, qu'un seul index variable, est composée de $2(m-1)$ termes, la troisième avec deux index variables est composée de $2(m-1)^2$, et ainsi de suite. La somme dont le rang est k, et dont le nombre des index variables, par suite, est égal à $k-1$, est formée enfin d'un nombre de

$$2(m-1)^{k-1}$$

termes, supposé que k soit différent de 1 et de $n+2$. Dans ces deux cas d'exception, où k est égal à 1 et à $n+2$, on aura, au contraire, respectivement 1 et $(m-1)^{n+1}$.

63. La fonction d'erreur χ^i_n. — Nous allons maintenant étudier la fonction χ^i_n, qui fait le reste des deux développements du potentiel φ^i. Pour cela, montrons d'abord qu'elles seront ses propriétés fondamentales.

La fonction nommée sera évidemment finie et continue, avec ses dérivées suivant les coordonnées, dans tout l'espace rempli par le fluide; elles conserveront ici des valeurs uniques, et elles ne doivent, de plus, devenir infinies que dans l'intérieur des sphères; elles tendent aussi indéfiniment vers zéro, à mesure que l'on s'éloigne de plus en plus du système des corps. On voit encore facilement que, dans tout le fluide, la fonction satisfait à l'équation différentielle $\Delta_2 = 0$.

Les conditions relatives aux surfaces des sphères peuvent être trouvées comme il suit.

Considérons, entre les sphères données, une sphère quelconque S_m, et faisons ensuite usage de l'équation du potentiel (49_2), qui le présente à ce propos sous la forme la plus commode. Il en résulte immédiatement, en vertu des équations (3) de l'un côté et de l'équation (16) de l'autre, qu'à la surface d'une sphère quelconque S_m:

$$\frac{d\chi^i_n}{dn_m} = -\sum_m^l \frac{d\varphi^i_{ghj..kl}}{dn_m}.$$

Comme, en outre, l doit ici être différente de m, quelque valeur que l'on attribue à cet index; comme de plus la fonction χ^i_n ne dépend pas du choix du nombre m ou de la sphère S_m, on conclut aussi, d'après ce que nous venons de développer (nº 59), qu'à la surface d'une sphère quelconque S_m, la dérivée de la fonction χ^i_n suivant la normale doit être de l'ordre $3n + 2 + i$, $n + 1$ étant, comme auparavant, le nombre des lettres g, h, j, ..l.

64. Cela posé, considérons d'abord la fonction ψ^i_n ou

$$R^{3n+2+i} \cdot \chi^i_n;$$

où R peut être choisie comme la moyenne arithmétique entre toutes les distances centrales. Après cela, nous reviendrons à la fonction de reste χ^i_n.

R étant indépendante de x, y, z, on retrouvera pour ψ^i_n les mêmes propriétés que nous avons désignées comme appartenant à la fonction χ^i_n; à cela près qu'aux surfaces des sphères, la dérivée suivant la normale doit rester finie, sans converger vers zéro tandis que l'on fait croître leurs distances centrales au-dessus de toute limite. Ces distances peuvent varier arbitrairement comme des quantités infiniment grandes du premier ordre, mais leurs rapports doivent par conséquent être des quantités restant toujours finies.

La fonction ψ^i_n, sera donc déterminée comme une fonction finie; elle ne doit pas même croître avec les distances centrales au-dessus de toutes limites. En effet, les conditions relatives aux surfaces des corps, qui limitent l'espace rempli du fluide dans lequel subsiste l'équation différentielle $\Delta_2 = 0$, sont elles-mêmes exprimées par des fonctions restant finies, et cela encore quelque grandes que soient prises les distances centrales. Et vers les limites enfin du fluide, la fonction tend indéfiniment vers zéro.

65. De là on tire la conclusion suivante, — en revenant à la première fonction χ^i_n :

L'ordre de la fonction de reste ou de la fonction d'erreur χ^i_n est égal à $3n + 2 + i$.

En d'autres termes, lorsque les distances centrales varient comme des quantités infiniment grandes du premier ordre, la fonction χ^i_n tendra vers zéro comme une quantité infiniment petite de l'ordre $3n + 2 + i$. $n + 1$ désigne le nombre des lettres g, h, j, ..l, contenues dans la dernière somme de l'équation (49_1).

On remarquera, du reste, qu'on parle ici d'un point fixe quelconque x, y, z, appartenant au fluide. On aura ainsi *l'ordre de* *la fonction en général*, tandis qu'on n'avait considéré précédemment que l'ordre des fonctions diverses aux surfaces ou dans le voisinage des sphères que l'on déplace. Les points traités devraient alors se déplacer aussi, en restant en repos relativement à la sphère voisine.

66. Détermination approximative du potentiel au moyen des potentiels partiels. — χ^i_n sera ainsi une fonction qui tend à s'évanouir avec les distances centrales réciproques, quelle que soit la valeur du nombre entier donnée à n. *Donc, on détermine, approximativement, le potentiel* φ^i *comme il suit,* — en tant que les rapports entre les rayons des sphères et leurs distances centrales sont d'ailleurs des quantités assez petites —:

$$(50_1) \quad . \quad . \quad \varphi^i = \Sigma\varphi^i_g + \Sigma\varphi^i_{gh} + \Sigma\varphi^i_{ghj} + \ldots + \Sigma\varphi^i_{ghj..l}.$$

L'erreur que l'on commet sera d'un ordre égal à

$$3n + 2 + i,$$

$n + 1$ *étant le nombre des lettres* $g, h, j, ..l$: les distances centrales doivent alors être regardées comme des quantités infiniment grandes du premier ordre, ou, ce qui revient au même, les rapports entre les rayons des sphères et ces distances nommées doivent être des quantités infiniment petites du même ordre. Les fonctions auxiliaires dont est composé le potentiel total, φ^i_g, φ^i_{gh} . . $\varphi^i_{ghj\,l}$, peuvent être appelées des *potentiels partiels,* parce qu'elles possèdent, comme nous l'avons vu, les propriétés essentielles qui appartiennent à de telles fonctions.

Dans les cas les plus simples, correspondant à $n = 0$ et à $n = 1$, on aura ainsi:

$$(50_1') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varphi^i = \Sigma\varphi^i_g,$$

$$(50_1'') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varphi^i = \Sigma\varphi^i_g + \Sigma\varphi^i_{gh};$$

et l'erreur commise sera de l'ordre:

$$2 + i \text{ et } 5 + i.$$

Pour $n = 2$ on aura également:

$$(50_1''') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varphi^i = \Sigma\varphi^i_g + \Sigma\varphi^i_{gh} + \Sigma\varphi^i_{ghj},$$

et l'ordre de l'erreur s'élèvera alors à

$$8 + i.$$

67. La signification des potentiels partiels; mouve-

ments directs et suites de mouvements réactionnaires de divers ordres. — La première des formules particulières ($50_1'$) exprime: que l'on aura une détermination approximative du potentiel, en concevant *le mouvement total dans le fluide comme une somme de* m *mouvements partiels.* Chacun de ces derniers se produit à cause du mouvement ou de la variation d'une sphère correspondante, comme si toutes les autres n'existaient pas.

On peut dire que, dans ce cas très simple, on ne considère que *l'effet direct* des mouvements ou des variations simultanées du système des corps.

68. D'après la seconde formule particulière ($50_1''$), on conçoit *le mouvement total dans le fluide comme une somme de* m^2 *mouvements partiels:* d'abord de m *mouvements directs,* provenant de chaque sphère, et cela, comme si les autres n'existaient pas; ensuite de $m(m-1)$ *mouvements de réaction.* Une sphère quelconque S_h réagira en raison de son existence, et sert ainsi à modifier ce mouvement plus fort que produit d'abord une sphère S_g, différente de celle qui précède.

Ces mouvements réactionnaires et principaux dépendent des potentiels φ^i_{gh}.

En vertu de la formule fondamentale (16), on voit aussi qu'à la surface de la sphère S_h, la composante normale de la vitesse produite par la sphère S_g, et celle de la vitesse réactionnaire que l'on peut s'imaginer formée par la sphère S_h, seront égales, mais opposées par rapport aux directions.

Dans la troisième formule ($50_1'''$), on a une somme de

$$m + m(m-1) + m(m-1)^2$$

ou de $m^3 - m^2 + m$ termes, et, par conséquent, un nombre égal de mouvements partiels appartenant aux trois premiers ordres.

Les derniers termes, au nombre de $m(m-1)^2$, sont composés de tous les potentiels φ^i_{ghj}, et nous donnerons ainsi une suite nouvelle de mouvements; ils peuvent être désignés, de leur côté, commes réactionnaires par rapport à ceux que représentent les potentiels φ^i_{gh}. En effet, il s'est formé d'abord un mouvement de réaction (φ_{gh}), parce que le mouvement dans le fluide, causé par la sphère S_g, ne pouvait être librement continué, en raison de l'existence d'une sphère impénétrable S_h. Ce mouvement partiel (φ^i_{gh}) tendra maintenant aussi à se répandre, partout en dehors de la dernière sphère; mais, le fluide ne pouvant entrer dans l'intérieur de la sphère S_j, il s'établit encore une fois un mouvement de réaction, qui se compose avec les autres. C'est ce nouveau mouvement qui se détermine par le potentiel φ^i_{ghj}.

En général, dans la formule (50_1), composée de $n+1$ sommes, on aura un nombre de termes égal à:

$$m + m(m-1) + m(m-1)^2 + \ldots + m(m-1)^n;$$

ils représentent un nombre égal de *mouvements partiels.* Les $m(m-1)^n$ potentiels $\varphi^i_{ghj..l}$ servent ici à déterminer les mouvements partiels de l'ordre $n+1$; — et ces derniers peuvent être considérés comme des ***mouvements réactionnaires,*** par rapport à ceux donnés par les potentiels $\varphi^i_{ghj..k}$. D'ailleurs, les index $g, h, j, ..k$ doivent être communs, et le nombre n plus grand que zéro.

Nous nous sommes exprimés, dans ce qui précède, comme si ces mouvements partiels du premier, du deuxième, du troisième ordre etc. se succédaient dans le temps. Cette succession n'aura pas lieu en réalité. Ils existent, au contraire, simultanément, et ils se forment dans le moment, à cause de l'incompressibilité du fluide; et cela quelque grandes que soient les distances ou le nombre de ces retours idéels.

Il sera, néanmoins, quelquefois commode de s'imaginer une propagation dont la vitesse est finie, au lieu de cette simultanéité; et, sous ce rapport, nous dirons qu'un mouvement partiel donné par le potentiel $\varphi^i_{ghj..l}$ doit précéder celui que représente le potentiel suivant $\varphi^i_{ghj..lp}$.

§ 2.

Simplifications en ne considérant l'état du fluide que dans le voisinage d'une sphère déterminée.

70. L'équation simplifiée du potentiel dans le voisinage de la sphère S_m. — Considérons la seconde expression du potentiel φ^i, donnée pas l'équation (49_2), et posons approximativement:

$$\varphi^i = \varphi^i{}_m + \sum_m^g(\varphi^i{}_g + \varphi^i{}_{gm})$$
$$(50_2) \quad \ldots\ldots \quad + \sum_m^h(\varphi^i{}_{gh} + \varphi^i{}_{ghm})$$
$$+ \sum_m^j(\varphi^i{}_{ghj} + \varphi^i{}_{ghjm})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \sum_m^k(\varphi^i{}_{ghj..k} + \varphi^i{}_{ghj..km}).$$

L'erreur sera alors $\omega^i{}_n$ ou

$$\sum_m^l \varphi^i{}_{ghj..kl} + \chi^i{}_n.$$

Le nombre des lettres g, h, j, . . k, l étant $n+1$, le premier terme sera, d'après le n° 59_1, de l'ordre $3n+1+i$ dans le voisinage de la sphère S_m, tandis que l'ordre de la fonction $\chi^i{}_n$ sera égal à $3n+2+i$.

Ainsi, *l'erreur que l'on commet en exprimant le potentiel* φ^i *par l'équation* (50_2) *est, dans le voisinage de la sphère* S_m, *de l'ordre* $3n+1+i$.

71. En simplifiant l'équation du potentiel de la manière que nous venons d'indiquer, et en se bornant à considérer le fluide dans le voisinage de la sphère S_m, l'ordre de l'erreur s'abaisse d'une unité. Or, on pourrait croire qu'il en serait ainsi pour les expressions diverses que l'on en déduit, par différentiations etc. Comme on verra, il y a sous ce rapport des différences qu'il sera utile de connaître.

Ainsi, en vertu de ce que nous avons développé au n° 59, on voit que les dérivées de $\omega^i{}_n$ suivant les coordonnées seront d'un ordre égal à $3n+2+i$. On reconnaît aussi (n° 57) qu'en général, la dérivée de $\omega^i{}_n$ par rapport au temps doit être de l'ordre $3n+1+i$ dans le voisinage de la sphère S_m; mais on remarquera que le terme partiel de cet ordre ne doit pas varier à la surface.

L'erreur commise en déterminant par l'équation (50_2) les dérivées du potentiel φ^i dans le voisinage de la sphère S_m, sera donc de l'ordre $3n+2+i$. Celle que l'on commet en déterminant à la surface de cette sphère la dérivée partielle par rapport au temps, sera de l'ordre plus bas $3n+1+i$. Le terme particulier de cet ordre aura, de plus, la même valeur partout à la surface de S_m.

72. Le degré d'approximation en déterminant la vitesse, la pression et la pression totale. — De là, on peut d'abord conclure que *dans le voisinage de la sphère* S_m, *on détermine la vitesse et ses composantes par l'équation simplifiée* (50_2) *avec le même degré d'approximation comme si l'on avait employé l'équation complète* (50_1). L'ordre de l'erreur sera, dans les deux cas, égal à

$$3n + 2 + i,$$

n étant le nombre des lettres g, h, j, ... k.

73. Remarquons ensuite que la pression p est donnée par la formule:

$$\frac{p}{q} = \frac{P}{q} - \frac{1}{2}\frac{d\varphi^{i2}}{dN^2} - \frac{d\varphi^i}{dt};$$

où $\frac{d\varphi^i}{dN}$ désigne la vitesse absolue, — qui est dirigée normalement par rapport à la surface de potentiel passant par le point considéré. Donc, on est conduit à cette conséquence: que la pression peut être déterminée dans le voisinage de la sphère S_m au moyen de l'équation plus simple (50_2), à une quantité près de l'ordre

$$3n + 1 + i.$$

En déterminant la pression par l'équation (50_1), l'erreur sera de l'ordre plus haut $3n + 2 + i$; mais les deux expressions trouvées ne diffèrent que d'une quantité de l'ordre $3n + 1 + i$, qui ne varie qu'avec le temps.

74. Parceque le terme de l'ordre $3n + 1 + i$ que contient le développement de la pression en un point quelconque à la surface de la sphère S_m, aura à un temps donné la même valeur partout à la surface, il s'ensuit que la différence entre les pressions en deux points quelconques qui sont diamétralement opposés ne doit contenir aucun terme de cet ordre. Et de là, on tire la conclusion suivante:

La pression totale sur la sphère S_m *peut être déterminée par l'équation simplifiée* (50_2) *avec le même degré d'approximation que par l'équation complète* (50_1). *L'ordre de l'erreur sera égal à*

$$3n + 2 + i,$$

n étant le nombre des lettres g, h, j, ... k.

75. Le potentiel total. — Le potentiel total φ étant la somme de $\varphi^{(0)}$ et $\varphi^{(1)}$, on arrivera aux mêmes conséquences, quant à l'ordre de l'erreur, que dans le cas particulier où φ se réduit à $\varphi^{(0)}$, c'est-à-dire dans celui où les centres des sphères variables doivent rester immobiles. Il faut supposer, naturellement, $\varphi^{(0)}$ différent de zéro.

Lorsqu'au contraire, φ se réduit à $\varphi^{(1)}$, on retombera dans un cas déjà traité.

76. Les cas les plus simples. — Supposons n égale à 1; l'équation simplifiée sera, par suite:

$$(50_2{}') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varphi^i = \varphi^i{}_m.$$

La vitesse dans le voisinage de la sphère S_m, ainsi que la pression totale sur cette sphère, se déterminera alors d'une quantité près de l'ordre $2 + i$. Donc, en négligeant des quantités de cet ordre, on peut dire: que la vitesse dans le voisinage de la sphère S_m et la pression totale sur la même sphère sont indépendantes et des mouvements et des variations des sphères environnantes.

Du reste, en tant qu'on se borne à examiner ces deux problèmes particuliers, ceux de la vitesse et de la pression totale, on ne trouvera pas de résultats plus approchés, en partant d'une équation un peu plus générale:

$$\varphi^i = \Sigma\varphi^i{}_g.$$

77. Supposons, en second lieu, $n = 1$; l'équation simplifiée est donc:

$$(50_2{}'') \quad . \quad . \quad . \quad \varphi^i = \varphi^i{}_m + \overset{g}{\Sigma}_m (\varphi^i{}_g + \varphi^i{}_{gm}).$$

La vitesse dans le voisinage de la sphère S_m et la pression totale sur cette sphère s'obtiendront alors d'une quantité près de l'ordre $5 + i$. Avec ce degré d'approximation dans la formule fondamentale dont on part, on peut maintenant étudier l'effet que produisent les mouvements et les variations des autres sphères, — qui tendent, par là, à déplacer le corps. Comme nous allons le montrer plus tard, les termes nouveaux qui s'introduisent, en ce cas, dans l'expression de la pression totale ne s'évanouiront pas tous à la fois.

Par l'équation ci-dessus, la pression en un point quelconque dans le voisinage de S_m ne peut être trouvée que d'une quantité près de l'ordre $4+i$. Quand aussi sous ce rapport l'erreur doit être de l'ordre plus haut $5+i$, ou, plus généralement, si l'on veut déterminer à chaque point du fluide et la vitesse et la pression etc. de sorte que l'ordre de cette erreur ne deviendra pas inférieur à ce nombre, il faut se servir de l'équation plus générale:

$$\varphi^i = \sum^g \varphi^i_g + \sum^g\sum^h \varphi^i_{gh};$$

ou, ce qui revient au même:

$$\varphi^i = \varphi^i_m + \sum^g{}_m (\varphi^i_g + \varphi^i_{gm}) + \sum^g\sum^h{}_m \varphi^i_{gh}.$$

La dernière forme sera la plus commode, lorsqu'on se borne à étudier l'état du fluide dans le voisinage d'une sphère déterminée.

78. Ainsi, dans le cas le plus simple, celui de la première approximation ($50_2'$), la pression totale sur une sphère quelconque S_m doit être considérée comme étant indépendante et des mouvements et des variations de toutes les autres. En se servant de l'équation plus approximée ($50_2''$), on reconnaît ensuite que cette indépendance n'existe pas: ces changements d'états font naître des forces. On prouvera que ces forces se composent d'une somme de forces partielles, provenant, en quelque sorte, d'actions distinctes des sphères environnantes. Donc, on pourrait bien dire qu'il y a des effets, à raison des mouvements et des variations de ces corps, mais que c'est maintenant ces effets qui sont indépendants. On montrera aussi que l'accélération dans le mouvement de la sphère même dont il s'agit, n'aura pas, cette fois, d'autre influence que celle d'ajouter à sa masse une masse fictive, qui ne dépend ni des grandeurs, ni des positions ou des vitesses des corps étrangers.

On pourrait mettre en question si cette indépendance nouvelle, l'indépendance des effets des forces, analogue à celle des effets des forces ordinaires, existe réellement; ou plutôt si elle n'est qu'une vérité relative qui doit aussi cesser, le degré d'approximation étant poussé un peu plus loin. Ensuite, les sphères se meuvent comme si leurs masses étaient augmentées, mais toujours de manière à rester constantes; ce qu'on pourrait également comparer au cas de mouvements de corps dans le vide, sous l'action de forces ordinaires. Ici encore il y aurait lieu de demander s'il en serait ainsi rigoreusement, ou s'il ne faudrait pas regarder la masse totale d'une sphère — c'est-à-dire la somme de sa masse elle-même et la masse fictive qu'on ajoute pour corriger — comme étant essentiellement variable, dépendant des positions et des grandeurs des corps agissants, et peut-être aussi du corps sphérique lui-même dont on considère les mouvements variés.

Pour pouvoir résoudre les questions posées, et encore d'autres que nous ne mentionnons pas à présent, il faut monter à la troisième formule approximée, définie par l'équation:

$$(50_2''') \quad \ldots \quad \begin{aligned} \varphi^i = \varphi^i{}_m + \sum_m^g (\varphi^i{}_g + \varphi^i{}_{gm}) \\ + \sum_m^h (\varphi^i{}_{gh} + \varphi^i{}_{ghm}). \end{aligned}$$

En cherchant, au moyen de cette formule, la pression totale sur la sphère S_m, l'erreur commise sera de l'ordre $8 + i$. Le résultat, un peu compliqué d'ailleurs, qu'on en déduit, nous montrera alors que l'indépendance prétendue n'existe point, et que même la masse fictive varie.

79. Nous ne pousserons pas les approximations plus loin; ce qui nous amènerait, au moins dans le cas général, à de grandes complications, et à des résultats sans simplicité. Toutefois, dans un cas particulier, qui mérite d'être remarqué, on peut établir une exception, c'est celui de deux sphères qui se meuvent suivant une ligne droite passant par leurs centres. Alors le problème peut être traité d'une manière exacte, et il ne sera plus nécessaire de supposer que les distances centrales doivent être très grandes par rapport aux rayons des sphères.

§ 3.

Extension des formules pour tout l'espace. Mouvements partiels extérieurs et intérieurs.

80. Les potentiels partiels $\varphi^i{}_{ghj..l}$ sont continus et finis dans tout l'espace, à l'exception de celui qu'occupe la sphère S_l. De

même, l'équation du potentiel total ne sera admissible que pour les points du fluide. Elle doit être rejetée pour les autres, qui appartiennent aux corps solides, et où la fonction peut devenir infinie.

Cependant, on pourrait faire étendre les formules, de manière à convenir à l'espace entier. Pour cela, nous allons faire les suppositions suivantes.

81. Les fonctions Φ^i_g et $\Phi^i_{ghj..lp}$. — Nous définissons la fonction $\Phi^i_{ghj..lp}$, en posant:

(51$_e$) . . . . $\Phi^i_{ghj..lp}(r_p) = \varphi^i_{ghj..lp}(r_p)$,

pour tout l'espace en dehors de la sphère S_p; et en mettant:

(51$_i$) . . $\Phi^i_{ghj..lp}(r^{(p)}) = -\psi^i_{ghj..l}(r^{(p)}\,\omega_p, \Theta_p)$

pour les points dans l'intérieur de cette même sphère. Du reste, les points (r_p, ω_p, Θ) et $(r^{(p)}, \omega_p, \Theta_p)$ ou M et Mp, sont conjugués deux à deux; d'où il résulte que

$$r_p\, r^{(p)} = d_p^2.$$

Le nombre des index g, h, j, ... l, p est égal a $n+2$.

Pareillement, la valeur de $\Phi^i_g(r_g)$ doit être égale à $\varphi^i_g(r_g)$; mais celle de $\Phi^i_g(r^{(g)})$, correspondant à des points à l'intérieur de la sphère S_g, est encore indéterminée, et pourrait être choisie d'une infinité de manières. Le plus simple sera alors de faire:

$$(51_i') \quad . \; . \; . \; . \quad \begin{aligned} \Phi_g^{(0)}(r^{(g)}) &= \tfrac{1}{2}\frac{d_g'}{d}\,.\,r^{(g)}\,r^{(g)}, \\ \Phi_g^{(1)}(r^{(g)}) &= s_g'\,.\,r^{(g)}\cos\omega_g, \end{aligned}$$

l'angle ω_g étant ici égal à $(s_g', r^{(g)})$. Le dernier membre à droite peut d'ailleurs s'écrire encore d'une autre manière:

$$a_g'(x-a_g) + b_g'(y-b_g) + c_g'(z-c_g).$$

On peut donner aux fonctions des significations qui se conformeront mieux à nos formules précédentes; mais alors les mouvements qu'elles servent à représenter ne seront pas toujours des mouvements réels. Il faudrait, dans le premier cas, comme on le verra plus tard, admettre des mouvements infinis dans le centre de la sphère S_g; si non, il faut supposer qu'elle soit *creuse*.

L'équation (23) pouvant ainsi être écrite de la manière qui suit:

$$(52) \quad . \quad \Phi^i_{ghj..lp}(r_p) = -\frac{1}{d_p}\int_0^{r^{(p)}} \rho \frac{d}{d\rho}\Phi^i_{ghj..lp}(\rho, \omega_p, \Theta_p)\, d\rho,$$

il sera naturel de la généraliser, en admettant qu'elle subsiste en cas d'un seul index, aussi bien qu'en cas d'un nombre égal à $n+2$. En mettant donc:

$$(52') \quad . \quad . \quad \Phi^i_g(r_g) = -\frac{1}{d_g}\int_0^{r^{(g)}} \rho \frac{d}{d\rho}\Phi^i_g(\rho, \omega_g, \Theta_g)\, d\rho,$$

où le point $(r^{(g)}, \omega_g, \Theta_g)$ à l'intérieur de la sphère S_g est conjugué à $(r_g, \omega_g, \Theta_g)$, de sorte que

$$r_g\, r^{(g)} = d_g^2,$$

on déduira facilement que

$$\frac{d}{dr^{(g)}}\Phi^i_g(r^{(g)}) = \frac{r_g^3}{d_g^3}\cdot\frac{d}{dr_g}\Phi^i_g(r_g).$$

En nous rappelant ensuite que pour un point extérieur:

$$\Phi_g^{(0)}(r_g) = \varphi_g^{(0)}(r_g) = -d_g'\cdot\frac{d_g^2}{r_g},$$

$$\Phi_g^{(1)}(r_g) = \varphi_g^{(1)}(r_g) = -\tfrac{1}{2}s_g'\cdot\frac{d_g^3}{r_g^2}\cos\omega_g,$$

on trouvera enfin pour le point correspondant à l'intérieur de la sphère S_g:

$$(51_i'') \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \Phi_g^{(0)}(r^{(g)}) = d_g'\, d_g \log(r^{(g)}), \\ \Phi_g^{(1)}(r^{(g)}) = s_g'\, r^{(g)}\cos\omega_g. \end{cases}$$

Dans le cas de $i=1$, on retrouvera, par suite, la seconde des formules $(51_i')$; quand $i=0$, le rapport ou la différence entre ses deux surfaces doit rester constant $(51_i'$ ou $51_i'')$.

82. Les nouvelles fonctions satisfont toutes à l'équation différentielle $\Delta_2 = 0$, à l'exception de $\Phi_g^{(0)}$; et cette dernière fonction satisfait aussi à l'équation nommée pour les points situés en dehors de la sphère S_g. Si l'on demande, dans ce cas particulier, que l'équation de continuité:

$$\Delta_2\Phi_g^{(0)} + \frac{d\Phi_g^{(0)}}{dr^{(g)}}\,\frac{d\log q_g}{dr^{(g)}} + \frac{d\log q_g}{dt} = 0$$

doit subsister pour des points quelconques à l'intérieur de cette sphère, la densité q_g doit être de la forme suivante:

$$q_g = \frac{1}{d_g^3} f\left(\frac{d_g}{r^{(g)}}\right)$$

ou

$$q_g = \frac{1}{r^{(g)}} f\left(d_g^2 - r^{(g)} r^{(g)}\right),$$

f désignant ici une fonction arbitraire. Quand cette fonction se réduit à une constante, on aura plus simplement :

$$q_g = \frac{C}{d_g^3}$$

et

$$q_g = \frac{C}{r^{(g)}};$$

c'est-à-dire, dans le cas ordinaire, la masse doit alors rester homogène sous les variations de la sphère; dans le cas idéal, correspondant à des mouvements infinis dans le centre, la densité doit varier en raison inverse de la distance centrale. En général, les sphères *creuses* nommées conserveront leurs masses.

83. Extension des formules du mouvement à tout l'espace. — Désignons maintenant par Φ^i le potentiel total, et posons :

(53) . . $\Phi^i = \Sigma\Phi^i{}_g + \Sigma\Phi^i{}_{gh} + \ldots + \Sigma\Phi^i{}_{ghj..l} + \chi^i{}_n.$

On aura alors :

(53_e) . . . . $\Phi^i = \varphi^i,$

pour les points appartenant au fluide, c'est-à-dire pour tous les points extérieurs.

En décomposant comme nous venons de le faire au n° 61, et en observant aussi les équations du numéro qui précède, on obtiendra pour un point quelconque à l'intérieur de la sphère S_m :

(53_i) . . . . $\Phi^i = \Phi^i{}_m + \sum_m^l \Phi^i{}_{ghj..kl} + \chi^i{}_n.$

On en voit que les vitesses intérieures que détermineront les dérivées suivant le rayon vecteur et suivant les coordonnées x, y, z, doivent être exprimées, approximativement, par

$$d_m' \cdot \frac{r^{(m)}}{d_m} \quad \text{ou} \quad d_m' \cdot \frac{d_m}{r^{(m)}}$$

et, dans le cas de $i = 1$, par

$$a_m',\ b_m',\ c_m'.$$

Les premières expressions correspondent au cas où i est égal à zéro, c'est-à-dire au cas d'une sphère variable dont le centre doit demeurer en repos: la vitesse sera alors radiale; elle s'évanouira ou elle deviendra infinie, au centre m; et enfin, sur la surface de la sphère S_m, elle doit coïncider, dans les deux cas, avec la composante normale de la vitesse qui doit y exister simultanément dans le fluide. La seconde vitesse convient, au contraire, à une sphère invariable, dont le mouvement de translation est aussi représenté par les composantes nommées a_m', b_m', c_m'.

Quant à l'erreur que l'on commet en négligeant la fonction χ^i_n, on trouve, tout comme auparavant, qu'elle sera du même ordre que celui de l'expression:

$$\sum_m^l \frac{d\Phi^i_{ghj..kl}}{dn_m}.$$

l étant ici différente de m, on reconnaît, en vertu des formules du n⁰ 81, que Φ peut être remplacé par φ; et on conclut ainsi que l'ordre de l'erreur doit être, comme précédemment, égal à $3n + 2 + i$.

84. Comme on a fait antérieurement:

$$\varphi = S\varphi^i,$$

on posera maintenant de même:

$$\Phi = S\Phi^i,$$

pourvu qu'on veuille déterminer le mouvement combiné, pour tout l'espace. Il y a alors et des variations des sphères et des mouvements de translation.

85. Mouvements partiels de divers ordres dans les points intérieurs et dans les points extérieurs. — Considérons maintenant les mouvements que représentent les potentiels Φ^i_g, les potentiels avec deux index Φ^i_{gh}, et ainsi de suite; et examinons d'abord les mouvements idéaux qui se succèdent dans un même point à l'intérieur d'une sphère déterminée.

Posons d'abord:

$$\Phi^i_{ghj..l}(r_l) = \Psi^i_{ghj..l}(r^{(p)}, \omega_p, \Theta_p);$$

où les points

$$(r_l, \omega_l, \Theta_l) \text{ et } (r^{(p)}, \omega_p, \Theta_p).$$

situés dans l'intérieur de la sphère S_p et, par conséquent, en dehors de S_l, doivent coïncider. On aura alors, puisque (51_e)

$$\Phi^i_{ghj..l}(r_l) = \varphi^i_{ghj..l}(r_l),$$

la relation suivante:

$$\Psi^i_{ghj..l}(r^{(p)}, \omega_p, \Theta_p) = \psi^i_{ghj..l}(r^{(p)}, \omega_p, \Theta_p);$$

ce qu'on voit immédiatement à l'aide de l'équation (20).

On trouvera ainsi, en déterminant la vitesse partielle au point Mp;

$$(54) \quad \begin{aligned} U^i_{ghj..l}(Mp) &= \frac{d}{dr^{(p)}} \psi^i_{ghj..l}(r^{(p)}, \omega_p, \Theta_p), \\ V^i_{ghj..l}(Mp) &= \frac{1}{r^{(p)}} \cdot \frac{d}{d\omega_p} \psi^i_{ghj..l}(r^{(p)}, \omega_p, \Theta_p), \\ W^i_{ghj..l}(Mp) &= \frac{1}{r^{(p)} \sin \omega_p} \cdot \frac{d}{d\Theta_p} \psi^i_{ghj..l}(r^{(p)}, \omega_p, \Theta_p). \end{aligned}$$

U désigne ici la composante radiale, V la composante méridienne, et W la composante parallèle, c'est à dire celle suivant la tangente au petit cercle parallèle à l'équateur; le centre p est le pôle du système polaire au moyen duquel nous avons exprimé la vitesse.

Ayant ensuite égard à l'équation (51_i), on obtiendra enfin:

$$(55) \quad \begin{aligned} U^i_{ghj..lp}(Mp) &= - U^i_{ghj..l}(Mp), \\ V^i_{ghj..lp}(Mp) &= - V^i_{ghj..l}(Mp), \\ W^i_{ghj..lp}(Mp) &= - W^i_{ghj..l}(Mp). \end{aligned}$$

Donc, on peut s'imaginer que le dernier mouvement partiel, de l'ordre $n + 2$, dans l'intérieur de la sphère S_p, se produit à cause d'une réaction opposée par la sphère au mouvement précédent de l'ordre $n + 1$; et qu'il se répand ensuite, instantanément, dans l'espace infini en dehors, en se modifiant, du reste, après le passage, comme nous allons le montrer tout-de-suite.

86. Comparons maintenant le mouvement partiel de l'ordre $n + 2$, dans un point quelconque M situé en dehors de la sphère S_p, avec ceux de l'ordre précédent à l'intérieur de cette même sphère.

En vertu de l'équation (23), on trouve, après avoir intégré par partie, et en écrivant pour plus de simplicité $(r^{(p)})$ et (ρ) au lieu de $(r^{(p)}, \omega_p, \Theta_p)$ et $(\rho, \omega_p, \Theta_p)$:

$$(56) \quad . \quad . \quad \varphi^i_{ghj..lp}(r_p) = \frac{d_p}{r_p}\psi^i_{ghj..l}(r^{(p)}) - \frac{1}{d_p}\int_0^{r^{(p)}}\psi^i_{ghj..l}(\rho)\,d\rho.$$

Au lieu de φ on peut ici écrire Φ, le point M étant un point extérieur par rapport à la sphère S_p. Ainsi, en effectuant les opérations (27), en observant les équations (54) du numéro précédent, et en remarquant enfin que

$$\frac{d}{dr_p} = -\frac{d_p^2}{r_p^2}\cdot\frac{d}{dr^{(p)}},$$

on obtiendra pour les composantes cherchées:

$$U^i_{ghj..lp}(M) = -\frac{d_p^3}{r_p^3}U^i_{ghj..l}(Mp),$$

$$(57) \; . \; . \quad V^i_{ghj..lp}(M) = \frac{d_p^3}{r_p^3}V^i_{ghj..l}(Mp) - \frac{1}{d_p r_p}\int_0^{r^{(p)}}\rho\,.\,V^i_{ghj..l}(\rho)\,d\rho,$$

$$W^i_{ghj..lp}(M) = \frac{d_p^3}{r_p^3}W^i_{ghj..l}(Mp) - \frac{1}{d_p r_p}\int_0^{r^{(p)}}\rho\,.\,W^i_{ghj..l}(\rho)\,d\rho;$$

où, pour plus de commodité, nous nous servons d'une notation double, en écrivant $V(\rho)$ aussi bien que $V(M)$ etc.

87. Etablissons enfin les relations qui existent entre le mouvement partiel de l'ordre $n+1$, en un point M en dehors de la sphère S_l, et ceux du même ordre dans l'intérieur de cette sphère, entre l et Ml.

Pour cela, partons des équations (52) et (52′) reunies en une seule formule, qui s'écrit ainsi, (ρ) désignant $(\rho, \omega_l\, \Theta_l)$:

$$(56') \; . \; . \quad \Phi^i_{ghj..l}(r_l) = -\frac{d_l}{r_l}\Phi^i_{ghj..l}(r^{(l)}) + \frac{1}{d_l}\int_0^{r^{(l)}}\Phi^i_{ghj..l}(\rho)\,d\rho.$$

Cette équation, correspondant à un nombre d'index égal à $n+1$, subsistera encore quand ce nombre se réduit à 1; mais il faut remarquer que les fonctions n'auront pas la même signification en dehors de la sphère S_l et en dedans. Cependant, en cas de n égale à 0, il y a exception lorsqu'en même temps l'index i est aussi égal à zéro. Alors le résultat sera encore vrai, quand on voudra déterminer la fonction $\Phi_g^{(0)}(r^{(g)})$ par la première des formules ($51_i''$), mais il cessera de l'être lorsqu'on la définit, au contraire, au moyen de la première des équations ($51_i'$).

En mettant à part ce cas exceptionnel, on aura d'ailleurs généralement:

$$U^i_{ghj..l}(M) = \frac{d_l^3}{r_l^3} U^i_{ghj..l}(Ml),$$

$$(58) \ldots \quad V^i_{ghj..l}(M) = -\frac{d_l^3}{r_l^3} V^i_{ghj..l}(Ml) + \frac{1}{d_l r_l}\int_0^{r^{(l)}} \rho \, . \, V^i_{ghj..l}(\rho)\, d\rho,$$

$$W^i_{ghj..l}(M) = -\frac{d_l^3}{r_l^3} W^i_{ghj..l}(Ml) + \frac{1}{d_l r_l}\int_0^{r^{(l)}} \rho \, . \, W^i_{ghj..l}(\rho)\, d\rho.$$

Dans le cas omis, on aura au contraire ou

$$(58'') \quad \ldots\ldots \quad U_g^{(0)}(M) = \frac{d_g^3}{r_g^3} U_g^{(0)}(Mg)$$

ou bien

$$(58') \quad \ldots\ldots \quad U_g^{(0)}(M) = \frac{d_g}{r_g} U_g^{(0)}(Mg).$$

La première de ces formules correspond à $\Phi_g^{(0)}(r^{(g)})$, donnée par l'équation ($51_i''$), la seconde à la valeur différente de cette fonction que fournira ($51_i'$).

88. Rapports entre les mouvements partiels extérieurs et intérieurs. — Des équations (57), on voit que la vitesse partielle de l'ordre $n + 2$ au point extérieur M, déterminée par les trois composantes en coordonnées polaires:

$$(59) \quad \ldots \quad U^i_{ghj..lp}(M),\ U^i_{ghj..lp}(M),\ W^i_{ghj..lp}(M),$$

se compose de ces deux autres:

$$(59_1) \ldots -\frac{d_p^3}{r_p^3} U^i_{ghj..l}(Mp),\ \frac{d_p^3}{r_p^3} V^i_{ghj..l}(Mp),\ \frac{d_p^3}{r_p^3} W^i_{ghj..l}(Mp)$$

et

$$(59_2) \quad \ldots\ldots \quad 0,\ -P^i_{ghj..l}(M),\ -Q^i_{ghj..l}(M);$$

où P et Q doivent être définies:

$$(60) \quad \begin{aligned} &\int_0^{r^{(p)}} \rho \, . \, V^i_{ghj..l}(\rho)\, d\rho = \tfrac{1}{2}\, r^{(p)} r^{(p)} \, . \, V^i_{ghj..l}(\rho^{(p)}) = d_p r_p \, . \, P^i_{ghj..l}(M), \\ &\int_0^{r^{(p)}} \rho \, . \, W^i_{ghj..l}(\rho)\, d\rho = \tfrac{1}{2}\, r^{(p)} r^{(p)} \, . \, W^i_{ghj..l}(\sigma^{(p)}) = d_p r_p \, . \, Q^i_{gbj..l}(M), \end{aligned}$$

$(\rho^{(p)}, \omega_p, \Theta_p)$ et $(\sigma^{(p)}, \omega_p, \Theta_p)$ étant des points intermédiaires entre p et Mp. En vertu de cela, la seconde de ces vitesses dont est composée la vitesse cherchée, s'écrira encore de la manière qui suit:

$$(59_2') \ . \ . \quad 0, \ -\tfrac{1}{2}\frac{d_p{}^3}{r_p{}^3} V^i{}_{ghj..l}(M\pi'), \ -\tfrac{1}{2}\frac{d_p{}^3}{r_p{}^3} W^i{}_{ghj..l}(M\pi''),$$

$M\pi'$ et $M\pi''$ étant des points situés sur la droite p,M entre p et Mp.

Les nouvelles vitesses ne dépendent ainsi que de celles de l'ordre précédent $n+1$ qui sont, en particulier, réparties sur la droite p,Mp tout à l'intérieur de la sphère S_p:

$$(61) \ . \ . \ . \ . \quad U^i{}_{ghj..l}(\rho), \ V^i{}_{ghj..l}(\rho), \ W^i{}_{ghj..l}(\rho).$$

Cette dépendance, nous allons maintenant l'expliquer avec plus de détail.

89. Examinons d'abord la dernière de ces vitesses composantes.

On peut se figurer que $V^i{}_{ghj..l}(M\pi)$ et $W^i{}_{ghj..l}(M\pi)$ doivent représenter, à côté de composantes méridiennes et parallèles d'une vitesse partielle, deux quantités de mouvement, résidant dans des masses correspondantes et idéales, qui vont frapper la droite p,Mp suivant les mêmes directions qu'auparavant, dans le point $M\pi$ entre p et Mp. Si elles sont ici répandues d'une manière constante sur une étendue égale à 1, elles mesureront de nouveau la composante méridienne et parallèle, comme ordinairement.

Si la droite est assujétie à tourner autour du centre p, on peut demander quelles sont les quantités de mouvement constant, réparties entre p et Mp, qui produiront le même effet. D'après les équations (60) on trouvera alors

$$r^{(p)}.V^i{}_{ghj...l}(M\pi') \quad \text{et} \quad r^{(p)}.W^i{}_{ghj...l}(M\pi'');$$

et ces quantités de mouvement divisées par la longueur p,Mp, représenteront aussi respectivement la composante méridienne et la composante parallèle de deux vitesses partielles, de l'ordre $n+1$, dans le points

$$(\rho^{(p)}, \omega_p, \Theta_p) \ \text{et} \ (\sigma^{(p)}, \omega_p, \Theta_p),$$

situés sur la droite nommée entre p et Mp.

Mais quand on veut déterminer les quantités de mouvement concentrées au bout de la ligne, en M, lesquelles feront aussi tourner la droite de la même manière qu'auparavant, ou aura ces autres résultats:

$$d_p P^i_{ghj...l}(M) \text{ et } d_p Q^i_{ghj...l}(M).$$

Donc, en s'imaginant que la densité des masses idéales, qui y atteignent la droite, est égale à 1, tandis que celle des masses mouvantes qui à l'intérieur de la sphère pourraient les remplacer, devrait être $\frac{1}{d_p}$; et qu'ensuite ces masses-là s'étendent sur des longueurs égales à l'unité, on voit que respectivement:

$$P^i_{ghj...l}(M) \text{ et } P^i_{ghj...l}(M)$$

doivent y désigner leurs vitesses. Et en vertu de cela, nous les regarderons comme des *vitesses équivalentes:* en ce point M, elles équilibreront, respectivement, les vitesses méridiennes et les vitesses parallèles:

$$V^i_{ghj..l}(M\pi) \text{ et } W^i_{ghj...l}(M\pi)$$

réparties sur la droite tournante p,M entre p et Mp.

90. On peut donc se faire la représentation suivante pour s'expliquer le rapport qui doit exister entre le mouvement partiel de l'ordre $n+2$, en M, déterminé par les composantes:

$$U^i_{ghj..lp}(M),\ V^i_{ghj..lp}(M),\ W^i_{ghj..lp}(M),$$

et ceux de l'ordre $n+1$

$$U^i_{ghj...l}(\rho),\ V^i_{ghj...l}(\rho),\ W^i_{ghj..l}(\rho),$$

à l'intérieur de la sphère S_p. (ρ) ou $M\pi$ doit désigner ici, comme auparavant, un point quelconque (ρ, ω_p, Θ_p) sur la droite p,Mp entre p et Mp.

Le mouvement partiel de l'ordre $n+2$ (59) *naît en M,* — comme nous allons le supposer figurément —, *à cause d'une réaction dans la sphère* S_p *contre les mouvements intérieurs de l'ordre précédent* (61); *et il est composé de deux mouvements de réflexion: l'un tournant,* se rapportant à une ligne droite qui se meut autour du centre p, *l'autre un mouvement ordinaire,* produit par la réflexion d'une sphère idéale.

Plus explicitement:

Imaginons-nous deux sphères idéales autour du centre p, $S_p(M)$ et $S_p(Mp)$, l'une passant par le point M, l'autre par le point conjugué Mp, — de manière qu'elles sont réciproquement leurs images, relatives à la sphère donnée S_p. Des lignes distinctes, mais en parti coïncidantes, p,M et p,Mp, joignent le centre commun p avec M et Mp. Maintenant, au point M sont placées deux masses égales, μ et μ, l'une appartenant à la sphère passante $S_p(M)$, l'autre à la ligne droite p, M; leur densité est égale à 1. A la première de ces masses correspondra en Mp une masse analogue μ_s, Mp étant d'ailleurs compris comme un point appartenant à la sphère intérieure $S_p(Mp)$; à la seconde correspondra une masse d'une autre nature, μ_l, répartie sur la droite, p,Mp, et d'une densité différente égale à $\frac{1}{d_p}$.

La masse μ_l atteint la droite nommée tournante p,Mp avec des vitesses, variant de lieu en lieu, qui mesurées en un point intermédiaire quelconque $M\pi$, se déterminent par les composantes (61). A cause de cela, nous nous figurerons que la droite p,M, qui peut tourner aussi autour du centre p, et qui porte en M la masse μ, doit être rejetée: par cette première réflexion, μ acquerra la vitesse :

$$0, \; -P^i_{ghj\ldots l}(M), \; -Q^i_{ghj\ldots l}(M)$$

qui est justement celle déterminée par les composantes (59_2).

Enfin, l'autre masse, μ_s, atteint en Mp la surface d'une sphère idéale $S_p(Mp)$ autour du centre p, avec une vitesse donnée par les composantes :

$$U^i_{ghj\ldots l}(Mp), \; V^i_{ghj\ldots l}(Mp), \; W^i_{ghj\ldots l}(Mp).$$

Au point correspondant M de la sphère d'image $S_p(M)$, nous supposerons qu'il existera aussi une réflexion ; et de manière que *l'intensité du mouvement incident et celle du mouvement réfléchi doive être inversement proportionnelle au cube des distances des points* Mp *et* M *à la sphère* S_p, ces distances comptées suivant la ligne droite Mp,M qui les joignent. Ainsi, ayant l'équation :

$$\frac{d_p - r(p)}{r_p - d_p} = \frac{d_p}{r_p},$$

ce qu'on vérifiera facilement, on trouvera enfin que μ doit être réfléchie de la sphère $S_p(M)$ avec la vitesse nouvelle :

$$- \frac{d_p{}^3}{r_p{}^3} U^i{}_{ghj\ldots l}(Mp), \quad \frac{d_p{}^3}{r_p{}^3} V^i{}_{ghj\ldots l}(Mp), \quad \frac{d_p{}^3}{r_p{}^3} W^i{}_{ghj\ldots l}(Mp),$$

laquelle coïncide, comme on voit, avec (59_1).

91. Comparons enfin le mouvement partiel de l'ordre $n+1$ en un point extérieur M avec les mouvements du même ordre entre l et Ml, à l'intérieur de la sphère S_l.

La vitesse partielle de cet ordre en M, déterminée par les composantes:

(62) . . . . . $U^i{}_{ghj\ldots l}(M)$, $V^i{}_{ghj\ldots l}(M)$, $W^i{}_{ghj\ldots l}(M)$,

se composera de ces deux autres

(62_1) . $\frac{d_l{}^3}{r_l{}^3} U^i{}_{ghj\ldots l}(Ml)$, $-\frac{d_l{}^3}{r_l{}^3} V^i{}_{ghj\ldots l}(Ml)$, $-\frac{d_l{}^3}{r_l{}^3} W^i{}_{ghj\ldots l}(Ml)$

et

(62_2) . . . . . . 0, $P^i{}_{ghj\ldots l}(M)$, $Q^i{}_{ghj\ldots l}(M)$;

où P et Q doivent être définies:

$$\int_0^{r^{(l)}} \rho \,.\, V^i{}_{ghj\ldots l}(\rho)\, d\rho = -\tfrac{1}{2} r^{(l)} r^{(l)} \,.\, V^i{}_{ghj\ldots l}(\rho_l{}^{(l)}) = -d_l r_l \,.\, P^i{}_{ghj\ldots l}(M),$$

(63)

$$\int_0^{r^{(l)}} \rho \,.\, W^i{}_{ghj\ldots l}(\rho)\, d\rho = -\tfrac{1}{2} r^{(l)} r^{(l)} \,.\, W^i{}_{ghj\ldots l}(\sigma_l{}^{(l)}) = -d_l r_l \,.\, Q^i{}_{ghj\ldots l}(M).$$

On peut donc se faire la représentation suivante.

Faisons tourner la droite l,M autour du centre l avec une vitesse qui, mesurée en M, se détermine par la composante méridienne et la composante parallèle

$$P^i{}_{ghj\ldots l}(M) \text{ et } Q^i{}_{ghj\ldots l}(M).$$

Cette vitesse éqvivaut sous ce rapport à toutes les vitesses intérieures du même ordre $n+1$:

$$U^i{}_{ghj\ldots l}(\rho), \quad V^i{}_{ghj\ldots l}(\rho), \quad W^i{}_{ghj\ldots l}(\rho),$$

réparties sur la droite nommée entre l et Ml; mais il faut supposer alors que la densité des masses idéales qui l'atteignent sur cette partie à l'intérieur de la sphère doit être $\frac{1}{d_l}$, celle de la masse frappant en M étant égalée à 1.

Cela posé, *on peut se figurer le mouvement partiel d'un ordre* $n+1$, *en un point extérieur* M, *comme un mouvement de réflexion* *relatif à la droite tournante* l, M. *Cette réflexion en* M *provient d'un mouvement du même ordre* $n+1$ *dans le point d'image* Ml. *L'intensité de la vitesse réfléchie doit cependant, par rapport à celle de la vitesse incidente, être à raison de* d_l^3 *à* r_l^3; de sorte qu'on aura ici la même loi qu'auparavant.

Remarquons d'ailleurs que l'ordre $n+1$ se rapporte ici au nombre des index $g, h, j, .. l$; les deux mouvements nommés seront ainsi dans ce sens du même ordre, quoique leur ordre infinitésimal doive être nécessairement différent.

92. Ce que nous venons de développer est vrai, quel que soit le nombre des index $g, h, j, \ldots l$. Toutefois, dans le cas d'un seul index g, il y a exception, lorsque i est égal à zéro, et que d'ailleurs la fonction $\Phi_g^{(0)}$ est choisie de la manière particulière :

$$\Phi_g^{(0)}(r^{(g)}) = \tfrac{1}{2}\,\frac{d_g'}{d_g}\,r^{(g)}r^{(g)}.$$

Comme on aura en même temps :

$$\Phi_g^{(0)}(r_g) = -\,d_g'\,.\,\frac{d_g^2}{r_g},$$

les vitesses en Mg et M seront alors :

$$(64)\quad \begin{cases} U_g^{(0)}(Mg) = \dfrac{d_g'}{d_g}\,.\,r^{(g)}, \\[2ex] U_g^{(0)}(M) \ = d_g'\,.\,\dfrac{d_g^2}{r_g^2}, \end{cases}$$

L'intensité de la vitesse en M est donc à celle dans le point d'image Mg simplement à raison de d_g à r_g.

§ 4.

Généralités sur la distribution des mouvements partiels.

93. Sur les quantités de mouvements partiels projetées sur les axes. — Considérons d'abord le mouvement idéal, dans l'intérieur de la sphère S_p, qui se déduit du potentiel $\varphi^i_{ghj\ldots l}$; et déterminons la somme des projections, sur l'axe des x, des quantités de mouvement contenues dans un espace intérieur, terminé par la surface de la sphère concentrique et plus petite,

$S_p\, r^{(p)}$. Le rayon vecteur, mené du centre p à un point quelconque Mp appartenant à sa surface, est égal à $r^{(p)}$; l'angle qu'il forme avec l'axe des x doit être désigné par $(r^{(p)}, x)$, ou plus simplement par (r, x).

La densité du fluide étant q, l'expression de la somme demandée devient

$$(65) \quad \ldots\ldots \quad q\int\!\!\int\!\!\int \frac{d\varphi^i_{ghj\ldots l}}{dx}\, dx\, dy\, dz,$$

l'intégrale étendue à tout le volume de la sphère $S_p\, r^{(p)}$. En effectuant une première intégration, l'expression précédente se transforme en

$$(66) \quad \ldots\ldots \quad q\int \varphi^i_{ghj\ldots l}(r^{(p)}) \cos(r^{(p)}, x)\, dF^{(p)};$$

où maintenant la somme doit s'étendre à tous les éléments de la surface, $dF^{(p)}$ désignant l'élément superficiel de la sphère nommée.

Introduisons maintenant la valeur du $\varphi^i_{ghj\ldots l}$ donnée par la série (18); et remarquons qu'il faut remplacer r_p par $r^{(p)}$, de sorte qu'il viendra :

$$\varphi^i_{ghj\ldots l}(r^{(p)}) = X_0 + r^{(p)} X_1 + \ldots.$$

Observons aussi que $\cos(r, x)$ sera une fonction de sphère, du premier ordre, X_n une fonction de même nature, et d'un ordre égal à n. Faisons ensuite usage d'un théorème bien connu, et qui peut s'exprimer par la formule :

$$\int X_n X'_m\, df = 0,$$

X_n et X'_m étant des fonctions de sphère des deux ordres différents, n et m. Quant à df, il doit désigner l'élément superficiel d'une nouvelle sphère, concentrique à $S_p\, r^{(p)}$, et dont le rayon est égal à l'unité; de sorte que l'on aura la relation :

$$dF^{(p)} = r^{(p)}\, r^{(p)}\, df.$$

En vertu de cela, on est conduit d'abord à l'équation :

$$q\int\!\!\int\!\!\int \frac{d\varphi^i_{ghj\ldots l}}{dx}\, dx\, dy\, dz = q r^{(p)} \int X_1 \cos(r, x)\, dF^{(p)}.$$

Mais ici, X_1 étant de la forme

$$X_1 = A\cos(r^{(p)}, x) + B\cos(r^{(p)}, y) + C\cos(r^{(p)}, z),$$

où

$$A = \left(\frac{d}{dx}\,\varphi^i{}_{ghj..l}\right)_p,$$

$$B = \left(\frac{d}{dy}\,\varphi^i{}_{ghj..l}\right)_p,$$

$$C = \left(\frac{d}{dz}\,\varphi^i{}_{ghj..l}\right)_p,$$

on trouvera à la fin, en effectuant le calcul indiqué, et en désignant par

$$M^{(p)}$$

la masse du fluide idéal que contient, comme nous le supposerons la sphère $S_p\,r^{(p)}$, que

$$M^{(p)}.\left(\frac{d}{dx}\,\varphi^i{}_{ghj..l}\right)_p$$

doit être le résultat cherché. Donc, on énoncera:

La somme de ces quantités de mouvement projetées sur l'axe des x, *que contient une sphère* $S_p\,r^{(p)}$ *concentrique à la sphère donnée et plus grande* S_p, *aura une valeur comme si toute cette sphère intérieure était remplie d'un mouvement constant par rapport à l'intensité et à la direction, égal à celui dans le centre* p. *Le mouvement idéal et partiel dont il s'agit dépend du potentiel* $\varphi^i{}_{ghj..l}$: *et la sphère* $S_p\,r^{(p)}$ *est ici censée remplie par le fluide.*

94. Prenons pour l'origine des coordonnées le centre p, et choisissons l'axe des x suivant la direction de la vitesse partielle en ce point. On voit alors que, si l'on partage la sphère $S_p\,r^{(p)}$ en deux moitiés par une droite qui représente la direction de cette vitesse, la somme des quantités de mouvement projetées sur l'axe normal, situées ainsi dans le plan équateur, sera égale et opposée dans l'une et l'autre moitié. Dans les deux moitiés déterminées par ce plan équateur lui-même il en est autrement: on aura alors des quantités généralement différentes, mais leur somme totale sera la même que si les vitesses partielles dont il s'agit étaient à tous les points constantes, en intensité et en direction égales à celle dans le centre p.

Considérons ensuite le mouvement partiel et idéal dans tout l'intérieur de la sphère S_p. Ce mouvement n'existant pas réellement, la présence de cette sphère aura pour effet particulier qu'une certaine quantité de mouvement que devaient produire les mouvements ou les variations des autres corps, en quelque sorte se perdra; et cette quantité perdue, qui se rapporte aux efforts qu'il faut apporter pour établir les mouvements existants des corps solides, est égale à celle de la masse fluide que déplace la sphère S_p avec une vitesse égale à la vitesse partielle au centre p.

95. Ce que nous venons de développer quant à la distribution du mouvement partiel et idéal dans l'intérieur d'une sphère S_p appartenant au système, sera aussi vrai pour celle du mouvement partiel et réel dans une sphère fictive quelconque que l'on peut construire dans l'espace, — en tant qu'elle ne coupe pas la sphère S_l. En effet, la fonction $\varphi^i_{ghj..l}$ aura alors un développement en série entièrement analogue à celui donné par l'équation (18).

96. Nous avons étudié le mouvement partiel qui se répand de la sphère S_l, et qui se détermine par le potentiel $\varphi^i_{ghj..l}$; mais jusqu'ici exclusivement dans un espace sphérique excentrique par rapport à S_l. Maintenant examinons la distribution du mouvement contenu dans une enveloppe sphérique, concentrique à la même sphère. Les deux rayons r_l et r_l' doivent être plus grands que d_l, et d'ailleurs $r_l' > r$.

La somme des quantités de mouvement projetées sur l'axe des x, contenues dans cette enveloppe, est donnée comme auparavant par une expression de la forme (65). Mais, en effectuant la première intégration, on trouvera cette fois:

$$(67) \,.\,.\, q\int \varphi^i_{ghj..l}\,(r_l')\cos(r_l', x)\,dF_l' - q\int \varphi^i_{ghj..l}\,(r_l)\cos(r_l, x)\,dF_l.$$

La première de ces intégrales s'étend sur toute la surface extérieure, correspondant au rayon r_l', la seconde sur la surface intérieure, correspondant au rayon r_l. Les éléments superficiels dF_l' et dF_l peuvent au reste s'écrire encore d'une autre manière $r_l'^2\,df_l$ et $r_l^2\,df_l$; où df_l devient alors l'élément correspondant sur une sphère concentrique avec le rayon 1.

Remettons maintenant dans l'expression ci-dessus la valeur de $\varphi^i_{ghj..l}$ donnée par l'équation (17), et observons, en même temps, qu'il faut écrire r_l' en traitant la première intégrale, r_l en traitant la seconde. Comme il suffit de considérer les termes des deux séries qui contiennent des fonctions de sphère du premier ordre, parce que $\cos(r_l', x)$ et $\cos(r_l, x)$ sont aussi des fonctions de telle nature, l'expression (67) se transforme en celle-ci:

$$q \int Z_1 \cos(r_l', x)\, df - q \int Z_1 \cos(r_l, x)\, df,$$

qui s'évanouit évidemment, les deux cosinus ayant pour points correspondants les mêmes valeurs.

Donc, *la somme des quantités du mouvement partiel défini par le potentiel* $\varphi^i_{ghj..l}$ *projetées sur un axe quelconque, lequel mouvement est contenu dans une enveloppe sphérique, concentrique et extérieure par rapport à la sphère* S_l, *est égale à zéro.*

Il y a ainsi dans une telle enveloppe sphérique autant de mouvement dans un sens que dans le sens contraire; et cela aura lieu non seulement pour le mouvement partiel déterminé par le potentiel que nous venons de nommer, mais aussi pour celui qui est défini par le potentiel principal φ^i_g.

97. Les moments des quantités de mouvements partiels. — Considérons encore une fois un espace sphérique quelconque qui ne doit pas être coupé par la sphère S_l, et déterminons ici la somme des moments des quantités de mouvement partiel, contenues dans la sphère nommée, par rapport à un axe parallèle à l'axe des x, et qui passe par le centre l. Le mouvement partiel considéré doit être, comme auparavant, celui déterminé par le potentiel $\varphi^i_{ghj..l}$.

La densité étant égale à q, on a d'abord:

$$(68) \;.\;.\; q \int\!\!\int\!\!\int \left(\frac{d\varphi^i_{ghj..l}}{dy} (z - c_l) - \frac{d\varphi^i_{ghj..l}}{dz} (y - b_l) \right) dx\, dy\, dz,$$

l'intégrale étendue à tout le volume de la sphère. En effectuant l'intégration par partie, on la transforme en celle-ci:

$$(69) \;.\;.\; q \int \varphi^i_{ghj..l} \big((z - c_l) \cos(y, r) - (y - b_l) \cos(z, r) \big)\, dF,$$

où donc la nouvelle intégration doit être étendue sur toute la surface de la sphère nommée. En remarquant maintenant que les valeurs de $z - c_l$ et $y - b_l$ à cette surface sont égales à $r_l \cos(r, z)$ et $r_l \cos(y, r)$, on voit que l'expression trouvée s'évanouira. On peut donc énoncer:

Le mouvement partiel déterminé par le potentiel $\varphi^i_{ghj..l}$, *et contenu* *dans un espace sphérique quelconque qui ne coupe pas la sphère* S_l, *doit être distribué de telle manière que la somme des moments par rapport à un axe quelconque passant par le centre, sera égal à zéro.*

98. Il suit de là que dans un tel espace sphérique et excentriquement situé par rapport à S_l, il y a autant de mouvement de rotation autour d'un axe dans un sens que dans le sens opposé; et cela quelle que soit sa position, pourvu qu'il passe par le centre de la sphère nommée.

Si l'on considère, particulièrement, le mouvement idéal dans la sphère S_p, lequel mouvement, en effet, n'existera pas réellement, parce que S_p appartient au système des corps, on reconnaît qu'aucun mouvement de rotation ne se perdra ici. Le mouvement réactionnaire déterminé par le potentiel $\varphi^i_{ghj..l}$, et que nous nous figurons produit par suite de l'existence de la sphère S_l, tend ainsi, d'après ce que nous venons de voir, à modifier le mouvement de translation que possède la sphère S_p, en même temps qu'il se forme un nouveau mouvement réactionnaire, défini par le potentiel $\varphi^i_{ghj..lp}$; mais il ne peut faire varier ses rotations.

99. Considérons enfin une enveloppe sphérique et concentrique par rapport à la sphère S_l. Les deux rayons r_l et r_l' doivent être plus grands que S_l, et d'ailleurs $r_l' > r_l$. Dans un espace choisi de telle manière la fonction $\varphi^i_{ghj..l}$ sera partout, comme nous le savons, continue, avec ses dérivées par rapport aux coordonnées.

Cela posé, on peut intégrer par partie l'intégrale (68), qui désignera ici la somme des moments des quantités de mouvement contenues dans l'enveloppe considérée, par rapport à un axe parallèle à l'axe des x et passant par le centre l. En effectuant cette intégration, on obtient une différence de deux intégrales superficielles, qui sont toutes les deux de la même forme que l'intégrale (69). La première doit être étendue sur la surface extérieure, la seconde sur la surface intérieure de l'enveloppe. Chaque intégrale s'évanouira séparément, et l'on arrivera ainsi à la conclusion suivante:

Le mouvement qui dépend du potentiel partiel $\varphi^i_{ghj..l}$, *et qui est contenu dans une enveloppe sphérique quelconque concentriquement* *placée par rapport à la sphère* S_1 *s'y distribuera de manière que la somme des moments par rapport à un axe quelconque passant par le centre* I *doit être égale à zéro.*

Ainsi, dans cette enveloppe sphérique, non seulement les mouvements de translation, mais aussi les rotations se font équilibre; de sorte qu'il y a encore, par rapport à un axe central, autant de mouvement de rotation dans un sens que dans le sens contraire.

Diagnoser af nye Annelider fra Christianiafjorden,

efter Professor M. Sars's efterladte Manuskripter

ved

G. O. Sars.

Af de af min Fader i Christianiafjorden, navnlig ved Drøbak, iagttagne talrige Annelideformer vil i sin Tid en fuldstændig Fortegnelse tilligemed udførlige Beskrivelser af de nye og mindre bekjendte Arter blive givet i Nyt Magazin for Naturvidenskaberne som Fortsættelse af hans „Bidrag til Kundskab om Christianiafjordens Fauna". Da der imidlertid vel vil gaa nogen Tid hen, inden denne Afhandling kan udkomme in extenso, har jeg troet her foreløbigt at burde meddele Diagnoser af de allerede af min Fader characteriserede nye Former. Diagnoserne ere gjengivne saa vidt muligt ordret efter min Faders efterladte Manuskripter, kun med de Smaaforandringer, som maatte foretages, fordi de endnu ikke vare forberedte til Publication.

1. *Lænilla mollis* M. Sars, n. sp.

Lobus cephalicus paulo latior qvam longior, sulco medio longitudinali usqve ad basin, antice in prominentias duas conicas obtusas productus. Oculi 4, sat magni, 2 antici ab apice prominentiarum longe remoti in media fere longitudine capitis siti, 2 postici in vertice. Antennæ sub basi tentaculi (incisuram lobi cephalici occupante) orientes, lobo cephalico duplo fere longiore, glabræ. Palpi validi, glabri, antennis plus duplo longiores. Cirri tentaculares rare ciliati, articulo basali communi setis 2 antrorsum curvatis armato. Elytra totum dorsum tegentia, mollia seu subgelatinosa, haud cellulosa, omnino sine tuberculis nodulisve duris, glaberrima, papillis raris minimis conicis mollibus, primo pari suborbiculari excepto ovato-reniformia, haud ciliata. Setæ rami inferioris fere capillares, numerosæ, infra apicem integrum vel obsolete bidentatum paulo dilatatæ, utrinqve valde spinulosæ, spinulis longissimis, supra apicem longe prominentibus. Setæ rami superioris illis multo crassiores et breviores, vix vel paululum curvatæ, crebre transverse spinulosæ. Color: corpus cinereo-albidum; elytra pellucida luteo-alba papillis concoloribus opacis. Latitudo speciminis manci (posteriore parte destituti) sine setis 12 Mm, cum setis 20 Mm.

Habitat rarissima in freto Dröbachiensi, prof. 40—50 orgyar.

2. *Eteone fucata* M. Sars, n. sp.

Corpus lineare, utrinqve attenuatum, subdepressum, segmentis ultra 200, duplo vel triplo (primis ultimisqve 3—4plo) latioribus qvam longioribus. Lobus cephalicus abbreviato-conicus, antice truncatus, biannulus, oculis 2 posticis; tentaculorum alterum par sub paululumqve post alterum positum. Cirri tentaculares utrinqve duo, segmento buccali nudo affixi, inferior superiore fere $^1/_3$ longior, segmenta 3—4 seqventia juncta longitudine æqvans. Appendix foliacea pedum superior (cirrus dorsalis) magna (qvartam ad tertiam latitudinis corporis partem longitudine æqvans), obliqve cordata, extrorsum porrecta, a tuberculo setigero parum remota; appendix foliacea inferior (cirrus ventralis) superiore minor, elliptica, partim tuberculo setigero adnata eoqve perparum longior. Setæ, fasciculum componentes, compositæ, spinosæ, læves. Cirri 2 anales elongati, conico-acuminati, segmenta 4—5 proxima juncta longitudine æqvantes. Color flavido-albus, segmenta anterioris fere tertiæ corporis partis maculis notata 5 subrotundis aut transverse ovatis janthinis, qvarum 3 in dorso et 1 in utraqve appendice superiore. Longit. 100 Mm, latit. sine appendicibus 2 Mm, cum iis $3^1/_2$ Mm.

Habitat in freto Dröbachiensi, profunditate 60 orgyarum.

3. *Onuphis qvadricuspis* M. Sars, n. sp.

Corpus gracillimum, pallide luteum, opalinum, medio dorso lineis 2 longitudinalibus approximatis rubris, depressum (segmentis

5 prioribus subteretibus exceptis), segmentis circiter 150. Tentaculum medium (impar) lateralibus superioribus paulo tenuius multoqve brevius, lateralia inferiora illo paulo breviora. Antennæ 2 frontales, ovatæ, minutæ. Cirri 2 tentaculares in margine antico segmenti buccalis. Branchiæ anteriores simplices, deinde bifidæ, deniqve 3—4—5fidæ seu pectinatæ (latere exteriore filis 2—3—4 obsitæ) in posteriore corporis parte denuo simplices. Cirri anales 4, duobus superioribus longioribus. Setæ capillares, in segmentis 3 anticis curvatæ apice angustissime bifido, in ceteris rectæ apice simplice subcurvato, utrinqve arcte limbato, acuminato; in segmento 9—10mo. et omnibus seqventibus sub capillares uncini 2 elongati, subsigmoidei, crassi, apice bidentato late limbato, denticulo interiore exteriore majore. Longit. 60 Mm, latit. max. $1^1/_2$ Mm.

Habitat freqventissima in freto Dröbachiensi, profunditate 50—120 orgyarum, ad Aasgaardstrand, prof. 30 orgyar., nec non ad insulas Lofotenses (Skraaven) usqve ad 300 orgyar. Tubum inhabitat cylindricum, læve, limo obductum.

4. *Aricia norvegica* M. Sars, n. sp.

Forma et color corporis, lobus cephalicus et branchiæ velut in A. Cuvierii. Tubercula setigera sectionis anterioris superiora in marginibus dorsi lateralibus posita, labio subtrapezoideo apice latiore obliqve truncato bicuspide (raro tricuspide), setis numerosis capillaribus annulosis; tubercula setigera inferiora lateralia, minus longe qvam in A. Cuvierii decurrentia, labio cristæformi crenulato seu serie papillarum conicarum 8—12 inferne non continuata marginato, setis capillaribus numerosis simul cum setis fortioribus 7—8 seriem simplicem componentibus, rectis, subhastatis, longe prominentibus. Mutatio tuberculorum setigerorum in segmento $\frac{15}{16}$ vel $\frac{16}{17}$. Tubercula setigera sectionis posterioris velut in A. Cuvierii, sed cirro intermedio nullo.

Habitat ad Bollærene et Dröbak passim prof. 50—60 orgyar., copiose autem prof. 100—120 orgyar., nec non ad insulas Lofotenses prof. 90—100 orgyar.

5. *Trophonia flabellata* M. Sars, n. sp.

Corpus teres, postice paulo sensim attenuatum, inter segmenta parumper aut fere prorsus non constrictum, segmentis circiter 30, duplo fere latioribus qvam longioribus. Cutis arenulis minutis cinereis papillisqve minimis conicis, ad fasciculas setarum, præcipue anteriorum segmentorum, elongatis, subcylindricis, dense obsita. Setæ superiores primi segmenti antrorsum porrectæ, paucæ, modo 4—5, longissimæ (segmenta priora 6—7 juncta seu sextam ad septimam longitudinis corporis partem æqvantes), secundi segmenti circiter tertiam partem longitudinis illarum primi segmenti æqvantes, in ceteris segmentis superiores breviores et modo 2—3, inferiores solummodo 1 (raro 2) velut illæ capillares. Proboscis (caput) exserta cylindrica, duplo longior qvam latior, apice cirris prædita 12, qvorum 2 inferiores (tentacula) sulco longitudinali exarati duplo fere longiores et tri- aut qvadruplo crassiores qvam 10 superiores (branchiæ) æqvales, tenuissimi, filiformes. Color cinereus. Longit. 25 Mm, latit. max. 2 Mm.

Habitat rara in freto Drøbachiensi, prof. 40—50 orgyar., nec non ad insulas Lofotenses (Brettesnæs et Skraaven) prof. 120—300 orgyar.

6. *Chloræma pellucidum* M. Sars, n. sp.

Corpus gracile, subcylindricum, dorso maxime fornicato, ventre subplano, in parte anteriore crassius, posteriora versus attenuatum, segmentis 40—50 usqve ad 57, cute flavidulo-pellucida, ubiqve involucro obtectum mucoso hyalino crasso, corpusculis repleto innumeris microscopicis, hyalinis, filiformibus, longissimis, tenuissimis, rectis aut subspiraliter contortis, altera extremitate cuti immersis, altera libera incrassata elliptica aut lageniformi. Lobus cephalicus cirris branchialibus circiter 60, in duos fasciculos collatis, tenuibus, viridibus; tentaculis 2 flavis branchiis multo crassioribus duploqve longioribus. Tubercula setigera in omnibus segmentis primo ultimoqve exceptis, disticha, discreta, parva, subconica, superiora paulo latiora apice obliqve truncato, inferiora apice rotundato. Setæ loculatæ seu septis internis transversis prædítæ: superiores capillares, flabellum componentes, in primo segmento numerosæ, in ceteris circiter 8, longissimæ, tenuissimæ, flexiles; inferiores in primo segmento superioribus similes, in ceteris nonnullæ (5—6) capillares, tenuissimæ, brevissimæ, vix prominentes, et festuca seu seta composita unica (raro 2) crassior, subrigida, longissima, apice mobili magno hamato. Longit. corporis 70 Mm, crassit. max. 3 Mm.

Habitat ad oras totius Norvegiæ a littore ad profunditatem 80 orgyarum.

7. *Prionospio plumosus* M. Sars, n. sp.

Corpus gracilius, luteo-albidum, depressum, segmentis 84—85. Lobus cephalicus sublyratus, antice latior, margine frontali truncato angulis rotundatis, postice angustior rotundatus, marginibus lateralibus concavis. Cirri 2 tentaculares longissimi, subtus sulco longitudinali exarati. Labium foliaceum pinnæ dorsalis in segmentis 6—7 prioribus late lingulatum, dorso inclinatum, labio pinnæ ventralis majus, in ceteris labia utriusqve pinnæ magnitudine æqvali, parum prominentia, arcte semilunaria. Branchiæ luteæ, primum ultimumqve par mediis duobus majora, elongatæ, erectæ, pectinatæ vel strigiliformes, stirpe crassa subcylindrico-conica, apicem versus attenuata, latere anteriore plano aut subconcavo utrinqve fimbria ciliorum marginata ubiqve (apice excepto nudo) cirris tecto numerosissimis, tenuibus, cylindricis, flexuosis, non seriatis — tertio solummodo pari simplice, ciliato, sed cirris carente, excepto. Setæ capillares tenuissimæ, rectæ, acuminatæ, in tuberculis setigeris inferioribus segmenti 14mi et seqventium sub illis nonnullæ fortiores curvatæ; uncini, in segmento 13mo—14mo incipientes, elongati, subsigmoidei apice 2—3dentato (dente interno majore), late limbato. Longit. corporis 30 Mm, latit. max. $1^1/_2$ Mm.

Habitat rarus in freto Dröbachiensi, profunditate 50—60 orgyarum.

8. *Spiophanes cirrata* M. Sars, n. sp.

Corpus gracile, depressum, imprimis in parte anteriore, postice paulo attenuatum, colore luteo-albo, segmentis plus 90, brevibus, anticis utrinqve sulco profundissimo inter se discretis itaqve pedibus maxime prominentibus, segmento 18mo vel 19mo et seqventibus plica cutacea transversa lineari dorsali et pedibus parvis seu parum prominentibus. Lobus cephalicus antice truncatus, postice tentaculo brevi styliformi, oculis nullis. Labia foliacea interiora segmentorum primorum setigerorum omnino dorsalia, late lanceolata, segmentorum ceterorum lateralia, in segmento setigero 14mo et seqventibus in cirrum filiformem exeuntia. Cirri tentaculares crassi, elongati, in statu contracto segmenta antica 12—13 longitudine æqvantes, sulco longitudinali exarati. Segmentum anale brevissimum, truncatum, margine postico cirris circiter 8 filiformibus segmento paulo longioribus. Longit. corporis 17 Mm, lat. max. 1 Mm, cirri tentaculares contracti 5—6 Mm. longi.

Habitat in freto Dröbachiensi, prof. 25—30 orgyar., nec non ad insulas Lofotenses (Skraaven), prof. 90—100 orgyarum.

9. *Clymene planiceps* M. Sars, n. sp.

Corpus subcylindricum, minus gracile, ubiqve fere æqvaliter crassum, segmentis 27, qvorum 23 setigera, anali et 2 anteanalibus nudis. Lobus cephalicus, cum segmento buccali nudo coalitus, ovalis, inclinatus, planus, lævissimus, marginatus seu arcte limbatus, in parte anteriore sulcis duobus longitudinalibus parallelis, profundis, brevibus, rectis (antice non extrorsum flexis) et pone medium sulco minus profundo transverso arcuato. Setæ superiores, fasciculum componentes, capillares, plurimæ crassiores, læves, arcte limbatæ; aliæ tenuiores, superne dentatæ seu spinulis minimis adpressis biseriatis obsitæ. Setæ inferiores uncini: in segmentis 3 anticis solummodo unicus obvius, validus, conico-acuminatus, in ceteris multi, minuti, seriem simplicem transversalem formantes, rostrati, vertice rostri 3-serrulato, fasciculo setularum sub rostro. Segmentum postremum infundibuliforme, margine serie cirrorum 16—23 (in specimine manco maximo 34) brevium triangulari-acuminatorum æqvalium cincto; anus in fundo infundibuli conico-elevatus. Longit. 80 Mm., latit. 2 Mm.; e fragmento autem partis corporis posterioris capto apparet, hanc speciem duplicem fere magnitudinem asseqvi.

Habitat in freto Dröbachiensi, prof. 40—60 org., nec non ad insulam Teröen sinus Hardangerensis, prof. 15 org.

10. *Clymene Dröbachiensis* M. Sars, n. sp.

Corpus subcylindricum, carneum, segmentis 24, qvorum 20 setigera et 2 anteanalia nuda. Lobus cephalicus, cum segmento primo nudo coalitus, maxime inclinatus vel fere verticalis, breviter ovatus, subplanus carina media longitudinali haud alta, antice in processum brevem subglobosum exiens, limbatus, limbo lato haud distincte inciso. Segmentum ultimum infundibuliforme, fere æqve longum ac latum, margine cirris coronata 30—32 inæqvalibus, longioribus cum multo brevioribus alternantibus, qvorum unus medius ventralis ceteris plus duplo longior. Anus prorsus in fundo infundibuli. Tubus sat tenuis, fragilis, arenulis lapillisqve obductus, cinereus.

Habitat rarior in freto Dröbachiensi, prof. 40—50 org.

11. *Clymene affinis* M. Sars, n. sp.

Differt a præcedente, cui simillima, imprimis segmentis solummodo 23, qvorum 18 setigera et 3 anteanalia nuda, et margine segmenti analis infundibuliformis cirris (in specimine observato 22) æqvalibus coronato.

Habitat rarissima ad insulas Bollærene sinus Christianiensis, prof. 20—30 orgyar.

Lumbriclymene M. Sars, nov. gen.

Corpus vermiforme, subcylindricum, segmentis 24—25, qvorum 18—19 setigera, mediis longissimis, 4 anteanalibus nudis. Lobus cephalicus a segmento buccali biannulo sulco transverso bene distinctus, ovalis, inclinatus, haud limbatus. Setæ superiores, fasciculum componentes, capillares, læves, arcte limbatæ; setæ inferiores uncini: in segmentis 4 anticis setigeris solummodo unicus obvius, validus, conico-acuminatus, in ceteris multi, minuti, seriem simplicem transversam formantes, rostrati, vertice rostri serrulato. Segmentum anale elongatum, cylindricum, postice paulo obliqve truncatum, ano terminali subdorsali, cirris analibus nullis.

12. *Lumbriclymene cylindricauda* M. Sars, n. sp.

Corpus gracillimum, postice sensim paulo attenuatum. Lobus cephalicus sulcis duobus longitudinalibus brevibus, antice extrorsum flexis, inter qvos carina haud alta. Segmenta media corporis 6—7ies longiora qvam crassiora. Uncini rostrati vertice rostri qvadriserrulato, fasciculo setarum sub rostro. Color pallide carneus, pellucidus, vitta transversa sangvinea ad fasciculos setarum capillarium in parte ventrali segmentorum. Longit. 170 Mm, crassit. max. 2 Mm. Tubus sat tenuis, sed fortis, rigidus, fuscocinereus, arenulis lapillisqve obductus.

Habitat non freqvens in freto Dröbachiensi, prof. 40—60 org.

Streblosoma M. Sars, nov. gen. Terebellidarum.

Corpus vermiforme, subteres, postice paulo sensim attenuatum. Lobus cephalicus brevis truncatus, antice tentaculis numerosis elongatis canaliculatis, postice punctis ocularibus nullis. Segmentum buccale, primum, orem subtus circumdans, nudum. Branchiæ filiformes dorso segmenti secundi, tertii et qvarti affixæ, haud ramosæ, utrinqve in serie contigua transversa dispositæ. Fasciculi setarum capillarium modo in anteriore corporis parte, in segmentis 28—34 obvii, in segmento secundo (primo branchifero) incipientes, e tuberculis elongatis pinnulæformibus prodeuntes. Tori uncinigeri in segmento qvinto (i. e. qvarto setigero) incipientes, breves, ovales, pone ultimum segmentum setigerum in pinnulas mutati. Setæ capillares leviter curvatæ, anguste limbatæ, acuminatæ. Uncini breves aviculares, vertice uni — vel indistincte bidentato, uniseriales. Scuta ventralia in segmentis anticis conspicua, latissima. Tubus liber, teres, arenulis aut limo obductus, aut irregulariter flexuosus tortusqve aut spiraliter in anfractus regulares convolutus.

13. *Streblosoma cochleatum* M. Sars, n. sp.

Corpus fulvum segmentis circiter 90, anticis 8—10 tri- vel qvadruplo latioribus qvam longioribus, seqventibus longitudine crescentibus, mediis fere æqve longis ac latis, posticis (10—12) iterum multo brevioribus, ultimo truncato margine crenulato. Scuta ventralia 10, latissima, a toris lateralibus parum distincta, roseo-albida. Branchiæ filiformes, roseæ, subæqvales, longitudine crassitiem corporis æqvantes vel paulo superantes, utrinqve in serie antica 7—11, in media 4—10, in postica 4—7. Fasciculi setarum capillarium in segmentis 30—34, e tuberculis prodeuntes elongatis, tertiam fere latitudinis corporis partem longitudine æqvantibus, compressis apice obliqve truncato. Tubus crassus, ex limo confectus, nigricans, opacus, flexilis, mollis, fragilis, spiraliter cochleæ elongatæ instar in anfractus regulares subæqvales 6—7 usqve ad 11 magis minusve distantes (i. e. sese non tangentes) convolutus. Longit. circiter 80 Mm, latit. max. 3 Mm.

Habitat haud freqvens infreto Dröbachiensi, prof. 40—50 orgyar.

14. *Streblosoma intestinale* M. Sars, n. sp.

Præcedenti simillimum, sed multo minus, segmentis 64—74. Branchiæ filiformes, sangvinæ, utrinqve in serie antica 3—4, in media 2, in postica 1 (interdum absente), anteriores longitudine fere crassitiem corporis æqvantes, posteriores breviores. Fasciculi setarum capillarium in segmentis 28—30. Tubus tenuis longus, ex arenulis confectus, cinereus, subpellucidus, parum flexilis vel subrigidus, fragilis, maxime et irregulariter flexuosus tortusqve. Longit. 40 Mm, latit. max. 1 Mm.

Habitat freqventissimum in freto Dröbachiensi, prof. 25—60 orgyar., nec non ad insulas Lofotenses (Odvær), prof. 50 orgyar.

Thelepodopsis M. Sars, n. gen. Terebellidarum.

Corpus vermiforme, subteres, postice sensim paulo attenuatum. Lobus cephalicus brevis, truncatus, antice tentaculis numerosis canaliculatis, margine angusto pone tentacula punctis numerosis fusco-nigris, oculis dictis, sparsis. Segmentum buccale nudum. Branchiæ filiformes dorso segmenti secundi tertiiqve adnatæ haud ramosæ, utrinqve in serie contigua transversa dispositæ. Fasciculi setarum capillarium modo in anteriore corporis parte, in segmentis 28—33 obvii, in segmento tertio (secundo branchifero) incipientes, e tuberculis subcylindricis brevissimis prodeuntes. Tori uncinigeri in segmento qvinto (tertio setigero) incipientes, mediocres, elliptici, pone ultimum segmentum setigerum in pinnulas mutati. Scuta ventralia in segmentis anticis latissima, a toris uncinigeris parum discreta. Setæ capillares anguste limbatæ, acuminatæ. Uncini breves aviculares vertice unidentato. Tubus liber, cylindricus, fragilis, subrectus aut parum curvatus, e qvisqviliis (fragmentis testaceorum frustulisqve algarum sæpe longe prominentibus) confectus ideoqve maxime hispidus.

15. *Thelepodopsis flava* M. Sars, n. sp.

Corpus flavum vel luteum, interdum fere sulphureum, segmentis circiter 60 vel pluribus, anticis qvadruplo fere latioribus qvam longioribus, seqventibus sensim longitudine crescentibus, ultimis setigeris et seqventibus fere æqve longis ac latis; dorso punctato vel minutissime pustuloso rugoso, utrinqve sulco longitudinali profundo a ventre discreto. Tentacula dimidiam longitudinem corporis superantia, pallide lutea punctis numerosis fulvis. Branchiæ filiformes, flavæ, utrinqve in segmento secundo 8—11, longitudine dimidiam fere latitudinis corporis partem æqvantes, in tertio 5–6, illis aliqvantum breviores. Longit. speciminis junioris integri e segmentis circiter 60 constantis 30 Mm, latit. max. 2 Mm; longit. speciminis multo majoris, sed manci, e segmentis 46 (posterioribus absentibus) compositi 40 Mm, latit. max. 3 Mm, longit. tentaculorum 40 Mm.

Habitat sat freqvens in freto Dröbachiensi, prof. 40—50 org.

16. *Chone longocirrata* M. Sars, n. sp.

Corpus subgracile, depressiusculum, segmentis circiter 50, duplo fere latioribus qvam longioribus, sulco transverso bipartitis.

Collare subproductum haud plane æqve altum, margine integro antico in æqvo decurrente, in ventre antrorsum paulo longius producto qvam in dorso, tantummodo in dorso sulco profundo lineari non hiante dimidiatum. Branchiæ, utrinqve 6—7, apice nudo non marginato, filiformi vel setaceo, longissimo ($^1/_3$ fere longitudinis branchiæ), radiolis longis flexuosis. Cirri tentaculares 8 teretes, filiformes, subæqvales, longissimi, branchiis perparum breviores, multo autem tenuiores. Color corporis cinereo-albidus; branchiæ ad basin luteæ, apicem versus albidæ, radiolis niveis. Tubus tenuis, elongatus, arenulis obtectus. Longit. corporis 13 Mm, latit. non pæne 1 Mm; longit. branchiarum 6 Mm.

Habitat rara in freto Dröbachiensi, prof. 40—50 orgyar.

17. *Dasychone inconspicua* M. Sars, n. sp.

Corpus minus crassum (latitudine decimam ferme longitudinis partem æqvante), subdepressum, ante apicem posteriorem sat repente contractum parum latitudine decrescens, ano terminali. Segmenta, numero 58, brevissima (longitudine eorum antice et in medio corpore tertiam ad qvartam, postice nonam ad decimam latitudinis partem æqvante). Collare humile branchiis non appressum, dimidiatum, dorso latissime hians, lateribus levissime incisum, laciniis ventralibus brevibus inflexis. Anterior corporis pars octo composita segmentis, triplo fere longior qvam latior. Paria branchiarum 23, basi cute connexa, tertiam ferme longitudinis corporis partem æqvantia, subtenuia, radiolis gracilibus; pinnulis dorsalibus per paria 6—8 æqvidistantia dispositis, brevibus, tenuibus, simpliciter filiformibus seu cylindricis; punctis ocularibus nullis. Tentacula duo, tertiam longitudinis branchiarum partem æqvantia aut paulo superantia, subtrigona, lanceolata. Color corporis pallide flavido-cinereus, puncto nigro in omnibus segmentis inter tubercula setigera et toros uncinigeros; branchiæ corpori concolores, immaculatæ. Longitudo totius animalis 30 Mm, latit. max. corporis 2 Mm.

Habitat rara in freto Dröbachiensi, profunditate 50—60 orgyarum.

18. *Protula borealis* M. Sars, n. sp.

Corpus vermiforme, subdepressum, cinereum, postice veridulum, segmentis 90—105. Anterior corporis pars e segmento composita buccali nudo branchias gerente septemqve segmentis setigeris utrinqve præditis tuberculo setigero setis longis capillaribus, et sub illo, primo segmento excepto, toro uncinigero setis uncinatis (strigilibus) minimis; membrana tecta thoracali albido-translucida, lateribus longe extra fasciculos setarum expansa. Segmentum primum (interdum duo priora) partis corporis posterioris nudum, cetera utrinqve toro prædita uncinigero superiore et fasciculo setarum capillarium inferiore; setæ capillares segmentorum 20—30 posticorum longissimæ, ceterorum brevissimæ. Branchiæ tertiam ferme longitudinis corporis partem æqvantes, utrinqve circiter 30, spiram anfractus sesqvi formantes, pallide flavæ (interdum aurantiacæ), immaculatæ, basi cute connexæ, tenues, radiolis longis tenuissimis, apice nudo setaceo. Longitudo totius animalis 53 Mm.

Tubulum inhabitat calcareum, cylindricum, crassum, album, læve, solummodo rugulis annularibus (striis incrementi) ornatum, inferne alienis corporibus adnatum, irregulariter contortum aut spiras plures superincumbentes formantem, deinde plus minusve erectum liberumqve, 3—4 pollices longum, diametro aperturæ $\frac{1}{8}$".

Habitat ad oras totius Norvegiæ, profunditate 30—300 orgyarum.

Om den Gruppe af Substitutioner, der tilhører Ligningen for Division af Perioderne ved de elliptiske Funktioner.

Af L. Sylow.

(Foredraget i Mødet den 9 Juni 1871.)

Størrelserne

$$\sin \mathrm{am}\, \frac{4pK + 4qK'i}{2n+1},$$

som jeg for Kortheds Skyld vil betegne med $x_{p,q}$, tilfredsstille en Ligning af Graden $(2n+1)^2 - 1$, hvis Rødder man faar ved at give p og q Værdierne fra o til 2n med Udelukkelse af Kombinationen $p = q = o$. Man ved (se Traité des substitutions etc. par M. *Camille Jordan,* Pag. 342—343), at Substitutionerne i denne Lignings Gruppe alle ere lineære, af Formen

$$|\, p, q \quad mp + m'q,\ \mu p + \mu' q \,|,$$

og at Ligningens Gruppe indeholder alle de Substitutioner af denne Form, hvis Determinant, $m\mu' - m'\mu$, er $= 1 \pmod{2n+1}$, idet disse Substitutioner udgjøre, hvad Hr. *Jordan* kalder Ligningens Monodromi-Gruppe med Hensyn til Modulen, k.[1] Det fremgaar endvidere, som Hr. *Jordan* paa det anførte Sted bemærker, af Hr. *Hermites* Arbeider over Modularligningerne, at Gruppen, i det Mindste naar $2n+1$ er Primtal, maa indeholde en eller anden Substitution, hvis Determinant er kvadratisk Ikkerest, da nemlig Produktet af Røddernes Differentser i den tilsvarende Modularligning, — hvilket er en rational Funktion af Størrelserne $x_{p,q}$, der er uforanderlig ved enhver lineær Substitution, hvis Determinant er kvadratisk Rest, — ikke kan udtrykkes som rational Funktion af k, uden at man indfører Rodstørrelsen $\sqrt{(-1)^n(2n+1)}$.

Det staar saaledes endnu som uafgjort, hvilke af de Substi-

[1] Det er let at se, at Slutningerne paa det anførte Sted, uagtet fremsatte under Forudsætning af, at $2n+1$ er Primtal, ogsaa gjælde, naar det er sammensat.

tutioner, hvis Determinant er kvadratisk Rest, Gruppen virkelig indeholder. Det er dette Spørgsmaal, som jeg her skal besvare, idet jeg beviser, at *Divisionsligningens Gruppe indeholder alle lineære Substitutioner;* jeg skal desuden bevise, *at de numeriske Irrationalier, som man har at indføre som bekjendte Størrelser for at faa Ligningens Gruppe reduceret til Monodromi-Gruppen, ikke ere andet end de* $(2n+1)^{te}$ *Rødder af Enheden.* Jeg benytter mig hertil af Relationer mellem Størrelserne $x_{p,q}$ og Rødderne af Enheden, som jeg tidligere har bevist (se Vidensk.-Selsk. Forh. for 1864, Pag. 68—92). Sætter man nemlig

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{2n+1}},$$

saa har man $$\sum_0^{2n} p\ \varepsilon^{4pq} x_{p,q} = 0$$

og almindeligere $$\sum_0^{2n} p\ \varepsilon^{4pq(m\mu'-m'\mu)} x_{mp+m'q,\, \mu p+\mu' q} = 0,$$

medens man paa den anden Side ikke kan have:

$$\sum_0^{2n} p\ \varepsilon^{4pqz} x_{mp+m'q,\, \mu p+\mu' q} = 0$$

for alle Værdier af q, uden naar

$$z \equiv m\mu' - m'\mu \pmod{2n+1}.$$

Medregnes nu ε til de bekjendte Størrelser, indskrænkes Ligningens Gruppe saaledes, at den kun beholder de Substitutioner, der lade disse Relationer bestaa. Men ved Substitutionen

$$\theta = |\ p, q \quad mp+m'q, \mu p+\mu' q\ |$$

gaar den første af Relationerne over til følgende:

$$\sum_0^{2n} p\ \varepsilon^{4pq} x_{mp+m'q,\, \mu p+\mu' q} = 0,$$

en Ligning, som kun er rigtig, hvis man har

$$m\mu' - m'\mu \equiv 1.$$

Kun under denne Betingelse hører altsaa θ til den reducerede Gruppe, eller med andre Ord: Indførelsen af ε som bekjendt Størrelse reducerer Ligningens Gruppe til Monodromi-Gruppen.

Betegnes nu Monodromi-Gruppens Orden med o, den totale lineære Gruppes Orden med O, saa er Divisionsligningens Gruppe af en Orden, der er et Multiplum af o og en Divisor af O, og som vi ville betegne med O'. Forholdet $\frac{O'}{o}$ kan nu med Lethed bestemmes ved Hjælp af den Reciprocitet, som finder Sted mellem Simplifikationen af en Lignings Gruppe ved Hjælp af Rødderne i en anden, og Simplifikationen af den anden Lignings Gruppe ved Hjælp af Rødderne i den første (se Hr. *Jordan's* Traité etc. Pag. 269). Er nemlig

$$f(\varepsilon) = 0$$

den irreduktible Ligning, der bestemmer ε, P dens Gruppes Orden, saa vil ved Hjælp af Størrelserne $x_{p,q}$ den nysnævnte Lignings Gruppe reduceres til en Orden p, og man vil have

$$\frac{O'}{o} = \frac{P}{p}.$$

Men Størrelsen ε kan aabenbart udtrykkes som rational Funktion af Størrelserne $x_{p,q}$; thi den tilfredsstiller de to Ligninger

$$\sum_{0}^{2n} \varepsilon^{4pq} x_{p,q} = 0$$

$$f(\varepsilon) = 0,$$

der, som ovenfor bemærket, kun have denne ene Rod fælles, og kan følgelig udtrykkes som rational Funktion af deres Koefficienter. Naar altsaa Størrelserne $x_{p,q}$ regnes som bekjendte, er ε, og saaledes ogsaa enhver Rod i Ligningen $f(\varepsilon) = 0$, rational Funktion af bekjendte Størrelser; følgelig har man

$$p = 1, \ \frac{O'}{o} = P.$$

Nu er P lig Antallet af indbyrdes Primtal til $2n+1$, der ere mindre end $2n+1$; hvilket netop er Værdien af $\frac{O}{o}$. For det Første er nemlig Determinanten af enhver lineær Substitution indbyrdes Primtal til $2n+1$; for det Andet er Antallet af de lineære Substitutioner, hvis Determinant er $\equiv r$, lig Antallet af dem, hvis Determinant er $\equiv 1$, d. e. lig o; thi hine udledes af disse ved at multiplicere dem med en og samme lineære Substitution, hvis Determinant er $\equiv r$, f. Ex. $\left| p, q \quad rp, q \right|$.

Man har altsaa $O' = O$, d. e. Divisionsligningens Gruppe er af samme Orden som den totale lineære Gruppe; da den desuden indeholdes i denne sidste, sluttes, at begge ere identiske.

Af det her udviklede er den ovennævnte *Hermite'ske* Sats om Produktet af Differentserne af Rødderne i Modularligningen en Følge. Denne Funktion af Divisionsligningens Rødder kan nemlig vises at være uforanderlig ved enhver lineær Substitution, hvis Determinant er kvadratisk Rest, medens den skifter Fortegn ved dem, hvis Determinant er Ikkerest. Som Følge heraf bliver den af Formen

$$F(k)\,\varphi(\varepsilon),$$

hvor $F(k)$ er en rational Funktion af k, $\varphi(\varepsilon)$ en rational Funktion af ε, der antager to, kun ved Fortegnet forskjellige, Værdier, naar man for ε sætter de forskjellige Rødder i Ligningen $f(\varepsilon) = 0$. Men nu er enhver saadan Funktion af ε af Formen

$$a\sqrt{d},$$

hvor a er et rationalt Tal, d Diskriminanten af Ligningen

$$\varepsilon^{2n+1} - 1 = 0.$$

Denne sidste har nu Værdien

$$(-1)^n\,(2n+1)^{2n+1},$$

altsaa bliver Produktet af Differentserne af Modularligningens Rødder af Formen

$$F(k)\sqrt{(-1)^n\,(2n+1)}.$$

Samme Udtryk gjælder forøvrigt ogsaa, om Transformationens Grad er $(2n+1)^r$; men det er herved at bemærke, at der da ved Modularligningen skal forstaaes den *irreduktible* Ligning, hvis Grad er $(2n+1)^{r-1}(2n+2)$, og hvis Rødder ikke tilfredsstille Modularligninger af lavere Grader. Er derimod Transformationens Grad sammensat af forskjellige Primfaktorer, saa er den irreduktible Modularlignings Diskriminant et fuldstændigt Kvadrat.

Forklaring over nogle Ord og Udtryk i det gamle norske Sprog.

Af Johan Fritzner.

(Foredraget i Mødet den 30 September 1871.)

1. Hafit rauða

er et Udtryk, der, naar undtages et Vers af Grettir[1], neppe forekommer oftere, end paa et eneste Sted i vore gamle Skrifter. Men netop paa dette Sted ligger ogsaa dets Betydning saa klar for Dagen, at derom ikke vel kan være nogen Tvivl. Ti naar det her, i Grágás (V. Finsens Udgave) 1ste Del Side 205, heder: nú heldr jörð griðum upp, en himinn varðar fyrir ofan, en hafit rauða fyrir útan, er liggr um öll lönd þau er vér höfum tíðindi af, saa er jo dermed udtrykkeligen sagt, at ved hafit rauða skal forstaaes Verdenshavet, det yderste Hav (úthafit, útsjórinn, umsjórinn), der efter den ældste Forestilling som en stor Flod omgav hele den bekjendte Verden (miðgarðr, got. midjungards) og i Myterne fremtræder under Billedet af en stor Orm, der bider sig i sin egen Hale (miðgarðsormr, jörmungandr).[2]

[1] Grettis saga c. 24 Side 60 efter Kjøbenhavner Udgaven af 1853. I et Vers af Sighvat Skald i Fornm. sög. IV, 193 forekommer með rauða salti, der ikke kan opfattes anderledes, end om der havde staaet með rauða hafi, men paa det tilsvarende Sted i Saga Olafs konungs hins helga (Christ. 1853) Side 83 staar „með grœno salti".

[2] Snorra Edda I, 106; J. Grimm DM[1] 458 fg. DM.[3] 754, hvormed kan sammenholdes Prellers griechische Mythologie, (2den Udg.) I, 27. — Da Midgardsormen netop derfor betegnes med Navnet jörmungandr, fordi Ormen har en iøjnefaldende Lighed med en smidig Kjæp (hvorved man uvilkaarligen kommer til at tænke paa Fortællingen i 2 Mos. 7, 9—15), er der efter min Formening fuld Grund til i jarðar hasla at se en poetisk Omskrivning af Midgardsormens Navn. Saaledes har ogsaa S. Egilsson forstaaet Udtrykket, men hans Opfatning kan dog forsaavidt neppe være rigtig, som han gaar ud fra, at hasla er = lat. circulus, og grunder dette derpaa, at man satte heslistengr í hring om

Mere uklart er det derimod, hvorledes Verdenshavet er kommet til at kaldes hafit rauða, eller hvad der ligger til Grund for denne Benævnelse. For om muligt at faa Rede derpaa er det naturligt, at man ser sig om for at opsøge og om muligt finde lignende Benævnelser paa Verdenshavet i andre Sprog, for at derfra kan kastes det ønskede Lys over det her omhandlede Udtryk. Saadanne behøver man da heller ikke at søge forgjæves. Ti de forekomme endogsaa hos Folk og i Sprog, der høre til de med vort eget nærmest beslægtede. Saaledes hørte det i ældre Tid, og hører maaske endnu den Dag i Dag, til Folketroen i Engelland, at the Red Sea er det sikkreste, men tillige det værste Sted, hvortil man ved Besværgelser kunde henvise Gjengangerne, naar disse foruroligede eller forulempede de gjenlevende ved sine Besøg[1]. I Flandern antoges det ogsaa, at naar man i Kirkerne

den udsøgte Kampplads. Ti som der til en saadan Ring udkrævedes et større Antal heslistengr eller höslur, og hasla altid betyder en enkelt Hasselkjæp, men aldrig en Ring af saadanne, saa kan hasla vel heller aldrig bruges til at betegne en Ring i Almindelighed. Men jarðar hasla kan heller ikke, som K. Gislason mener (Aarb. f. nord. Oldk. 1868 S. 363), minde om moldþinurr, eftersom Betydningen af hasla og þinurr er aldeles forskjellig, ligesom þinurr heller intet har at gjøre med vort Folkesprogs tina (= det gamle tína, se min Ordbog Side 673 b) og tenung (= det gamle teinungr, se min Ordbog Side 666 a).

[1] „A ghost may be laid for any term less than an hundred years and in any place or body, full or empty; as a solid oak — the pommel of a sword — a barrel of beer, if a yeoman or simple gentleman — or a pipe of vine, if an esquire or a justice. But of all places the most common and what a ghost least likes, is the Red Sea, it being related in many instances, that ghosts have most earnestly besougth the exorcists not to confine them in that place. It is nevertheless considered as an indisputable fact. that there are an infinite number laid there, perhaps from its being a safer prison than any other nearer at hand, though neither history nor tradition gives us any instance of ghosts escaping or returning from this kind of transportation before their time". Brand observations on the popular superstitions of Great Britain (London 1853) III, 72 jvf. 69[6] 85.[38] Hinsides Oceanet eller en stor Flod, der skilte den fra de levendes Hjem, laa ogsaa efter Grækernes ældste Forestillinger Underverdenen eller de dødes Boliger, hvorfra ingen kunde komme tilbage; jvf. Preller griechische Mythologie (2den Udg.)

læste de helliges Litani under Paakaldelse af deres Hjælp mod alle de onde Magter, som fortrædige Menneskerne, maatte alle de helsche geesten fare in den grond der rooden zee[1]. Rigtignok kunde det synes, som om Udtrykket den røde Sø eller det røde Hav her havde en anden Betydning end den, hvori hafit rauða findes brugt hos os, eftersom her udtrykkeligen siges, at dermed skal forstaaes det Sted, hvor Farao omkom med sin Hær. Men denne Forklaring tilhører vistnok en nyere Tid, da Udtrykkets ældste Betydning var gaaen ud af den almindelige Bevidsthed, og det forekom naturligt at tage det i samme Betydning som den, hvormed det forekommer i den hellige Skrift, saa meget mere som det kunde synes passende at anvise deslige Menneskerne fiendtlige Væsener den samme Lod, som tilfaldt Farao med hans Hær, da han gik frem som en Fiende af Guds eget Folk.

Uagtet der saaledes ikke fattes Vidnesbyrd om, at jo Oceanet eller Verdenshavet ogsaa hos andre har baaret Navn af det røde

I, 633—638. Med ovennævnte engelske Folketro hænger det vel ogsaa sammen, naar, efter hvad nylig en Søfarende tilfældigvis er kommen at fortælle mig, man til Søs taler om, at Fanden sidder paa Bunden af det røde (stundom heder det ogsaa: det sorte) Hav og arbejder paa Sandtauget (jvf. Harbarðsljóð 18; Zeitschrift für deutsche Mythologie II, 148) uden at kunne faa det færdigt, fordi der hver Bededag gaar et Stykke løst af hvad han har snoet.

[1] „Eenige jaren later beval men in de kerken tegen al dat helsch gespens, de litanie der heiligen te lezen, en op het uitsprechen der volgende woorden:“ van de listen des duivels verlost ons heer „werd de helsche geesten 't zij in weerwolfvellen, waterduivels of galge jongen stellende, zoodadanig in hunne magt betengeld, dat zij uit spyt het land verlieten, en in den grond der rooden zee vloogen ter plaets alwaer Farao met ziin leger versmoord is en es nog van tijd tot tijd de zee zoo onstinnig maken dat zij moegelik om bevaren is.“ Theoph. P. A. Lanzens vlämische Sagen und Gebräuche i Zeitschrift für deutsche Mythologie III, 172. „Det røde Hav“ synes i samme Betydning ogsaa at forekomme i Æventyret: Van 't vischertjin in de rôo zee, der indeholdes i Oude Kindervertelsels in den Brugschen Tongval verzemelt en uitgegeven door Adolf Lootens, met spraakkundige anmerkungen over het brugsche taaleigen door M. E. F. Brüssel 1868, hvori Samtalen mellem Fiskeren og Fisken begynder med disse Fiskerens Ord: Vischtji, Vischtji in de rôo zee. Se Liebrechts Meddelelse i Bartschs Germania XIV, 91 fg.

Hav, saa have de her omhandlede dog ikke afgivet noget Bidrag til dette Udtryks Forklaring. Det er dog heller ikke allene i de nyere Sprog, at dets Forekomst kan paavises. Som foran nævnt og ellers noksom bekjendt betegnedes jo derved ogsaa den arabiske Havbugt, medens man dog ikke skal have vidst af at give dette Farvand en saadan Benævnelse før Hieronymus' Tid, men tidligere altid ved det røde Hav (ἐρυθρὰ θάλασσα) forstod, hvad vi nu kalde det indiske Hav[1]. Men her dukker da atter op det samme Spørgsmaal, hvad der vel kan ligge til Grund for denne Benævnelse. For den arabiske Havbugts Vedkommende har man søgt Grunden dertil dels i den røde Farve, som skulde være ejendommelig for et deri forekommende Søgræs, dels i de Klippers røde Farve, der omgive dens Bredder. Men ingen af disse Forklaringer skal kunne bestaa efter deres Dom, der have undersøgt disse Egnes Naturforhold. Holder man derimod fast ved, at der ved det røde Hav oprindeligen forstodes hele det indiske Ocean, hvorfra Navnet da senere er gaaet over paa dets vestligste Bugt i Særdeleshed, forekommer det mig, at det let kan finde en saare naturlig Forklaring. Grunden til, at man saaledes benævnede hele det store østlige Ocean, er nemlig efter min Formening den samme, som bevægede Grækerne til at henlægge eller tænke sig en Ø ved Navn Erytheia ved Solens Nedgang i det vestlige Ocean, eftersom det yderste Hav ligesaavel ved Solens Opgang som ved dens Nedgang farves rødt af dens Straaler. Det samme, at man ved at se Solen gaa op eller ned bag Havet ved Horisontens yderste Grænse saa dette antage et rødligt Skjær, har vistnok ogsaa foranlediget vore Forfædre til at give Verdenshavet eller det yderste Hav (ú t h a f î t, ú t s j ó r i n n) Navn af det røde Hav. Deraf, at man saa ofte saa Solen gaa ned under Horisonten ved det yderste synlige Havs Grænse, kommer jo det om Solens Nedgang ofte brugte Udtryk s ó l g e n g r í æ g i. Om det røde Skin, som Solen ved dens Opgang kaster paa Havet eller Fjeldtopperne, brugtes ogsaa jevnligen Verbet r j ó ð a (hvoraf Adjektivet r a u ð r),

[1] Se Winers Biblisches Realwörterbuch (2den Udgave) II, 85 Anm.; M. J. de Goeze i Benfeys Orient und Occident III, 431.

f. Ex. um morgininn sem sól rýðr fjöll, Fornm. sög. XI, 438; rétt íþann tíma er sólin tekr fyrst at rjóða, Karlamagnus s. 254[30]; árla sunnudags morguninn er sól rauð, Biskupa s. II, 47[13]; ligesom sólarróð betegnede dette Solens røde Skin. Men hvad kunde saa være naturligere, end at man kaldte det yderste Hav, der saa ofte farvedes rødt af den opgaaende eller nedgaaende Sols Straaler, hafit rauða, og at dette kom til at blive et let forstaaeligt Navn paa det store Hav, der antoges at omgive hele den bekjendte Verden? Det har endog forekommet mig ikke usandsynligt, at ogsaa ἐρυθρὰ θάλασσα hos Grækerne har været brugt i den samme Betydning. Naar der i Pindars 4de pythiske Ode efter Professor Schjøtts Oversættelse i Kristiania Videnskabsselskabs Forhandlinger for 1870, Side 297, siges om Argonauterne, at „de sejlede paa Oceanets Bølger og det røde Hav og kom til de lemniske Kvinders Skare, som havde ihjelslaget sine Mænd", da ligger det i al Fald saare nær for den, der ikke kan give sig af med en selvstændig Granskning og Fortolkning af den græske Original, at opfatte „Oceanets Bølger" og „det røde Hav" ikke som Benævnelser af to forskjellige Ting, men som to parallele Udtryk, hvorved et og det samme skal betegnes.

2. Aldrnari

nævnes blandt elds heiti, Snorra Edda II, 486, uden at der dog her eller andensteds i de gamle Skrifter meddeles os nogen Oplysning om, hvorledes Ilden er kommen til en saadan Benævnelse. At Ordet virkelig er anvendt til at betegne Ilden, er ogsaa sikkert nok, skjønt Udtrykkets Forekomst ikke kan paavises andensteds end i Völuspá 56, hvor det heder: geisar eimi við aldrnara[1] og Talen er om Verdens Undergang, der foregaar ved Ildens ødelæggende Magt. Dets Oprindelse eller Berettigelse har S. Egilsson søgt at forklare saaledes, som om den egentlige Betydning af aldrnari var vitae nutritor og det derfor passende

[1] Snorra Edda I, 198 gjengives den samme Verslinje lidt anderledes, nemlig: geisar eimi ok aldrnari.

kunde bruges om Ilden, fordi Varme hører med til Livets Betingelser og Kjendetegn[1].

At nari staar i Forbindelse med næra (ikke: næra) ɔ: vederkvæge, hvilket svarer til got. nasjan, ght. nerjan, og forudsætter et primitivt Verbum nara (jvf. got. ganisan, ght. ganesan) med samme intransitive Betydning som lat. vegeo, vigeo, og med et Præt. nór, hvis Forekomst dog ikke kan paavises, medens derimod et Verbum nara med Præt. narði og samme Betydning forekommer i Skirnismál 31, Alexanders saga 100: det er ogsaa vist nok. Men Betydningen af aldrnari maatte vel hellere være vitae vigor end vitae nutritor (vegetator); og selv om man var berettiget til at lægge den sidstnævnte Betydning i aldrnari og ved Livsnærer forstaa Livsvarmen, Legemets dyriske Varme, saa er der dog vel en altfor stor Forskjel paa Varme og Ild, om end Varme ofte fremkaldes eller vedligeholdes ved Ild, til at man ved et Udtryk, der betegnede Livets Ernærer, skulde komme til at tænke paa Ilden eller kunne være berettiget til at betegne den.

Derimod forekommer det mig let forklarligt, at aldrnari i Betydning af vitae vigor eller Livskraft, Livets Vedvaren (modsat aldrlag ɔ: Livets Ophør) kunde komme til at bruges om Ilden eller blive et Udtryk, hvorved den betegnedes. Ti naar det er forbi med Livskraften og Livet ophører, siger man jo endnu den Dag i Dag, at Livet udslukkes, noget, som tydelig nok viser, hvor nær Livets Vedvaren og Ildens Flamme, Livets Ophør og Ildens Sluknen falder sammen i Menneskernes Forestilling. Som kveikja eld ikke allene i det gamle, men ogsaa i Nutidens Sprog jevnligen bruges i Betydningen af at optænde (tendra) Ild[2], og

[1] Saaledes har jeg nemlig maattet opfatte Ordene: qs vitae nutritor (aldr, næra), calor it. ignis. Et andet Forsøg paa at forklare Udtrykkets Betydning, nemlig af det arabiske, behøver ingen Imødegaaelse.

[2] I Forbindelse hermed staar sandsynligvis den Overensstemmelse, som i de ældste Tider hos Inderne, tildels ogsaa hos andre med dem beslægtede Folkeslag, fandt Sted dels mellem Ildens første Tilveiebringelse og de første Menneskers Oprindelse efter den almindelige mytiske Forestilling, dels mellem den Maade, hvorpaa man plejede opgjøre ny Ild, og Maaden, hvorpaa Menneskeslægten forplantes,

man siger om den sluknende Ild, at den dør ud: saa bruges i det norske Folkesprog endogsaa nœra om at vedligeholde eller underholde den, ligesom man i Tydskland siger: die kohle stirbt, i Frankrig: la chandelle se meurt. Omvendt bruges Verbet slokna saavel i vort gamle Sprog (Thomas saga erkibiskups, udg. af Unger, Side 471[36]), som i Nutidens Folkesprog med Betydningen af at dø, ligesom man ogsaa stundom hører tale derom, at et Menneske er død saa stille, som om man slukte et Lys. Hermed hænger det vel ogsaa sammen, at man endnu i flere af Norges Egne plejer bære to brændende Lys foran Liget, naar det af Huset udbæres til sin Begravelse[1], og at man i den ved Banlysning brugelige Procession udbar brændende Lys, som sluktes ved at vende den brændende Ende nedad eller steypa kertum (se min Ordbog over det gamle norske Sprog under steypa 1).

Hvor gjerne vore Forfædre tænkte sig Livet og Døden under Billedet af et brændende eller sluknende Lys, fremtræder dog især tydeligen i den bekjendte mytiske Fortælling om Nornagest[2], til hvem der, da han endnu laa i Vuggen, hvor der brændte to Lys over ham, kom tre Völver eller spákonur af dem, der spáðu mönnum aldr. Af disse spaaede eller beskikkede nu den yngste ham den Lod, at han ikke skulde leve længere, end det Lys brændte, der stod ved hans Side; hvorpaa den ældste tog og slukte Lyset og derefter bad hans Moder tage det i Forvaring for ikke at tænde det igjen førend paa hans Livs sidste Dag. Da han var bleven voxen, overgav hans Moder ham dette Lys,

saaledes som A. Kuhn har paavist i sit Skrift „Die Herabkunft des Feuers und des Göttertranks“ paa flere Steder, men især Side 24. 26. 70 fgg. 104—106.

[1] „Das leben erlischt gleich einem lichte, weshalb man auch auf sargen, ehe sie mit der leiche fortgetragen werde, aus symbolischen grunde pflegt lichter nieder brennen zu lassen“. Pott i Zeitschrift für vergleich. Sprachforschung II. 106.

[2] Þáttr af Nornagesti, udg. af S. Bugge i Norrœne Skrifter af sagnhistorisk Indhold; ogsaa i Flateyarbók (Kristiania 1860), I, 346—359 og i Fornaldar sögur Nordrlanda, I. 313—342. — Om denne og andre Fortællinger, for hvilke samme Forestilling ligger til Grund, jevnfør Das Lebenslicht af W. Wackernagel i Haupt Zeitschr. f. deutsches Alterthum, VI, 280—284.

for at han selv kunde tage Vare derpaa, hvorefter han altid førte det med sig. Paa sine sidste Dage kom han, efter at have levet meget længe og derunder at have færdes vidt omkring i Verden, til Olaf Tryggvason, fortalte ham sit Livs Skjæbne og Hændelser og lod sig paa hans Opfordring døbe. En Tid derefter traf det sig saa en Dag, at Kongen spurgte ham, hvor længe han endnu ønskede at leve. Hertil svarede han da: kun kort Tid herefter, om saa er Guds Vilje, hvorpaa han efter Kongens Opfordring tog sit Lys frem og tændte det. Det varede saa ikke længe, inden det var nedbrændt, og da var Gest død, efter, som han selv sagde, at have levet i 300 Aar [1].

Med denne Fortælling om Nornagest har det en paafaldende Lighed, hvad Apollodor efter Euripides fortæller om Meleager. Da denne var 7 Aar gammel, kom nemlig Moirerne til hans Moder Althaia og sagde til hende: da vil dit Barn dø, naar denne paa Arnen brændende Vedskide er fortæret af Ilden. Da Moderen hørte dette, tog hun Vedskiden af Ilden, slukte den og lagde den i en Kiste. Herfra tog hun den senere frem i sin første heftige Harme over, at Meleager havde voldet hendes Broders Død, og stak den i Ilden; hvorefter Meleager snart bortrykkedes ved en pludselig Død [2].

Den samme Forestilling ligger utvivlsomt ogsaa til Grund for, hvad der i Gisla Surssons Saga [3] fortælles om en Drøm, som han havde kort før sin Død. I denne Drøm forekom det ham nemlig, som om han gik ind i et Hus, hvor han saa mange af

[1] Söguþattr af Nornagesti S. 77 fg., Flateyjarbók I. 358 fg., Fornaldar sögur I, 341 fg. — Med Fortællingen om Nornagests Død kan jævnføres følgende af Schwarzwalder Dorfgeschichten von Berthold Auerbach, neue Folge (2te Auflage, Mannheim 1849) S. 382: „er sah dem Absterben des Lichtes zu, obgleich das für todesgefährlich gilt;“ ligesom hvad Prof. J. A. Friis (En Sommer i Finmarken, Russisk Lapland og Nordkarelen. Kristiania 1871. S 367) meddeler om Karelernes Bryllupsskikke, at „efter Vielsen sammenligner man Brudgommens og Brudens Lys, som have været tændte foran Helgenbilledet, og den, hvis Lys er kortest, skal dø først.

[2] Preller griech. Mythologie (2den Udg.) II, 307, jvf. 305, især Anm. 2.

[3] Tvær sögur af Gisla Súrssyni (Kbhvn. 1849), Side 41 fg.

sine Venner og Frænder sidde ved 7 Ilde, hvoraf nogle vare temmelig nedbrændte, men andre endnu brændte med en stor og stærk Lue, og at hans gode draumkona da kom og sagde ham, at dette betegnede hans Alder eller Levetid, hvormeget han deraf endnu havde tilbage.

Naar Rognvald Jarl, som Orkneyinga saga[1] fortæller os, var gjort opmærksom paa, at man kun havde lidet Brænde tilbage for dermed at vedligeholde de Ilde, ved hvilke han havde sat sig med sine Folk, og Jarlen i den Anledning sagde disse Ord: þá eru vér ok fullgamlir er þessir eldar eru brunnir, da var vistnok dette, som han ogsaa selv bemærkede, et mismæli, idet han nemlig vilde have sagt fullbakaðir og ikke fullgamlir; men det kan dog neppe være tvivlsomt, at dette mismæli, hvis Fortællingen herom indeholder historisk Sandhed, netop er foranlediget derved, at man plejede lade falde de samme eller lignende Ord, som de han sagde uden at ville det, fordi man i Ildens Udbrænden saa et Billede paa og et Varsel om Livets Udsluknen. Er dette derimod kun et Træk, hvormed Sagnet har udsmykket Fortællingen om Jarlens strax efter paafølgende Drab, da kan man deri neppe miskjende Frugten af en Tilbøjelighed til at give den et mytisk Præg ved at lægge ham i Munden et mismæli, hvis Indhold grundede sig paa den her omhandlede Forestilling.

Med denne samme Forestilling hænger det vel ogsaa sammen, at Fødselshjælpens Gudinde hos Grækerne fremstilledes med den ene Haand udstrakt til Hjælp, men med en Fakkel i den anden Haand, da nemlig Fakkelen afgav et Billede paa Menneskets Fødsel til denne Verdens Lys[2].

I et Æventyr fra Venetien, meddelt i Jahrbuch für romanische und englische Literatur VII, 16 fgg., fortælles, at en gammel nygift Mand, der havde haft Døden til sin Søns Fadder, fordi han hos den ikke fandt nogen Personsanseelse, senere som Gjæst hos Døden i et af dennes Værelser fik se mange Lamper, dels

[1] Orkneyinga saga (Hafniæ 1780) S. 74; Flateyjarbók II. 417.
[2] Prellers griechische Mythologie (2den Udg.) II. 402.

brænde, dels slukne, dels tændes, hvilket Døden paa Mandens Forespørgsel forklarede ham saaledes: de Lys, som slukne, ere de Menneskers Livsluer, der i samme Stund dø, de, som tændes, ere de Børns, som fødes, men de, der brænde med en frisk Lue, ere de levende. Manden bad da om at faa se sin egen Lampe, men da han fik se den, var den næsten uden Olje med nedbrændt Væge og nær ved at slukne. Den gamle bad nu for sig, at Døden vilde gyde mere Olje i Lampen, for at han endnu en Tid kunde nyde Livets Lykke; men dertil var Døden, som den svarede ham, for upartisk.

I det her anførte Æventyr er nu Forestillingen om Livet som en brændende Lue stærkest og tydeligst udpræget, forsaavidt nemlig, som der her er Tale baade om, hvorledes Livsgnisten tændes, hvorledes Livsluen brænder, og hvorledes Livet eller dets Lue udslukkes. Men i alt, hvad jeg har anført til Belysning deraf, fremtræder det dog mere eller mindre tydeligt, hvor almindelig den nævnte Forestilling har været, hvor ofte og stærkt den har gjort sig gjældende. At den saa tillige har givet Anledning til, at Ordet aldrnari er anvendt som en poetisk eller omskrivende Betegnelse af Luen, kan da heller ikke andet end forekomme mig saa sandsynligt, at man har god Grund til deraf at forklare sig dette Udtryks Oprindelse.

3. Hégeitill

er et Ord, med hvis Betydning jeg ikke kunde komme paa det rene, da jeg skulde optage og forklare det i min Ordbog. At det, som man har antaget, skulde betyde Flintesten, maatte nemlig forekomme mig lidet sandsynligt, dels fordi Flinten i vort gamle Sprog betegnedes ved et andet derfra aldeles forskjelligt Ord, nemlig tinna, hvoraf lapp. didno, jvf. eldtinna, hrafntinna; dels fordi det, naar hégeitill forekommer som Navn paa Steder, som nødvendigvis maa have faaet saadant Navn af, at den ved hégeitill betegnede Stenart paa disse Steder fremtræder i større Masse og paa en iøjnefaldende Maade[1], ikke vel dermed lader

[1] I Munkalifs Brevbog (udg. af P. A. Munch, Kristiania 1845) Side 86 forekommer det som Navn paa en af de til Hvitingsøerne hørende Holmer. I et Marke-

sig forene, at derved skulde forstaaes Flint, der jo aldrig forekommer saaledes i Norge. Da jeg alligevel ikke vidste at sætte nogen bedre Forklaring i Stedet for den, som jeg havde forefundet hos andre, kunde jeg ikke andet end optage denne, hvor liden Tilbøjelighed jeg end havde dertil.

Vistnok havde det ikke undgaaet min Opmærksomhed, at Ordet endnu bruges i det norske Folkesprog, eftersom Ivar Aasen i sin Ordbog (1ste Udgave) har baade „Heggjeitel“ og „Heggjeitelstein“, men den Forklaring, han giver derover, kunde lidet hjælpe mig. Ti det var dog aabenbart, at der ved hégeitill betegnedes Sten af et vist bestemt Slags og af et iøjnefaldende Udseende, der gjorde den let kjendelig, og hvorved den tydelig udskilte sig fra andre Stenarter. Som Navn paa en saadan Stenárt forekommer ogsaa „hegelsten“ i B. C. de Fines Beskrivelse over Stavangers Amt fra 1745, trykt i N. Nicolaysens norske Magasin, 3dje Bind, Side 123. For om muligt saaledes at faa Rede paa, hvad der skal forstaaes ved hégeitill, der tydelig nok er at gjenkjende i „hegelsten“, har jeg i Anledning deraf forespurgt mig hos Folk fra de Egne, hvor „hegelsten“ efter de Fines Angivelse skal have været i Brug som Navn paa en vis Stenart; men saavidt jeg kunde erfare, maa det nu der være gaaet af Brug. Derimod skal der i hine Egne under Navnet „kattesten“ forekomme „en klar hvid og haard Sten, der giver en stærk Ild fra sig“. Navnet „kattesten“ er ogsaa andensteds, og det ikke allene i Norge, men ogsaa i Sverige [1], kjendt og i Brug som Navn paa

gangsbrev om Grænserne mellem Gaardene Halleland og Sotteland i Holme Prestegjeld af 25de Marts 1536 (Dipl. Norveg. VI, 729) nævnes „Hegiddelen“, som ligger i „Hegiddils myör“; og naar der i Klüwers norske Mindesmærker S. 103 nævnes Fjeldet „Högkjetteln“ (jvf. den norske Turistforenings Aarbog for 1869. S. 113[3]), da kan der vel neppe være nogen Tvivl om, at vi ogsaa deri have Ordet „hégeitill“, og at det ikke, som man fortæller, har faaet sit Navn af en Mand, der hed Ketil.

[1] Saaledes i Ydre Hered af Öster-Götland ifølge Rääfs Beskrivelse over samme i Fortegnelsen over de for Egnens Folkesprog ejendommelige Ord. I et Markegangsbrev af 25de Oktober 1703 til Bestemmelsen af Grænserne for Gaarden Østby i Tjødling Sogn og mellem de til hver af dens Hoveddele hørende Skov-

en Stenart af saadan Beskaffenhed. Den Formodning ligger da nær, at Navnet „hegelsten“, hvor det nu ikke længere er i Brug, er fortrængt af et andet Navn: „kattesten“, saa at begge ere Benævnelser paa en og samme Stenart, men den sidste sandsynligvis af udenlandsk Oprindelse.

I den første Del af Ordet „kattesten“, hvorved, som ogsaa kan sees af dens endnu paaviselige Forekomst i den ved Gaarden Østbys Grænse liggende „Rijfnasten“, maa forstaaes en graahvid Kvarts, der paa mange Steder i Norge findes dels i store Masser, dels indsprængt i Klippestykker eller Fjeldmasser, hvis øvrige Del udgjøres af andre Bestanddele, ser jeg nemlig det latinske (eller græske) gagates (= Agat). Ved Bortkastelse af Bøjningsendelsen og ved den af de to første Stavelsers ensartede Beskaffenhed foranledigede Elisjon (Dissimilation, jvf. kong af konung, peng af pening o. desl.) blev der nemlig af gagates ganske naturligen gat, og at dette i Sammensætning med stein eller sten bliver til kat, derover kan man saa meget mindre forundre sig, som den almindelige Tilbøjelighed til ved fremmede Ords Optagelse eller Anvendelse i vort Sprog at underkaste dem en saadan Forandring eller give dem en saadan Form, at Folkets Etymologiseren ikke skal finde sig i Forlegenhed ved at forklare sig dem som dannede af vort eget Ordforraad, jo er bekjendt nok.

Men hvorledes er da Ordet hégeitill at forklare? At Ordet er sammensat, falder strax i Øjnene. Som saadant er det ogsaa opfattet af Erik Jensson i hans Ordbog; men naar han der søger at forklare Ordets oprindelige Betydning saaledes, som om det var sammensat af hegg og eitill, da synes det, som man derimod kan gjøre grundede Indvendinger, ikke saa meget fordi Forekomsten af et Ord eitill neppe kan paavises i de gamle Skrifter, da det vel desuagtet har tilhørt det gamle Sprogs Ordforraad, ligesom det endnu forekommer i det norske Folkesprog, som meget mere fordi det ikke er let at forstaa, hvorledes den

strækninger nævnes ogsaa en stor Sten „isprængt med noget hvit, som kaldes Kattesten“, hvilken Sten antoges for at være den samme, som i et ældre Brev fra Aaret 1439 kaldes „Rijfnasteinen“.

omhandlede Stenart passende skulde kunne faa en Benævnelse, der egentligen betegnede den haarde Knude, ikke af et Træ i Almindelighed, men af Heggen i Særdeleshed, som dog ikke udmærker sig ved saadanne Knuder fremfor andre Træer. Tilbojeligere skulde jeg være til at dele hé-geitill. Vistnok har jeg ikke nogensteds stødt paa et Ord geitill, men derimod bruges Ordet geit eller geite i Folkesproget, idetmindste paa Lister, om de haarde Korn af en haardere Stenart, der findes indsprængte i en Masse af mindre haard Beskaffenhed, og i Besynderlighed om de indsprængte Korn, der ved deres Haardhed volde Ulejlighed, naar de ved Brugen slidte Kvernestene skulle ophugges af Mølleren; og af geit eller geiti kunde da geitill være dannet ved en almindelig Afledsendelse. Ja dette geitill forekommer jo endogsaa virkelig i Folkesprogets hardgeitill, der efter Ivar Aasens Angivelse i hans norske Ordbog (2den Udgave af hans Ordbog over det norske Folkesprog) Side 266 betyder en haardfør Karl, men hvis oprindelige Betydning vistnok har faldet sammen med harðgeite, der bruges ved Siden af det ovennævnte geite i forstærket Betydning. Hvad den første Del af Ordet hégeitill angaar, da er det derimod vanskeligere at angive dens Betydning, da et eget Ord hé neppe kan paavises og vel heller ikke er forekommet, og det, skjønt Vokalens Længde tyder hen paa, at her er foregaaet en Kontraction eller Elisjon, dog ikke er let med nogenlunde Sikkerhed at kunne sige, hvorledes Ordet i saa Tilfælde oprindelig har lydt. Det samme hé forekommer dog ogsaa i hégomi.

Endelig skal jeg med Hensyn dertil, at man muligen kunde ville mene, at hégeitill ikke kan betyde den omhandlede Slags Kvarts, der er hvid, fordi det i Biskupa sögur II, 56[5] heder: kristallus var nú at sjá sem grár hégeitill, gjøre den Bemærkning, at hégeitill her kaldes grár i Modsætning til den hvidere gjennemsigtige Krystal, der, naar den tabte sin Gjennemsigtighed og blændende Hvidhed, netop derfor kunde siges at faa et Udseende af hegeitill, fordi disse i øvrigt lignede hinanden, uagtet sidstnævnte havde en mattere Farve.

4. Ulfaldi (Kamel) og beslægtede Dyrnavne.

I Selskabets Møde den 14de Oktober 1870 har Hr. Professor C. A. Holmboe ved at henlede Opmærksomheden paa, at Parabelen om Menneskets Letsindighed, der forekommer i Barlaams og Josafats Saga, maa være af østerlandsk Oprindelse, eftersom den ogsaa findes i den under Navn af Kalila og Dimna bekjendte arabiske Samling af Fortællinger, tillige fremhævet den mærkelige Afvigelse mellem begge disse Gjengivelser af samme, at medens det i Barlaams og Josafats Saga er en Enhjørning, der forfølger Manden, er det derimod i Kalila og Dimna en Elefant. Herved skal jeg tillade mig den Bemærkning, at medens Kalila og Dimna heri stemme overens med Fortællingen, saadan som den findes meddelt i Skrifter fra Indien [1], saa er det dog heller ikke allene i Barlaam og Josafats saga, at Dyret kaldes en Enhjørning. Det samme er nemlig ogsaa Tilfældet med denne Fortælling hos Odo de Ciringtonia [2] (fra Slutningen af det 12te Aarhundrede) i hans Narrationes, hvorfra den er meddelt af H. Oesterley i Jahrbuch für romanische und englische Literatur, IX, 134. Dette er nu saa meget mærkeligere, som begge nagtet denne Overensstemmelse neppe kunne have øst af samme Kilde, eftersom de i andre væsentlige Henseender afvige fra hinanden. En anden Afvigelse med Hensyn til Dyrets Navn findes derimod i Fr. Rückerts poetiske Bearbejdelse af denne Fortælling i hans Parabel: „Es ging ein Mann im Syrerland“ o. s. v., først udgiven i Frauentaschenbuch, Nürnberg 1823, hvoraf Oehlenschlägers „Manden i Brønden“ vel maa ansees for en Oversættelse. Her er det nemlig en

[1] Se Benfeys Pantschatantra I. 80—83. II. 528; Felix Liebrecht i Jahrbuch für romanische und englische Literatur, II, 126—129. 314—335, især 330 fg.

[2] Den lyder saaledes: De unicorni. Quidam unicornus secutus est unum hominem. Qui cum fugeret, invenit arborem, in qua erant poma pulcra. Subter vero erat fovea, serpentibus, Bufonibus, et reptilibus plena, hanc arborem rodebant duo vermes, unus albus et alius niger. homo ascendit arborem et pomis vescitur et frondibus delectatur, et non attendit quod duo vermes radices arboris rodebant. Que cecidet, et miser homo in puteum corruit. — Ogsaa i Gesta Romanorum, hvor Parabelen er optagen, kaldes Dyret en Enhjörning.

Kamel, hvis Forfølgelse Manden søger at undfly, og saa har det vistnok ogsaa været i Rückerts sandsynligvis arabiske Kilde, som er mig ubekjendt[1]. Dette er da heller ikke det eneste Tilfælde, hvor man i de forskjellige Gjengivelser af Fabler eller Parabler sætter et Dyr eller lignende Væsen i Stedet for et andet, naar man med Hensyn til deres Navne eller Egenskaber mellem dem har fundet en nærmere eller fjernere Lighed. Det er ogsaa umiskjendeligt, at netop de her nævnte tre Dyr jevnligen ere faldne sammen i Fortidens Forestillinger og Betegnelsesmaade. Ti naar Kamelen i det gotiske kaldes ulbandus og i vort gamle Sprog ulfaldi jvf. ght. olpenta, ags. olfend, da er jo dette i Grunden intet andet, end det tillempede eller forvanskede græske ἐλέφας, jvf. J. Grimm Gesch. der deutschen Sprache, S. 42 Anm. 408. Men af det samme græske Ord er ogsaa tydeligt nok udsprunget Ordet olifant, der af Karlamagnus saga S. 386 jvf. 369[15] sees at have betegnet Enhjørningen; ligesom dette Ord ikke allene Karlamagnus s. S. 387[3], men ogsaa i Middelalderens franske og tydske Digte om Roland er Navnet paa hans bekjendte Horn eller Basun, der efter Karlamagnus s. S. 386 var gjort af Enhjørningens Horn. men ikke desto mindre hos Turpin c. 23 fg. kaldes tuba eburnea[2]. Naar det i Ziemanns mittelhochdeutsches Wörterbuch under olbende heder, at „vom kamel und elephanten wird olbentin unterschieden, Eccard scr. med. ævi II, 1505“, og der i Müller & Zarnckes Mittelhochdeutsches Wörterbuch under olbente omtales, at der gives Steder, hvor olbente nævnes ved Siden af Kamelen, da kan man maaske forklare sig dette deraf, at ved olbente, der jo, hvad Ordets Oprindelse angaar, i Grunden er det samme som olifant, skal her forstaaes Enhjørningen, eller. om man vil søge Grunden dertil i Forfatternes Uvidenhed, deri se netop den samme Uvidenhed, som har givet Anledning til, at

[1] At Rückert skulde have hentet sit Emne fra Kalila og Dimna. men selv sat Kamelen i Elefantens Sted. forekommer mig nemlig kun lidet sandsynligt.

[2] Se Dunlop Geschichte der Prosadichtung übersetzt vom F. Liebrecht S. 541 a; jvf. Diez etymologisches Wörterbuch der romanischen Sprachen (2te Ausg.) II. 376: W. Wackernagel i Pfeiffers Germania, IV. 141.

ulbandus, ἐλέφας og olifant er kommet til at betegne tre forskjellige Dyr, og at disse ere forvexlede med hinanden i de forskjellige Gjengivelser af den her omhandlede Parabel[1].

Da det staar i nogen Forbindelse med det her afhandlede Emne skal jeg benytte Anledningen til ogsaa at gjøre en Bemærkning med Hensyn til ullband, der forekommer som Tilnavn for en Sigurðr i den fabelagtige Göngu-Hrolfs saga (Fornaldar sögur Nordrlanda III, 240), og som Adjunkt K. Rygh i sit Skrift: Norske og Islandske Tilnavne fra Oldtiden og Middelalderen (Indbydelsesskrift ved Trondhjems Kathedralskole 1871) S. 70 b har opfattet, som om det var = ulfaldi, got. ulbandus. Denne Opfatning kan jeg nemlig ikke anse for rigtig, og det ikke allene eller især fordi der paa det nævnte Sted staar ullband og ikke ulband, men end mere fordi vort gamle Sprog kun synes at kjende Ordet eller Formen ulfaldi som Benævnelse paa Kamelen. Vistnok kunde man dog tænke sig, at Formen ulband var indkommen senere som overført fra mht. olbende, men i saa Fald vilde Ordet ikke i Nominativ lydt ulband, men ulbandi. Dette ullband er derfor visseligen ikke at forstaa eller forklare paa anden Maade, end Tilnavnet ullstrengr.

[1] At Johan af Capua har gjort Elefanten eller Enhjørningen til en Løve (se Benfeys Pantschatantra I, 80), har vel ingen anden Grund, end at Løven som et frygteligt Rovdyr i dette Tilfælde forekom ham mere passende.

Om Dødeligheden i det første Leveaar.

Af A. N. Kiær.

Det tør være almindelig bekjendt, at Norge udmærker sig ved en usædvanlig liden Dødelighed, og at der i saa Henseende ikke er noget Land, der kan opvise et saa gunstigt Resultat som vort. Dette heldige Forhold viser sig især ved det første Leveaar, idet der for de øvrige Aldersklasser ikke er nogen stærkt udpræget Forskjel mellem Norge og andre Lande, skjønt Forholdet ved alle Alderstrin stiller sig noget gunstigere for Norge. For det første Levnetsaar er Forskjellen saa stor, at Dødeligheden hos os kun er omtrent halvt saa stor som i Europa overhovedet, idet nemlig det aarlige Antal Dødsfald af Børn i Alderen 0—1 Aar i Norge udgjør omtrent $^1/_{10}$, i Europa overhovedet $^1/_5$ og i Bayern og Würtemberg endog omtrent $^1/_3$ af de Levendefødte; i et af de würtembergske Distrikter, Oberamtet Ulm, stiger Dødeligheden i det første Leveaar endog til 51,5 pCt., det vil sige: af 100 levendefødte Børn er efter et Aars Forløb over Halvparten døde og kun 48 à 49 indtræde i det andet Aar.

Uagtet Forholdet altsaa stiller sig saa gunstigt for vort Land sammenlignet med andre Lande, saa bør det dog bemærkes, at selv hos os er Dødeligheden i Barnealderen meget stor, naar den sammenlignes med Dødeligheden i de øvrige Aldersklasser. Som Mortalitetstabellerne for 1856—65 nærmere vise, synker t. Ex. Dødelighedsprocenten for Mandkjøn fra 11,3 pCt. i det første Leveaar ligetil 3,8 pCt. i det andet, 2,5 pCt. i det 3die, 1,1 pCt. i det 5te og naar sit laveste Standpunkt 0,4 pCt. ved det 14de Aar, hvorefter den i Begyndelsen langsomt, men med stedse stigende Hurtighed voxer og naar 1 pCt. ved det 40de Aar, 2 pCt. ved det 58de Aar, 3 pCt. ved det 63de, 5 pCt. ved det 69de, 10 pCt.

ved det 78de, 20 pCt. ved det 87de Aar o. s. v., og for Kvindekjøn paa samme Maade, skjønt Dødeligheden her i det Hele er mindre. Dødeligheden blandt Børn i det første Leveaar er omtrent den samme som blandt Oldinge i Alderen 79—80 Aar.

Mellem de forskjellige Distrikter af Norge er der i heromhandlede Henseende temmelig stor Forskjel. Dødeligheden blandt Drengebørn var saaledes for hvert 100 levende fødte i Hamar Stift 8,9 pCt., i Tromsø Stift derimod 13,1 pCt. og i Bergens Stift 13,4 pCt.; i Byerne overhovedet 14,5, i Kristiania til 17,7 og i Bergen endog til 18.

Saavidt mig bekjendt, har Videnskaben endnu ikke seet sig istand til bestemt at paapege Aarsagerne til de paafaldende store Uligheder i heromhandlede Henseende; man antager vistnok i Almindelighed, at den i mange Lande brugelige kunstige Opammen i høi Grad bidrager til at forøge Dødeligheden blandt Smaabørn; men hvilke andre Aarsager der her ere medvirkende, samt i hvilket Forhold de forskjellige Aarsager staa til hverandre, det er endnu ikke tilstrækkeligt oplyst. Det vilde derfor være af megen Interesse, om der af de norske Læger blev anstillet specielle Undersøgelser angaaende dette Spørgsmaal, hvortil der er en saa meget større Opfordring, fordi vort Land er saa overmaade heldig situeret i heromhandlede Henseende, og fordi de store Uligheder mellem Norge og andre Lande samt mellem de forskjellige Distrikter i Norge synes i væsentlig Grad at maatte lette Undersøgelsen.[1]

Som et lidet Bidrag til Spørgsmaalets Belysning har jeg troet det nyttigt at meddele Resultaterne af endel Undersøgelser, jeg har anstillet angaaende Dødeligheden i de enkelte Dele af det første Leveaar.

Det Materiale, som jeg har havt til min Raadighed, omfatter et samlet Antal af 11,319 Dødsfald af Børn i Alderen 0—1 Aar; Antallet af levendefødte Børn var i det tilsvarende Tidsrum 101,119.

[1] Som et af de bedste Midler til at opnaa paalidelige Resultater i heromhandlede Henseende vil jeg tillade mig at nævne en Fuldstændiggjørelse af **Dødsaarsagsstatistiken.**

Dette Antal er vistnok ikke stort, men antages dog tilstrækkeligt til at udfinde de paa dette Feldt herskende Mortalitetslove i deres Hovedtræk, forudsat at Opgaverne have den tilstrækkelige Nøiagtighed. I saa Henseende lide imidlertid Opgaverne af den Mangel, at Alderen for et stort Antal Børns Vedkommende ikke har været angivet i Maaneder og Dage, men i runde Tal, f. Ex. $^1/_4$ Aar, $^1/_2$ Aar, $^3/_4$ Aar, 1 Aar, en. Omstændighed, der i høi Grad virker forstyrrende paa Beregningen. Da imidlertid de Ministerialbogsuddrag, der forefindes i det statistiske Kontor, for de Begravedes Vedkommende blandt andet indeholder Navn, Alder og Dødsdag, og for de Døbtes Vedkommende Navn og Fødselsdag, saa har man derigjennem et Middel til paa Dagen at faa Rede paa den virkelige Alder for alle dem, hvis Navn kan gjenfindes i Listen over de Døbte. Men det vil lettelig indsees, at en saadan Undersøgelse er et meget besværligt Arbeide, hvorfor man heller ikke endnu er kommen til ganske bestemte Resultater. Efter de forhaandenværende Oplysninger kan det dog antages, at af dem, hvis Alder er angivet paa den anførte omtrentlige Maade, er noget over Halvparten eller $^6/_{10}$ lidt over og Resten lidt under den angivne Alder; man kan saaledes regne, at af de 322 Drengebørn, der i 1868 ere opgivne som døde i en Alder af netop 1 Aar, har 129 været mellem 11 og 12 Maaneder og 193 noget over 1 Aar. o. s. v. Ved altsaa at henføre $^4/_{10}$ af vedkommende Tal til den nærmest forangaaende og $^6/_{10}$ til den nærmest efterfølgende Aldersklasse, fremkommer følgende Resultater for Aarene 1868 og 1869:

Alder ved Døden.	Mandkjøn. Riget.	Landet.	Byerne.	Kvindekjøn. Riget.	Landet.	Byerne.	Begge Kjøn. Riget.	Landet.	Byerne.
0—1 Maaned	2.338	1.939	399	1.774	1.452	322	4.112	3.391	721
1—2 —	648	494	154	526	428	98	1.174	922	252
2—3 —	467	342	125	421	315	106	888	657	231
3—4 —	416	305	111	359	261	98	775	566	209
4—5 —	306	218	88	269	190	79	575	408	167
5—6 —	366	264	102	317	229	88	683	493	190
6—9 —	855	604	251	730	494	236	1.585	1.098	487
9—12 —	791	546	245	736	500	236	1.527	1.046	481
ialt under 1 Aar	6.187	4.712	1.475	5.132	3.869	1.263	11.319	8.581	2.738
Antal af levendefødte	51.885	42.065	9.820	49.234	39.592	9.642	101.119	81.657	19.462

Betragter man ovenstaaende Talrækker, viser der sig i det

Hele taget en regelmæssig Udvikling med Undtagelse af Forholdet mellem Antallet af Dødsfald i den 5te og den 6te Levemaaned. Medens man jo skulde vente, at Dødeligheden i hin var større end i denne, finder man just det modsatte at være Tilfældet. Aarsagen hertil kan maaske søges i Aldersopgavens Unøiagtighed, idet man kan tænke sig, at endel af de mange, der ere opførte som netop $^1/_2$ Aar gamle, have været lidt under 5 Maaneder, medens de i ovenstaaende Tabel ere blevne regnede for de $^4/_{10}$ til Aldersklassen 5—6 Maaneder og for de øvrige $^6/_{10}$ til Aldersklassen 6—9 Maaneder. Eller ogsaa kunde det tænkes, at særegne, ugunstige Omstændigheder netop begyndte at gjøre sig gjældende fra den 6te Maaned af, men herimod tale i høi Grad Erfaringer fra andre Lande. I Betragtning af Faatalligheden af de for Norge indsamlede Opgaver er det imidlertid vistnok rettest at lade dette Spørgsmaal henstaa ubesvaret indtil videre og benytte Opgaverne, saaledes som de fremstille sig.

Forinden jeg nu gaar over til at sammenligne de for Norge fremkomne Resultater med de tilsvarende for andre Lande[1], skal jeg forudskikke den Bemærkning, at en lignende Unøiagtighed i Aldersopgaverne, som ovenfor er omtalt, sandsynligvis ogsaa gjør sig gjældende for andre Lande end Norge, dog med Undtagelse af Sverige og maaske Belgien og Holland; hvad Sverige angaar, da findes saagodtsom for hvert eneste Dødsfald, ikke alene af Børn, men selv af voxne Personer, Alderen udtrykt i Aar, Maaneder og Dage, og jeg anser det utvivlsomt, at dette Land i heromhandlede Henseende er i Besiddelse af de paalideligste Opgaver, som overhovedet existere. I de fleste Lande med Undtagelse af de skandinaviske er der et større eller mindre Antal levende fødte, men strax efter Fødselen døde Børn, der enten opføres blandt dødfødte eller slet ikke optegnes; at Resultatet af Beregningerne for disse Lande herved viser sig for gunstigt, er indlysende.

For hvert 10,000 levendefødte af begge Kjøn udgjorde Antallet af Børn døde i de enkelte Maaneder af 1ste Aldersaar:

[1] De herom i det følgende meddelte Opgaver ere hentede fra det Svenske statistiske Tidsskrifts 23de Hefte.

I. Antal døde.

Alder ved Døden	Norge.	Sverige.	Danmark.	England. Dr. Farrs life tables.	Belgien.	Holland.	Frankrige.	Italien.	Østerrige.	Baden.
a) maanedsvis.	1868-69	1860-66	1860-64		1851-60	1860-64	1858-60	1863,65,66	1860-65	1852-63
0—1 Maaned	407	470	516	465	536	491 ?	737	981	1.149	1.060
1—2 —	116	158	171	172	179	249	„	„	249	306
2—3 —	88	129	109	122	133	218	„	„	196	222
3—4 —	77	103	„	101	116	197	„	„	„	208
4—5 —	57	82	„	95	92	157	„	„	„	154
5—6 —	68	66	„	90	80	120	„	„	„	112
6—7 —	„	62	„	85	74	„	„	„	„	161?
7—8 —	„	55	„	81	68	„	„	„	„	82
8—9 —	„	55	„	77	67	„	„	„	„	69
9—10 —	„	51	„	73	64	„	„	„	„	132?
10—11 —	„	48	„	69	62	„	„	„	„	55
11—12 —	„	49	„	65	82?	„	„	„	„	52
b) kvartalsvis										
0—3 Maaned	611	757	796	759	848	958	1.087	1.327	1.594	1.588
3—6 —	202	251	242	286	288	474	296	292	360	474
6—9 —	157	172	169	243	209	268	„	302	271	312
9—12 —	151	148	139	207	208	209	„	302	293	239
c) halvaarsvis.										
0—6 Maaned	813	1.008	1.038	1.045	1.136	1.432	1.383	1.619	1.954	2.062
6—12 —	308	320	308	450	417	477	423	604	564	551
Ialt	1.121	1.328	1.346	1.495	1.553	1.909	1.806	2.223	2.518	2.613

II. Antal gjenlevende ved Alderen:										
0 Maaned	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000	10.000
1 —	9.593	9.530	9.484	9.535	9.509	9.464	9.263	9.019	8.851	8.940
2 —	9.477	9.372	9.313	9.363	9.260	9.285	„	„	8.602	8.634
3 —	9.389	9.243	9.204	9.241	9.042	9.152	8.913	8.673	8.406	8.412
4 —	9.312	9.140	„	9.140	8.845	9.036	„	„	„	8.204
5 —	9.255	9.058	„	9.045	8.688	8.944	„	„	„	8.050
6 —	9.187	8.992	8.962	8.955	8.568	8.864	8.617	8.381	8.046	7.938
7 —	„	8.930	„	8.870	„	8.790	„	„	„	7.777
8 —	„	8.875	„	8.789	8.378	8.722	„	„	„	7.695
9 —	9.030	8.820	8.793	8.712	8.300	8.655	„	8.079	7.775	7.626
10 —	„	8.769	„	8.639	8.228	8.591	„	„	„	7.494
11 —	„	8.721	„	8.570	„	8.529	„	„	„	7.439
12 —	8.879	8.672	8.654	8.505	8.091	8.447	8.294	7.777	7.482	7.387
III. Maanedligt Antal døde pr. 100 i [illegible] Aldersklasse levende.										
0—1 Maaned	4,15	4,91	5,30	4,76	5,04	5,51	7,65	10,33	12,18	11,19
1—2 —	1,22	1,67	1,82	1,82	2,66	1,91	(2,20)	2,20	2,85	3,48
2—3 —	0,93	1,39	1,18	1,31	2,38	1,44	(1,60)	1,60	2,31	2,61
3—6 —	0,72	0,92	0,89	1,05	1,80	1,07	1,13	1,14	1,46	1,93
6—9 —	0,57	0,64	0,63	0,92	1,06	0,80	(0,90)	1,22	1,14	1,34
9—12 —	0,56	0,56	0,53	0,80	0,85	0,81	(0,80)	1,27	1,28	1,06

IV. Forholdet mellem de forskjellige Dødelighedsprocenter.[1]	Norge.	Sverige.	Danmark.	England.	Holland.	Belgien.	Frankrige.	Italien.	Østerrige.	Baden.
$d^{0-1} : d^{1-2} = 100 :$	29	34	34	38	53	35	(29)	(21)	23	31
$d^{1-2} : d^{2-3} = 100 :$	76	84	65	72	89	75	(73)	(73)	81	75
$d^{2-3} : d^{3-6} = 100 :$	77	66	76	80	76	75	(70)	(71)	63	74
$d^{3-6} : d^{6-9} = 100 :$	79	70	71	88	59	75	(80)	107?	78	69
$d^{6-9} : d^{9-12} = 100 :$	98	88	84	87	80	102?	(88)	104?	112?	79

Det vil altsaa sees, at der hos os i den 1ste Maaned dør lidt over 4 pCt. af de levendefødte, i den anden og tredie Maaned omtrent 1 pCt. af de gjenlevende, i de følgende Maaneder stadigt mindre og mindre, saa at Dødeligheden i den 12te Maaned kun er lidt over $^1/_2$ pCt. I Baden, Italien og Østerrige derimod dør i den første Maaned omtrent 10 pCt. og i den 12te Maaned lidt over 1 pCt. De øvrige Lande gruppere sig mellem disse to Yderligheder. Fra den første til den anden Maaned synker Dødelighedsprocenten overmaade stærkt, nemlig gjennemsnitsvis i Forholdet 100 : 33,2 med andre Ord Dødeligheden er i den anden Maaned kun $^1/_3$ af Dødeligheden i den første. Dersom man imidlertid bortser fra det for Holland opgivne Tal, der fjerner sig fra de øvrige i den Grad, at dets Rigtighed ialfald indtil videre maa erklæres for tvivlsom, bliver Gjennemsnitsforholdet overhovedet 30,4 pCt., og særskilt for de Lande, der fremvise den stærkeste Dødelighed i Barnealderen (nemlig foruden Holland tillige Frankrige, Italien, Østerrige og Baden), 26 pCt., for de øvrige Lande derimod 34 pCt.; for Norges Vedkommende er Forholdet 29 pCt., men det maa her erindres, dels at Iagttagelserne alene omfatte Aarene 1868 og 1869, dels at den fornødne Skarphed i Aldersopgaverne savnes. De største Afvigelser vise sig iøvrigt for Italien paa den ene Side (21 pCt.) og England paa den anden Side (38 pCt.).

Fra den anden til den tredie Maaned aftager Dødeligheden overhovedet i Forholdet 100 : 76,3 eller, bortseet fra Holland, der

[1] Ved d^{0-1} er her betegnet Dødelighedsprocenten i den 1ste Levemaaned, ved d^{1-2} Dødelighedsprocenten i den 2den Levemaaned. o. s. v.

ogsaa her viser sig abnormalt, 74,9, og særskilt for hver af de to ovennævnte Grupper af Lande henholdsvis 75,5 og 74,4 pCt., varierende forøvrigt mellem 65 pCt. (Danmark) og 84 pCt. (Sverige). Fra den sidste Maaned af første Kvartal til Gjennemsnittet af andet Kvartal aftager Dødeligheden overhovedet i Forholdet 100 : 72,8 og for hver af de nævnte Grupper i Forholdet 70,8 pCt. og 74,8 pCt., varierende mellem 63 pCt. (Østerrige) og 80 pCt. (England).

Forholdet mellem Dødeligheden i andet og 3die Kvartal er i Gjennemsnit som 100 : 77,6, og for hver Gruppe af Lande 78,6 pCt. og 76,6 pCt. Naar undtages Holland (59 pCt.) og Italien (107 pCt.), der hver i sin Retning ere lige abnormale, er der forøvrigt størst Forskjel mellem Baden (69 pCt.) og England (88 pCt.); heller ikke disse Tal se meget rimelige ud.

Fra 3die til 4de Kvartal skulde Dødeligheden efter de foreliggende Opgaver synke i Forholdet 100 : 92,2, men dette Middeltal er fremkommet af Opgaver, af hvilke en stor Del se meget tvivlsomme ud, hvilket er Tilfældet med alle dem, der for 4de Kvartal udvise en større Dødelighed end for det 3die; dette Resultat er nemlig efter al Rimelighed fremkommet derved, at et stort Antal Børn ere blevne opførte som netop 1 Aar gamle, medens deres virkelige Alder har været dels over dels under dette Alderstrin, i hvilken Henseende jeg tillader mig at henvise til, hvad derom i det Foregaaende er ytret for Norges Vedkommende. Bortser man fra de Lande, for hvilke Forholdet viser sig at være over 100 pCt., faar man for de øvrige i Middeltal 86,3 pCt.

Hovedresultaterne af det ovenfor udviklede vil findes sammenstillet i følgende Tabel, der viser, hvormange Procent Dødeligheden aftager fra det ene af de opførte Alderstrin til det næste.

Antal Procent, hvormed Dødeligheden aftager.

a Alderstrin, for hvilke Dødeligheden er sammenlignet	b	Disses indbyrdes Afstand udtrykt i Maaneder	a) mellem de tilvenstre opførte Alderstrin: for samtlige ovenfor opførte Lande	for do. med Udeladelse af dem, for hvilke Opgaverne ere usikre	for Norge	b) do. beregnet for hver Maaned: for samtlige ovenfor opførte Lande	for do. med Udeladelse af dem, for hvilke Opgaverne ere usikre	for Norge
Maaned	Maaned		pCt.	pCt.	pCt.	pCt.	pCt.	pCt.
0—1	1—2	1	÷ 66.8	÷ 69.6	÷ 71.0	÷ 66.8	÷ 69.6	÷ 71.0
1—2	2—3	1	÷ 23.7	÷ 25.1	÷ 24.0	÷ 23.7	÷ 25.1	÷ 24.0
2—3	3—6	2	÷ 27.2	÷ 27.2	÷ 23.0	÷ 14.7	÷ 14.7	÷ 12.3
3—6	6—9	3	÷ 22.4	÷ 22.4	÷ 21.0	÷ 8.1	÷ 8.1	÷ 7.6
6—9	9—12	3	÷ 7.8	÷ 13.7	÷ 2.0	÷ 2.7	÷ 4.8	÷ 0.7

Beregningerne udvise altsaa, at den overordentlig store Dødelighed, der finder Sted i den første Aldersmaaned, aftager først meget stærkt i den anden Maaned, dernæst i en mindre Grad, men dog endnu betydeligt i den 3die Maaned og saa fremdeles i en stedse mindre Proportion, et Resultat, der maa erkjendes at være meget rimeligt. Fremdeles vil det sees, at de for Norges Vedkommende anstillede Beregninger i heromhandlede Henseende vise en stor Overensstemmelse med det for andre Lande fundne Gjennemsnitsforhold, naar man alene undtager Forholdet mellem Dødeligheden i 3die og 4de Kvartal. Man kan altsaa i det Hele taget betragte Resultaterne af de for Aarene 1868 og 1869 gjorte Iagttagelser, uagtet deres Faatallighed, som et temmelig korrekt Udtryk for de paa dette Feldt for vort Land herskende Love, saameget mere, som Dødeligheden blandt Børn i Alderen 0—1 Aar i 1868 og 1869 overhovedet nærmede sig meget den normale.[1]

[1] Den udgjorde nemlig som ovenfor anført 1.121 for hvert 10,000 levendefødte: for Tiaaret 1856–65 er den i vedkommende Befolkningsstatistik angivet til 1.124 for Mandkjøn og 955 for Kvindekjøn eller i Gjennemsnit 1.042, men udgjorde (efter Berigtigelse for endel Børn, der døde inden 24 Timer efter Fødselen, og som tidligere regnedes med blandt de dødfødte) — i Virkeligheden 1.161 for Mandkjøn og 989 for Kvindekjøn, og i Gjennemsnit for begge Kjøn 1.077 pr. 10.000 levendefødte. For Tidsrummet 1841—1865 bliver det tilsvarende Gjennemsnitstal 1,098.

Jeg gaar nu over til at undersøge Forholdet mellem Dødelighedsprocenterne i Norge og andre Lande særskilt for hvert af de Afsnit, i hvilket det første Levnetsaar er bleven inddelt, og hidsætter til Belysning heraf følgende Tabel, hvor Gjennemsnitsdødeligheden er bleven udtrykt med 100 og Dødeligheden i de forskjellige Lande i Procenter af hin.

For hvert 100 af den i Rubrik b angivne Dødelighed udgjorde Dødeligheden i nedenfor nævnte Lande:

Aldersafsnit.	Maanedlig Gjennemsnitsdødelighed.		Norge.	Sverige.	Danmark.	England.	Belgien.	Holland.	Frankrige.	Italien.	Østerrige.	Baden.
Maaned	a pCt.[1]	b pCt.[1]										
0—1	7.10	7.9	53	62	67	60	70	64?	97	131	154	142
1—2	2.18	2.4	51	70	76	76	80	111	92	92	119	145
2—3	1.66	1.8	52	77	66	73	80	132	89	89	128	145
3—6	1.21	1.3	55	71	68	81	82	138	87	88	112	148
6—9	0.92	1.0	57	64	63	92	80	106	90	122	114	134
9—12	0.85	0.9	62	62	59	89	90	94	89	141	142	118
0—12	1.49[1]	1.67	56	66	67	75	78	95	90	111	126	131

Det vil af denne Tabel sees, at Dødeligheden i Norge for samtlige Dele af det første Leveaar er noget over Halvdelen af Gjennemsnitsdødeligheden i ovennævnte Lande; der viser sig forholdsvis størst Forskjel for de tre første Maaneders Vedkommende, hvilken Forskjel gradvis synes at aftage, idet Dødeligheden i de Lande, hvor den i de første Maaneder hæver sig over Gjennemsnitsforholdet, synker noget hurtigere, end Tilfældet er for Norges Vedkommende. Dette Resultat stemmer meget vel med den Iagttagelse, at den store Ulighed, der finder Sted mellem de forskjellige Lande i Henseende til Dødeligheden i første Leveaar overhovedet, for de følgende Aar efterhaanden formindskes, saa at der allerede fra det femte Aar af er langt mere Lighed end Ulighed. Det fortjener ogsaa i denne Forbindelse at paapeges, at ovenstaaende Tabel overhovedet viser, at de i heromhandlede

[1] Denne er her beregnet efter det aritmetiske Middeltal af de for de forskjellige Lande beregnede Procenter; tages imidlertid Hensyn til disse Landes forskjellige Folkemængde, bliver Gjennemsnitsdødeligheden for hele det første Leveaar 1.67 pCt. om Maaneden eller 20 pCt. om Aaret, altsaa omtrent $^1/_9$ høiere end i Rubrik a opgivet: i Rubrik b er opført de efter dette Forhold berigtigede Procenter.

Henseende heldigt situerede Lande navnlig udvise et heldigt Resultat for den første Levemaaneds Vedkommende, i hvilken omvendt de uheldigt situerede Lande, alene med Undtagelse af Holland, hvorom se ovenfor, vise et mere end almindeligt uheldigt Resultat.

Den overordentlig store Dødelighed, som i alle Lande viser sig for den første Levemaaneds Vedkommende, indeholder en Opfordring til nærmere at undersøge, hvorledes Antallet af Døde er fordelt paa de enkelte Dele af samme. En saadan Undersøgelse er derfor bleven anstillet med Hensyn til de i 1869 og mere summarisk for de i 1868 stedfundne Dødsfald, med følgende Resultat:

Alder ved Døden.	Mandkjøn.	Kvindekjøn.	Tilsammen.	Alder ved Døden.	Mandkjøn.	Kvindekjøn.	Tilsammen.
a) 1869.							
½ Time	23	30	53	19 Timer	1	„	1
¾ —	2	5	7	20 —	„	„	„
1 —	17	24	41	21 —	1	„	1
1½ —	7	2	9	22 —	„	1	1
2 —	17	16	33	23 —	„	„	„
3 —	6	5	11	ialt ½-23 T.	129	128	257
3½ —	2	„	2	desuden under			
4 —	8	3	11	24 Tim.[1]	144	113	257
4½ —	1	„	1	1 Døgn	36	40	76
5 —	8	2	10	1½ —	24	18	42
5½ —	1	1	2	2 —	45	32	77
6 —	5	8	13	2½ —	1	1	2
7 —	3	„	3	3 —	54	22	76
8 —	1	5	6	4 —	42	25	67
9 —	6	2	8	5 —	41	32	73
10 —	5	3	8	6 —	40	35	75
11 —	4	2	6	7 —	52	31	83
12 —	4	8	12	8 —	70	49	119
13 —	2	1	3	9 —	32	18	50
14 —	1	3	4	10 —	38	20	58
15 —	„	3	3	11 —	30	23	53
16 —	1	2	3	12 —	33	23	56
17 —	1	„	1	13 —	20	10	30
18 —	2	2	4	14 —	65	50	115

[1] ɔ: de blandt de Dødfødte opførte, for hvilke det er oplyst, at de have været fødte med Liv, men døde inden 24 Timer.

Alder ved Døden.	Mandkjøn.	Kvindkjøn.	Tilsammen.	Alder ved Døden.	Mandkjøn.	Kvindkjøn.	Tilsammen.
15 Døgn	22	31	53	30 Døgn	„	2	2
16 —	22	5	27	31 —	„	„	„
17 —	10	12	22	forøvrigt under			
18 —	10	13	23	1 Maaned	9	13	22
19 —	8	6	14	Sammen-			
20 —	4	5	9	drag:			
21 —	72	66	138	0-1 Døgn	309	281	590
22 —	6	3	9	1-7 —	299	196	495
23 —	2	„	2	7-15 —	310	224	534
24 —	7	„	7	15-30 —	155	141	296
25 —	3	3	6	1868.			
26 —	1	3	4	0-1 —	339	218	557
27 —	„	4	4	1-7 —	264	176	440
28 —	1	5	6	7-15 —	348	267	615
29 —	„	1	1	15-30 —	188	169	357

Naar man overskuer ovenstaaende Talrækker, vil man strax finde, at de runde Aldersbetegnelser (1 Døgn, 1 Uge, 8 Dage, 2 Uger, 3 Uger) indtage en fremtrædende Plads ved det store Antal Dødsfald, der ere blevne anførte paa denne Maade. Dersom man, efter samme Regel, som tidligere er bleven anvendt, henfører $^4/_{10}$ af Antallet til den nærmest foregaaende og $^6/_{10}$ til den nærmest efterfølgende Klasse[1] og ligeledes til Aldersklassen 14—30 Dage lægger $^4/_{10}$ af de som netop 1 Maaned gamle opførte, kommer man til følgende Resultater:

Alder ved Døden.	1869.	1868 efter de for 1869 fundne Forhold.	Sum af 1868 og 1869.
0—1 Døgn.	544	514	1,058
1—7 —	513	456	969
7—14 —	440	505	945
14—30 —	535	605	1,140
Ialt	2,032	2,080	4,112

[1] Da det er meget almindeligt at udtrykke 1 Uge ved 8 Dage istedetfor 7 Dage, opstaar der her en særegen Vanskelighed ved den omhandlede Beregning: denne Vanskelighed er løst paa den Maade, at man har ansat Antallet af de i en Alder af 8 Dage døde = Middeltallet af de paa den 4. 5. 6. 10. 11 og 12 Dag faldende Døde = 64 og lagt Forskjellen mellem dette og det opgivne Tal (119—64) til Antallet af de i Alderen 7 Dage døde Børn og dernæst delt det derved fremkomne Tal (138) i de sædvanlige 4 og 6 Tiendedele. Man kan ind-

For hvert 10,000 levendefødte udgjorde Antal af Døde i Norge, Sverige, Danmark og Frankrige:

Alder ved Døden.	Norge 1868—69.	Sverige 1860—66.	Danmark 1860—64.	Frankrige 1858—60.
0-1 Døgn	105	99	99	279
1-7 —	96	112	417	
7-14 —	93	112		223
14-30 —	113	147		235
Ialt	407	470	516	737

Sammenligner man de norske Opgaver med de svenske, vil det sees, at Dødeligheden i det første Døgn skulde være noget større i Norge end i Sverige, medens det omvendte Forhold finder Sted for de følgende Alderstrin. Ganske mærkeligt er det, at ogsaa Antallet af Dødfødte er forholdsvis noget større i Norge end i Sverige, idet dette i Forhold til samtlige Fødsler i 1866—68 udgjorde 3.3 pCt. i Sverige og 3,6 pCt. hos os. Hvorvidt man af disse to Omstændigheder tør slutte, at det gunstigere Dødeligheds-forhold, som viser sig for Norges Vedkommende, ikke saameget hidrører fra en større Levedygtighed fra Fødselen af som fra de efter Fødselen stedfindende for Livet gunstigere Vilkaar, det er et Spørgsmaal, som paa Undersøgelsernes nærværende Trin ikke med Bestemthed kan afgjøres.

Med Hensyn til de paa hver af de første 14 Levedage faldende Antal Dødsfald, da er Resultatet af Beregningerne fremstillet i nedenstaaende Tabel, ved hvilken det iøvrigt bemærkes, at Tallene for Norges Vedkommende fra den 3die Levedag af ere afrundede for at fremstille den sandsynligvis rigtigere jævne Rækkefølge, medens de svenske Opgaver have det Fortrin, at de ere byggede paa ligefrem Beregning af de foreliggende Opgaver, en Fremgangsmaade, der paa Grund af Aldersopgavernes delvise Unøiagtighed ikke har kunnet anvendes ved de norske.

vende, at denne Beregningsmaade er vilkaarlig, men i ethvert Fald nærmer den sig mere til det virkelige Forhold, end den ligefremme Beregningsmaade vilde gjøre.

For hvert 10,000 levendefødte Børn døde der i nedenfor nævnte Alder:

	Norge.	Sverige.		Norge.	Sverige.
i 1ste Døgn	105	99	i 8de Døgn	14	18
i 2det —	22	24	i 9de —	14	14
i 3die —	16	16	i 10de —	13	16
i 4de —	15	14	i 11te —	13	15
i 5te —	15	17	i 12te —	13	15
i 6te —	14	22	i 13de —	13	15
i 7de —	14	19	i 14de —	13	19

Dødeligheden skulde altsaa allerede i det andet Døgn af Livet være sunket til mellem $\frac{1}{4}$ og $\frac{1}{5}$ af, hvad den udgjør i det første Døgn. Dersom den samme Dødelighed, som finder Sted i det første Døgn, skulde vedblive i de følgende, vilde et Kuld af 10,000 levendefødte Børn allerede efter 2 Maaneders Forløb være svundet ind til under 5,400.

Som det vil sees, har man ogsaa meddelt Opgaver over Dødeligheden i de enkelte Timer af det første Døgn. I Sammendrag vise disse Opgaver, at der af de Børn, hvis Alder har været saa nøiagtigt opgivet, falder paa de første 3 Timer: 147 og paa de efterfølgende henholdsvis: 38, 20, 24, 15, 8, 3 og 2; blandt de 147, der døde i de første 3 Timer, falder paa den første Time: 76, paa den anden: 47 og paa den tredie: 24. Uagtet det nu er sandsynligt, at der blandt de 257, der ere opgivne som „døde inden 24 Timer", og de 76, hvis Alder er bleven betegnet ved „1 Dag", falder forholdsvis flere paa de sidste Timer af Døgnet, end Tilfældet har været for dem, hvis Alder er opgivet i timevis, saa er det dog umiskjendeligt, at de foreliggende Opgaver henpege paa, at Dødeligheden er overmaade stor i den første Time efter Fødselen og derpaa meget hurtigt aftager i de følgende Timer.

Vi gjenfinde altsaa overalt den samme Grundregel: overmaade stærk Dødelighed paa det første Alderstrin, dernæst stærkt aftagende i det næste og mindre og mindre aftagende i de derpaa følgende. Vi have paavist, at denne

Regel gjør sig gjældende ikke alene i Forholdet mellem det første og det andet Leveaar, men ogsaa indenfor de enkelte Maaneder af det første Leveaar, indenfor de enkelte Uger af den første Maaned, indenfor de enkelte Dage af den første Uge, ja ligetil de enkelte Timer af det første Døgn. Det vil heraf sees, af hvilken overordentlig stor Betydning en omhyggelig og kyndig Pleie af Børnene under og umiddelbart efter Fødselen er ikke alene for den enkelte Familie, men ogsaa for Samfundet i dets Helhed.

Idet jeg slutter disse Meddelelser, skal jeg alene gjøre opmærksom paa, at jeg for at undgaa Vidtløftighed ikke har undersøgt Forholdet mellem Dødeligheden for de forskjellige Kjøn; den stærkere Dødelighed, som næsten paa ethvert Alderstrin viser sig for Mandkjønnets Vedkommende, fremtræder stærkest i det første Leveaar og i de første Dele af samme. Om dette Punkt saavelsom om flere andre Detailoplysninger nærværende Sag betræffende tillader jeg mig at henvise til den ovenfor citerede Afhandling af Chefen for det statistiske Centralbureau i Stockholm, aftrykt i Bureauets Tidsskrift 23de Hefte.

Om Vægten af nogle Smykker fra Oldtiden af ædelt Metal, samt om de paa saadanne anbragte Betegnelser af Vægten.

Af C. A. Holmboe.

(Foredraget i Mødet den 15de Septbr. 1871).

Ved Grøftegravning paa Fölhagen i Björke Sogn paa Øen Gotland fandt i Sommeren 1866 en Arbeider en Kobberæske, hvori laa en Mængde Mynter og nogle Smykker af Sølv samt en liden Guldplade. De fleste Mynter (855 Stykker) vare kufiske fra Aarene 280 til 360 (= 893—971 eft. Chr.), og blandt disse vare igjen over tre Fjerdeparter fra Samaniderne i Buchariet. De øvrige (omtrent 400) vare europæiske, især tydske, hvilke samtlige var ældre end Aar 1002. Skatten maa derfor antages at være nedlagt omtrent Aar 1000 eft. Chr.[1]

Fundet blev indkjøbt for Statens historiske Museum i Stockholm og fik i Inventariet No. 3547.

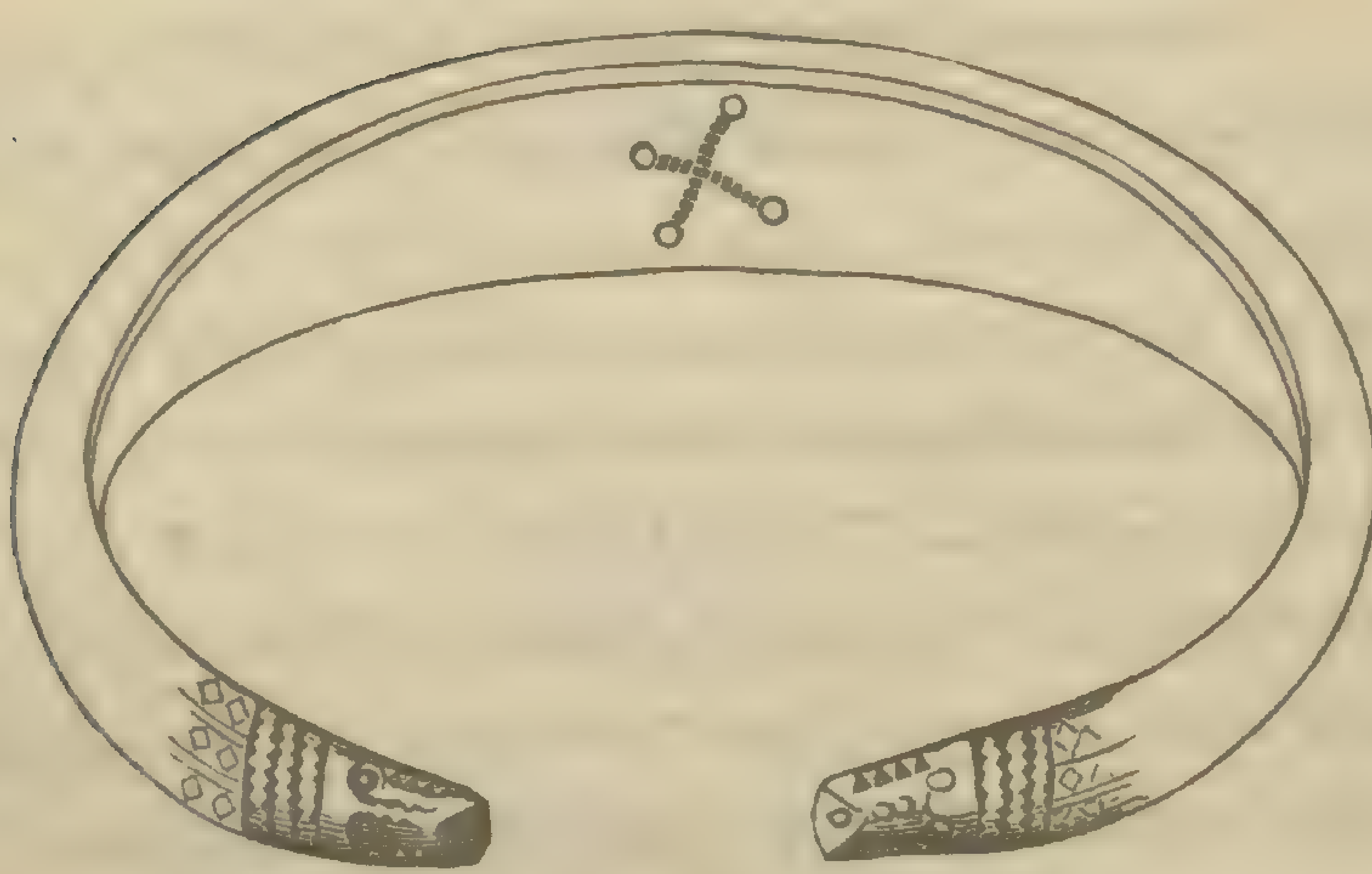
Blandt Smykkerne er der syv Armbøiler, af hvilke de tre ere mærkelige derved, at de paa Undersiden ere mærkede med et Kors[2], dannet af fire smaa Ringe, der ere forbundne ved puncterede Linier. Følgende Træsnit viser deres Form i fuld Størrelse.

[1] En Beskrivelse over dette Fund er under Titel „Fölhagenfyndet" trykt i *Antiqvarisk Tidskrift för Sverige, 3die Deel*, hvor de kufiske Mynter ere beskrevne af Prof. Tornberg i Lund, og de europæiske samt Smykkerne af Mag. H. Hildebrand i Stockholm.

[2] Saafremt Korset kunde opfattes som et romersk Tital, vilde Vægten af den tungeste Bøile, 85,01 Gr., svare til ti Ørtuger skandinavisk Vægt. Men Brugen af Romertal kan ikke antages at have naaet Norden før Christendommens Indførelse.

Oversiden.

Undersiden.



De ere dannede af sexkantede Tener, nemlig en trefacetteret Overside, to Sidefacetter og en flad Underside.[1]

Hr. Hildebrand bemærker medrette, at de smaae Ringe have Hensyn til Vægten (hvilka tydligen hafva afseende på vigten) og betegne fire Eenheder.[2] „Men, føier han til, hvad var det för et vigtsystem, som dervid användes?“

[1] I *H. Weiss's Kostümkunde des Mittelalters* (*Stuttgart 1864*) *S. 350* er, som Fig. 163 a efter Bähr's Gräber der Liven T. XIII, 2, en Armbøile afbildet, som meget ligner den her beskrevne, kun synes Oversiden at have været halvrund, ikke facetteret.

[2] Det hører til Sjeldenheder at støde paa Gjenstande af Guld eller Sølv fra Middelalderen, paa hvilke deres Vægt er betegnet. I vort Universitets Museum haves to Spiralringe af Guld, paa hvilke i den ene Ende ere indtrykte tre Perlekrandse for at betegne, at Ringen veier tre Ører. Se *Rygh, Om et norsk Fund af Guld-*

Vægten af dem er respective 85,01 franske Grammer, 83,32 og 78,46 Gr. Den sidstnævnte er meget slidt og maa antages at have mistet adskilligt af sin oprindelige Vægt. Allerede forhen var Museet i Stockholm i Besiddelse af fire andre mærkede Armbøiler, hvis Vægt, divideret med fire, beløber sig respective til 21,52 — 21,44 — 21,13 — og 21,01 fr. Gr. Lægges disse sammen med Fjerdeparten af de to ovennævntes Vægt, 21,25 og 20,83, bliver Middelvægten 21,18 Gr., den Vægteenhed, som synes at ligge til Grund for Anbringelsen af de fire smaae Ringe. Men, da alle Armbøilerne maa antages ved Brug at have mistet noget af sin Tyngde, er det sandsynligt, at selv den tungeste er noget lettere end den Vægteenhed, hvorefter de ere regulerede.

Da en saadan Vægteenhed ikke passer ind i det i Skandinavien i Middelalderen gjældende Vægtsystem, maa Bøilerne, som Hr. H. bemærker, skrive sig fra Udlandet, og det fra en Egn, hvor en Vægteenhed af Tyngde mellem 21 og 22 fr. Grammer var i Brug. Men en saadan Eenhed hører ikke hjemme i noget bekjendt System. Den Eenhed, hvortil den mest nærmer sig, er Unzen, men denne gaar ikke nogensteds stort lavere end til 26 fr. Grammers Vægt, hvilken fjerner sig alt for meget fra den her omtalte, til at den kan have været tilsigtet ved Angivelsen af Bøilernes Vægt.

Seer man sig om efter et Vægtsystem, hvori en Tyngde af 21 à 22 Gr. udgjør en Eenhed, da finder man et saadant i Babylon, Persien og Forasien allerede i 4de Aarh. før Chr. F. og tildeels endnu tidligere. I Babylon var den laveste Vægteenhed, af Grækerne kaldet Talent = 65 400 fr. Kilogrammer, den deltes i 60 Miner, og Minen deeltes igjen i 50 Dele (Statere) hver = 21,80 Gr.[1] Denne Vægteenhed sees ogsaa at have været gjæl-

smykker fra hedensk Tid, i Vid.-Selsk. Forhandl. 1864. I Stockholms Museum opbevares en Bøile, hvorom det i *Ant. Tidskr. 3. S. 95* heder: „Buters bygeln, som väger 101,88 grammer, har på insidan et märke bestående af fyra trepuncterade dubbelttrianglar. Enheten blir således 25,47 grammer eller i det närmaste et svenskt medeltids-öres vigt". De fire Dobbelttriangler betegne nemlig 4 öre eller 12 örtuger.

[1] *Brandis. Das Münz-, Mass- und Gewichtswesen in Vorderasien. Berlin 1866. S. 159.*

dende i Forasien. Man har nemlig en Sølvmynt af Nikokles, Konge i Paphos, der veier 21,09 Gr., under Circulationen naturligviis noget slidt.[1] Denne kaldes i Beskrivelser en Dobbeltstater, rimeligviis af den Grund, at man andensteds og tildeels senere prægede Statere af halv Vægt, saavel i Forasien som i Thrakien og Makedonien, saasom hos Brandis l. c.

S. 439	fra	Antandros	vægt.	11,00	Gr.,	i Paris.
- 518	-	Abdera	—	10,10	-	Brit. M.
- „	-	ib.	—	10,20	-	ib.
- „	-	ib.	—	11,5	-	ib.
- 523	-	Maroneia	—	10,80	-	ib.
- 492	-	Phasaelis	—	10,89	-	Hunter.
- „	-	ib.	—	10,88	-	Mionnet.
- 493	-	Aspendos	—	10,94	-	Hunter.
- „	-	ib.	—	10,92	-	Brit. M.

og mangfoldige flere.

Det store Antal af saadanne Mynter, som opbevares i de store Myntsamlinger, vidne om, at den oprindelige Stater (senere kaldet Dobbelstater) maa have havt en Vægt af henved 22 Gr.

Herodot (III, 90 flg.) beretter, at Kong Darius Hystaspis af 19 Satrapier havde Tribut i Sølv til et samlet Beløb af 7,600 babyloniske eller Sølv-Talenter, og af eet, det indiske, 360 eubøiske eller Guld-Talenter. For at lægge disse Summer sammen reducerer han Guldtalenterne til Sølvtalenter, idet han siger, at 60 babyloniske Miner vare = 70 eubøiske. Han faar da ud.

at Sølvet var	=	9,540	eub. Tal.
og Guldet	=	4,680	—[2]
af H. tilsammen		14,560	—

Ved at regne efter sees, at der i Beregningen er begaaet Feil. Disse Feil berigtiges paa en let Maade af Prof. Mommsen[3]

[1] *ib. S. 511.*

[2] Heraf erfares, at Guldets Vægt er bleven multipliceret med 13 for at reduceres til Sølv, at altsaa Guldets Værd forholdt sig til Sølvets som 13 : 1. *Brandis l. c. S. 68—69* angiver Forholdet efter en anden Beregning = $13\frac{1}{3}$: 1.

[3] *Geschichte des Römischen Münzwesens. Berlin 1860. S. 24—25.*

ved at antage en Skrivfeil i Texten, nemlig $\overline{\Theta}$ΦΜ (9540) istedetfor $\overline{\Theta}$ΩΠ (9880). Naar man lægger disse Summer sammen, udkommer den af H. angivne Sum 14,560 eub. Tal., og beregnes Talenternes Forhold paa dette Grundlag, bliver 60 babyl. Miner = 78 eubøiske.

Et hos Harpokration opbevaret Sagn beretter, at Darius, en ældre af dette Navn end Xerxes's Fader, lod præge Dariker, som hver især var værd saameget som 20 Drachmer og 5 Dariker lige med en Mine Sølv.[1]

Nu veie de bedst vedligeholdte Dariker af Guld, som opbevares i europæiske Samlinger, omkring 14,90 Grammer.

Sølv af samme Værd maa altsaa efter Forholdet 13 : 1 veie $13 \times 14{,}90 = 193{,}70$ Gr.

Nu siger Harpokration, som sagt, at en Darik af Guld var værd 20 Drachmer; hver Drachme maatte altsaa veie $193{,}70 : 20 = 19{,}685$ Gr. Nu brugte man om Διδραχμον, d. e. en Mynt af to Drachmers Vægt, Benævnelsen Στατηρ (af Sølv, i Vægt forskjellig fra Guldstaterens), og da Drachmens Vægt efterhaanden var sunken ned til 10 à 11 Grammer, blev Staterens Vægt omtrent 21 à 22 Gr. Men Drachmens Vægt vedblev at synke til 4 à 5 Gr., medens Benævnelsen Stater tildeels fremdeles brugtes om Mynter af 21 à 22 Grammers Tyngde, hvoraf fulgte, at man da brugte Τετραδραχμον i samme Betydning som Στατὴρ. Dette fandt Sted ved Christi Tid: thi af Matth. 17, 24 sees, at Tempelskatten for en enkelt Person var Διδραχμον, men i v. 27 heder det, at en Στατηρ blev betalt for to Personer.

Endnu et Vidnesbyrd om den gamle Staters Tyngde tør ligge i et af de Vægtlodder, som Layard medbragte til Britisk Museum. Det er, som de babyloniske Vægtlodder i Almindelighed, i Form

[1] Under Ordet: Δαρεικὸς, siger han: εἰσὶ μὲν χρυσὸν στατῆρες οἵ δαρεικοὶ. ἠδύνατο δὲ ἕκαστος αὐτῶν ὅπερ ὃ παρὰ τοῖς Αττικοῖς ὀνομαζόμενος χρυσοῦς. οὐκ ἀπὸ Δαρείου τοῦ Ξέρξου πατρὸς ἀλλ᾽ ἀφ᾽ ἑτέρου τινὸς παλαιοτέρου βασιλέως ονομάσθησαν. λέγουσι δε τινες δύνασθαι τὸν δαρεικὸν δραχμὰς αργυρίου εἴκοσιν ὥς τοὺς πέντε δαρεικοὺς δύναθαι μνᾶν ἄργυρίου.

af en And og veier 21,36 fr. Gr. Uagtet det er meget godt vedligeholdt, kan man dog antage, at det er blevet en Smule formindsket ved Brugen, og at det oprindelig kan have veiet 21,80 Gr. og har været den gamle babyl. Staters Vægteenhed. I Kanten sees to Streger, som betegne to Eenheder[1], hvilke maa antages at være indridsede, da Vægtloddet gik over fra at betegne een Eenhed til at gjælde for to.[2]

Blandt de talrige græske Vægtlodder, hvorover Hr. Murray giver en Liste, forekommer en διστατὴρ fra Kyzikos, vægt. 45,07 Gr., den enkelte Stater altsaa beregnet til 22,53 Gr.[3]

Ogsaa ved Prægningen af Kobbermynt sees Vægteenheden 21 Gr. at have gjort sig gjældende, nemlig i Storgrækenland og paa Sicilien. Der forekommer L i t r a = 42 Gr. i ældre Tid, tilligemed H e m i l i t r o n = 21 Gr. Senere L i t r a = 21 Gr. saasom i Rhegium, Akragas, Gela, Himera o. fl. St.[4]

Fundet af Armbøilerne ved Fölhagen giver Hr. Hildebrand Anledning til at omtale, at der forhen i Stockholms Museum opbevares to Armbøiler, hvis Mærker forudsætte en Vægteenhed af henved 15 Grammers Vægt. De veie nemlig respective 14,92 og 14,93 Gr.

Men heller ikke denne Eenhed harmonerer med det skandinaviske Vægtsystem ligesaalidt som med det romersk-byzantinske. Ved at see sig om efter et System, hvori 15 Gr. kunde udgjøre en Eenhed, finder Hr. H., at $\frac{1}{25}$ af det af Kaliphen al-Mamun regulerede Pund var = 15 Gr., men han gjør sig selv den Indvending, at der ikke sees nogen Grund til, at just $\frac{1}{25}$ skulde udgjøre en Eenhed.

Jeg skal tillade mig ogsaa om denne Vægteenhed at fremsætte en Conjectur.

[1] Am Rande sieht man sehr deutlich zwei Striche nebeneinander zur Bezeichnung des Nominals. *Brandis l. c. S. 47. Anm.*

[2] En lignende Overgang er i vort Aarhundrede foregaaet med Benævnelsen: R i g s d a l e r, som i Aarh. Begyndelse betegnede en Sølvmynt af to Lods Vægt, men nu i Danmark betegner en Mynt af eet Lods Vægt.

[3] *Numism Chron. 1868 p. 66.*

[4] *Brandis l. c. S. 585 flg.*

Den ældste helleniske prægede Sølvmynt i Lille-Asien, før Darius Hystaspis's Tid, var Stateren af Vægt omtrent 14,90 Grammer.[1] Dette bevises ved talrige Exemplarer af antike Statere i de store Myntsamlinger i Paris, London, Berlin o. s. v.

Blandt omtrent 4000 Mynter af Guld og Sølv, prægede i Lilleasien, hvilke opbevares i europæiske Museer, og hvorover Hr. Brandis leverer en Liste med Angivelse af hver enkelts Vægt, saavelsom af det Museum, hvori den opbevares, sees flere hundrede, hvis Vægt varierer mellem 14 og 15 fr. Grammer. Jeg skal her anføre nogle af dem, hvis Tyngde meest nærmer sig til de anførte Smykker.

Pag. hos Brandis.	Prægested.	Vægt.	Opbevaringssted eller Eier.
- 435	Kalchedon	14,70 Gr.	
- 439	Kyzikos	14,84 -	
- 443	Abydos	14,65 -	Brit. Mus.
- 446	Tenedos	14,79 -	Hunter.
- 449	Lesbos	15,05 -	Paris.
- 455	Ephesos	15,04 -	Mus. Waddigton.
- ib.	ib.	14,96 -	ib.
- ib.	ib.	14,87 -	ib.
- ib.	ib.	15,00 -	Brit. Mus.
- ib.	ib.	14,99 -	Mionnet.
- 458	Erythræ	15,02 -	Brit. M.

Mynter af lignende Vægt prægedes ogsaa i Thrakien og Makedonien, saasom

Brandis, Pag. 517.	Abdera	14.96 Gr.	Leake.
- „	ib.	14,88 -	Pinder.
- „	ib.	15,00 -	Brit. M.
- 520	Aenos	15,04 -	Northn.
- „	Byzantion	15,00 -	Brit. M.
- „	ib.	14,96 -	Iwanoff.
- 527	Thasos	15,00 -	Mion.

Nu kan det vel synes lidet antageligt, at Smykker fra 10de Aarh. eft. Christus skulle være betegnede efter et System, som

[1] I *Brandis, S. 58*, kaldes ovennævnte Myntfod den lilleasiatiske.

var gjældende i 4de eller 5te Aarh. før Chr.; men naar man betænker, med hvilken Styrke Vedtægter, der gribe ind i Folkets Velfærd, formaa at vedligeholde sig[1], da kan man neppe finde det usandsynligt, at det gamle Vægtsystem kan have holdt sig et eller andet Sted i Lilleasien eller paa det europæiske Continent ligeoverfor, og at Smykkerne skrive sig fra det østromerske Keiserrige, hvorfra adskillige Mynter ere fundne i svensk Jord. I Fölhagenfundet forekom to saadanne.

I Fölhagenfundet var der et eneste Stykke af Guld, nemlig en liden firkantet Plade, der veiede 6,15 Ort svensk Vægt, hvilket svarer til 26,16 fr. Grammer eller til en skandinavisk Øre[2]; hvorvidt denne Vægteenhed har været tilsigtet, er uvist. Paa den ene Side mangler nemlig Guldpladen ethvert Tegn; men paa den anden Side mangle ogsaa Tegn paa Fleerheden af de Pengeringe, som svare til Vægteenheden.

Ligesom de her omtalte Armbøiler have Tegn, der angive deres Vægt, saaledes har man iagttaget, at adskillige andre Klenodier have Tegn, der ved første Øiekast see ud som Forziringer, men som ved nærmere Undersøgelse vise, at de tillige have til Hensigt at betegne Gjenstandens Vægt. Saaledes to Guldringe fra Sletnerfundet i vort Universitets Museum for nord. Oldsager. — se Rygh: E t n o r s k F u n d a f G u l d s m y k k e r f r a h e d e n s k T i d, i Vid.-Selsk. Forhandl. 1864 —; saaledes den saakaldte Buter-Bøile i Stockholms hist. Museum. — A n t i q v. T i d s k r. f ö r S v e r i g e, III, S. 95 Anm. —; ligesom de ovenfor S. 412 flg. omtalte Armbøiler i samme Museum. Denne Iagttagelse har foranlediget mig til at undersøge, om ikke flere Oldsager, hvorpaa man ikke hidtil har fundet saadanne Mærker, dog skulde have lignende.

[1] Man sammenligne den Række af Aarhundreder, som det ældre skandinaviske Vægtsystem vedligeholdt sig, nemlig fra Haakon den Gode eller maaskee længere tilbage og lige ind i det 16de Aarh., ja for en Deel bruges endnu (Marken).

[2] I Middelalderen var Ørens Vægt lidt forskjellig i de forskjellige skandinaviske Stater, varierende mellem 25,86 og 26,70 Gr. Se min Afhandling *Om Ørtug eller Tola, i Vid.-Selsk. Forhandl. for 1862.*

og jeg har været saa heldig at opdage, at de to største Guldringe, som vort Universitets Museum eier, bære saadanne Mærker.

Den største af de Guldringe, som kom for Dagen ved Egerfundet 1834[1], af saadan Form:

$^1/_3$ Størrelse.

har, som man seer, fem fremragende Forziringer.

Ved at sammenligne denne Rings Vægt, 75 Lod 2 Qv. 40 Æs, med den gamle norske Vægts Mark, fandt jeg, at Ringens Vægt temmelig nøiagtig svarede til fem Mark, hvilke saaledes ere betegnede ved de fem facetterede Zirater.

Beregningen er følgende:

75 Lod 2 Qv. 40 Æs nuværende norsk Sølv-Vægt svarer

[1] Se mit Univ.-Program for 26de Jan. 1835: *Descriptio ornamentorum &c*

til 19,368 Æs. Divideres dette Tal med 3782 (saamange Æs udgjøre en Mark fra Middelalderen)[1], faar man ud 5,12 Mark.

Nu viser vistnok Sammenligningen, at Ringen veier 444 Æs eller for hver Mark 88 Æs mere end 5 Mark efter anførte Beregning, men Marken i de nordiske Stater varierede noget i de forskjellige Egne og har vel ogsaa varieret lidt i forskjellige Aarhundreder.[2] Femteparten af Ringens Vægt er 3805 Æs, altsaa lidt over 2 Procent tungere end den ved Middeltal af forskjellige Angivelser udfundne Vægt af Middelalderens norske Mark. Denne maa derfor vel antages at have været saameget tungere, da Ringen blev forfærdiget, thi det er mindre sandsynligt, at man skulde have givet Ringen en større Vægt end tilsigtet.[2]

Den anden Ring er den, som i samme Aar, som den førnævnte, nemlig i 1834, blev funden paa Karmøen i en Gravhøi, kaldet Flaghougen, nær ved Kirkegaarden paa Augvaldsnæs[3].

Den seer saaledes ud:

halv Størrelse.

[1] Se Indledn. til *Schive: Norges Mynter i Middelalderen. S. XXVII.*

[2] Stockholms Mark f. Ex var i 14de Aarh. 3 pCt. lettere end den norske. *Vid.-Selsk. Forhandl. 1861, S. 100.* [3] *Urda, II, S. 322 flg.*

Den har, som man seer, en Deel Zirater i Form af Perlebaand, tolv saadanne paa den ene tykke Ende ved Siden af Aabningen, og ti paa den anden, tilsammen altsaa to og tyve.

Sammenligner man dens Vægt, 40 Lod, 1 Qv. 30 Æs = 10,334 Æs, med Vægten af en gammel Øre eller 472 Æs, faar man ud 21,9 Øre; altsaa her lidt under den hidtil beregnede Vægt for Øren, men saa ubetydeligt, at Ingen kan nære Tvivl om, at Vægten 22 Øre har været tilsigtet, betegnet ved de 22 Perleringe eller maaskee tvundne Snorer.

Saalænge man ikke kjendte Taltegn, betegnede man det Antal Eenheder, som man vilde antyde, ved saamange Smaacirkler, som udfordredes; saaledes paa de nordiske Vægtlodder fra 10de Aarh. Af Ovenstaaende sees, at man ogsaa brugte andre Tegn til samme Øiemeds Opnaaelse.

Heri ligger en Opfordring til at undersøge, hvorvidt et Antal eensformede Knopper eller Ringzirater paa større Smykker af Guld og Sølv ved Siden af den Hensigt at pryde ogsaa kunne betegne Gjenstandenes Vægt. Ved at samle mange Data vil man paa den ene Side vinde flere Støttepuncter for Beregningen af Middelalderens Vægtforhold og paa den anden Side maaskee derved ogsaa kunne bestemme Sagernes Alder[1].

[1] Paa angelsaxiske Kongers Mynter bære Kongerne ofte Hjelm, omgiven af en Guldring, og paa denne sees enkelte Gange et Par Knopper i nogen Afstand fra hinanden. Jeg antager, at disse i Forening med dem, man kan tænke sig paa den anden Side, angive Ringens Vægt. Se Pl. f. 6 til Artikelen om *et lidet Fund af Mynter fra 11te Aarh.* Blandt Worsaae's Afbildninger fra det kongelige Museum for Nordiske Oldsager i Kjøbenhavn (Udg. af 1854) sees paa No. 197. 198. 288. 289. 302. 333. 340. 347 og 357 Zirater, der synes at kunne betegne Vægteenheder.

Et lidet Fund af Mynter fra 11te Aarhundrede.

Af C. A. Holmboe.

(Meddelt i Mødet den 10de Novbr. 1871.)

(Med en lithographeret Plade.)

Ved Gravning paa Kirkegaarden i Stange Hovedsogn paa Hedemarken fandt en Arbeider elleve Sølvmynter og to Fragmenter fra det 11te Aarhundrede. Dette lille Fund blev som Gave af Petter Gregoriussen Bredvold sendt til Universitetets Myntcabinet. Uagtet dets Ubetydelighed fortjener det dog Omtale af den Grund, at de ti Mynter ere hidtil ukjendte Varieteter af forhen afbildede Mynter og den ellevte er en hidtil ukjendt Mynt.

De ere afbildede paa hosstaaende lithographerede Plade.

Magnus den Gode.

1. Adv. Ingen Legende. En siddende Helgen med høire Haand udrakt som til Velsignelse, en Rosette over og en lignende under Armen; ved Hovedets venstre Side et Kors.

Rev. Som Legende en Blanding af Runer og lat. Bogstaver, hvoraf med Omskrivning af Runerne kan læses: † . EFUIN O . . NDI (Lefvin on Lundi). Et Dobbeltkors. (Mancus). Se Pl. No. 1.

Mynter, som ligne denne, ere afbildede i Beskrivelse over Danske Mynter og Medailler i den Kongelige Samling II Cl. No. 14—22, men ihvorvel Adversens Type kun lidet afviger fra Tegningen af hine, saa er Reversens Legende væsentlig forskjellig fra samtlige i den Kongelige Samling og angiver en Myntmester, som før ikke forekommer paa Magnus's Mynter.

Harald Haarderaade.

2. Adv. Et barbarisk tegnet Brystbillede med venstre Side frem. Over og bag Hovedet et Kors, en Cirkel, tre smaae Trekanter og et liggende I. Foran Ansigtet et Kors.

Rev. O— og tre Kors. Et Dobbeltkors med et lidet Kors ved Enden af hver Arm. Pl. No. 2.

8 Exempl., vægtige tilsammen 97 Æs, altsaa i Gjennemsnit $12^1/_8$ Æs.

Denne Mynt er af den Art, som i forskjellige Varieteter er afbildet i Beskrivelsen over Danske Mynter &c., I Cl. No. 298 flg. og i Schives Værk, Norges Mynter fra Middelalderen, Tab. II No. 30 flg. og Tab. III No. 6 flg., men den afviger i nogle Stykker fra dem alle.

3. Et Fragment. Adv. Et barbarisk tegnet Hoved med høire Side frem. Foran samme et Scepter med et Kors i Toppen; under Hovedet et Scepter med fire Kugler i Toppen.

Rev. En uredig Omskrift. Et Dobbeltkors. Pl. No. 3. (Mancus).

Lignende Mynter sees afbildede i Beskrivelsen I Cl. No. 312 flg. og hos Schive Tab. III No. 13 flg. Men denne afviger fra dem alle i flere Stykker.

Magnus og Olaf Kyrre[1].

4. Adv. To mod hinanden vendte Hoveder paa hver sin Side af et høit Kors, og nedenfor disse lige ved Myntens Rand ligeledes et Hoved paa hver Side af samme Kors's Stang. Oventil ved hver Side af Korset et I; over ethvert af de nederste Hoveder et Kors.

Rev. Som Legende: En forvirret Samling af Ringe og Streger. Et Dobbeltkors. Pl. No. 4.

Vægt 15 Æs.

Denne Mynt var ubekjendt, indtil et Exemplar for nogle Aar siden blev fundet paa Sandø, en af Færøerne, sammen med adskillige andre fra 11te Aarhundrede[2]. De blandt disse, som maae

[1] Fra disse Konger kjendte man forhen ingen Mynt. Idet denne Artikel skal lægges under Pressen, erfarer jeg, at Bergens Museum er kommen i Besiddelse af Magen til den her beskrevne Mynt, men at Exemplaret desværre er brudt.

[2] Fundet er beskrevet af *C. F. Herbst i Annal. f. nord. Oldkyndighed for 1863 S. 376 flg.* Han mener, at den Mynt, vi her omtale, bør tilskrives Magnus den Gode og Harald Haarderaade.

ansees for norske, har Hr. Schive ladet afbilde paa en Tillægstabel til sit Myntværk, hvorved han bemærker, at han ikke har seet Mynterne, men har tegnet dem efter en ham fra Kjøbenhavn velvilligen udlaant Tabel[1]. Vor Mynt er hos ham No. 2, og han bemærker derom Følgende:

„Figurerne skrive sig aabenbart fra samme Fabrik som de supponerede Harald Haarderaades Mynter, der alle maae ansees yngre end hans Fælledsregjering med Magnus. Reversen har ogsaa det ham tilhørende dobbelte Kors og Omskrift af Beskaffenhed som hine. Vægten er 14,187 Æs = 0,81 Grammer, Lødigheden er 10 til 11. Denne Penning maa paa Grund af de tvende Brystbilleder henføres til Haralds Sønner Magnus's og Olafs Fælledsregjering (1066—1069) og er maaskee fremkommen i det første Aar af denne fra de samme Arbeidere, som prægede for Harald.“

Idet jeg tiltræder Hr. Schives Henførelse af Mynten til Haralds Sønner, maa jeg bemærke, at han ligesaalidt som Herbst omtaler de Figurer, som sees nederst paa Adversen. De ere formodentlig blevne betragtede som Efterligninger af de Skjolde, der sees ved Brystbilledets Skulder paa nogle af Knud den Stores og hans nærmeste Efterkommeres Mynter, saasom hos Hildebrand Cnut Type D, Harold I Type B var. a. Beskrivelse &c. II Cl. Tab. III. Nyt Till. Tab. II. Tegningen paa Exemplaret fra Færøerne kunde friste til en saadan Opfattelse, da de Buer, som oventil og nedentil begrændse Figurerne, ere næsten parallele. Men Tegningen af Skjolde paa samtidige Mynter er forskjellig, som man kan see paa Fragmentet Pl. f. 3 og paa Edvard Confessors Præg f. 7. Paa vor Mynt kan en Opfattelse som Skjolde vanskeligere finde Medhold, da Buerne mod Enderne convergere og ere forbundne ved Streger, som give dem samme Udseende som de Hjelme, der sees paa Mynter af Knud den Store og hans nærmeste Efterfølger. Man sammenligne Pl. f. 6, Præget paa en Mynt af Edvard Confessor (Type E hos Hildebrand). At Guldringen om Kongens Hjelm paa vor Mynt mangler, er en Selvfølge, da den som

[1] Den samme, som ledsager Hr. Herbst's senere trykte Beskrivelse.

et kongeligt Smykke ikke tilkom underordnede Personer. Hjelme af samme Form uden Guldring sees paa nogle af Mynterne fra Sandø, No. 3. 4. 5 hos Herbst, No. 3. 9. 10 hos Schive.

Det er en bekjendt Sag, at byzantinsk Indflydelse gjorde sig gjældende ved Valg af Præg paa Mynterne i Norden i det 11te Aarhundrede. Saavel Magnus den Gode som Svend Estridssøn have efterladt Mynter, som ere Efterligninger af byzantinske. En saadan Efterligning er ogsaa nærværende Mynt.

I det østromerske Rige regjerede ofte to Keisere samtidigen, og paa sine Mynter lode de sine Brystbilleder anbringe ved Siden af hinanden med en høi Stang, paa hvis Top snart sees et Kors snart en labarum (byzantinsk Banner). De optoge ogsaa undertiden sine Sønners Billeder paa sine Mynter.

Eftersom vor Mynt er en raa Efterligning af østromerske Keisermynter, saa kunde man her mene, at Efterligningen er forfulgt ogsaa til den sidstmeldte Skik, og at de to nederst anbragte Hoveder skulle forestille Olafs to Sønner Haakon og Magnus; men Magnus Haraldssøn døde samme Aar (1069), som Haakon Olafssøn blev født. Man faaer derfor tænke paa andre Personer; maaskee de forestille to Drabanter indenfor et Stakit, holdende Korsstaven, som ikke berøres af Hovedpersonerne, hvorimod den paa de byzantinske Mynter holdes af Keiserne selv.

Denne Conjectur fremsætter jeg dog med den Reservation, at jeg ikke tør fastholde den, med mindre den bliver støttet ved Fund af Exemplarer, som ere tydeligere med Hensyn til Rummet under Hjelmene.

Fra samme Tidsrum.

5. Adv. Et stort beskjægget Hoved en face, med Spidshue. Ved dets høire Side en forziret Stolpe til en Løibænk, ved venstre Side et Kors med en Kugle ved Enden af hver Arm.

Rev. En Række af Streger og Vinkler som Legende. Et Dobbeltkors. Pl. No. 5. (Ineditus).

Vægt 10 Æs.

Uagtet Hagens Form er betegnet ved en samme begrændsende

Linie, have dog de mange under samme udgaaende divergerende Streger neppe nogen anden Hensigt end at betegne Hageskjæg. Adversens Præg viser sig at være sammensat af forskjellige Dele af flere byzantinske Mynter. Hvad for det Første Spidshuen bETRÆFFER, saa sees vel Spidshue paa flere af Knud den Stores Mynter, men den er der dobbelt saa høi, som den er bred, medens paa vor Mynt Bredden er dobbelt saa stor som Høiden, aldeles som paa talrige byzantinske Mynter. Man sammenligne Pl. No. 7, hvor Adverspræget af en Mynt af Nicephor II og Basil II (963—969) er aftegnet[1]. Korset i Toppen har paa vor Mynt ikke faaet Plads. Angaaende Skjægget tør det være tvivlsomt, om Hovedet skal forestille Kongen (Olaf Kyrre?), da Nordens Konger i dette Tidsrum ikke pleie fremstilles med Skjæg, hvorimod det var en i hele Christenheden udbredt Vedtægt at fremstille Frelseren med Skjæg paa Hagen, og paa byzantinske Mynter sees han jævnligen siddende paa en Løibænk med forzirede Endestolper, just saadanne, som sees ved Hovedets høire Side paa vor Mynt. Man sammenligne Pl. No. 9, der viser Præget i Reversfeldtet af en Mynt af Keiserinde Eudocia og hendes Sønner (1067—1071)[2]. De Buelinier, som sees, en paa hver Side af Hovedet, høre formeentlig som Rygstykker til Løibænken. Korset ved Hovedets venstre Side er laant af det Kors, som stadigen sees over Rigsæblet i Keiserens Haand. Man sammenligne Pl. No. 8, efter en Mynt af Nicephor III Botaniates (1078—1081)[3].

Vor Mynts Revers er lig Schives Tab. III No. 10.

Man seer, at Adverspræget er sammenlappet af Stumper af forskjellige byzantinske Mynter uden Hensyn til den paa disse stadigen iagttagne Adskillelse mellem Keisertype og Christustype. Til Keiseren henviser Spidshuen og Rigsæblet, til Christus Løibænken og Skjægget. Dog sees ogsaa Rigsæblet enkelte Gange i Christi Haand, f. Ex. hos Sab. Pl. XLVI No. 2.

[1] *Sabatier Pl. XLVII No. 10.*

[2] *l. c. Pl. L No. 10.*

[3] *l. c. Pl. LI No. 14.*

Bemærkninger i Anledning af Assessor Hjelms Foredrag: Strøbemærkninger om Bevidsthedens Væsen.

Af Prof. Dr. F. C. Faye.

(Foredraget i Mødet den 14de April 1871.)

Naar jeg tillader mig i Aften at fremkomme med nogle Bemærkninger i Anledning af Hr. Assessor Hjelms Foredrag og navnlig med Hensyn til enkelte opstillede Spørgsmaal, nærer jeg visselig ikke den Tanke, at herved nogen rigtig gjensidig Forstaaelse vil opnaaes; thi dertil er vor Grundopfatning rimeligvis altfor forskjellig. Men jeg har dog troet ikke at burde tilbageholde min Anskuelse, der vistnok ogsaa saa temmelig falder sammen med den af Naturforskerne i Almindelighed antagne, fordi det kan være nyttigt, at det her kommer til en Udtalelse, selv om det heraf skulde fremgaa, at Tiden endnu ikke er kommen for en fuldkommen Conciliation mellem den renere philosophiske Betragtning af Naturverdenen og dens Aabenbarelser og Naturforskerens Standpunkt, idet denne hovedsagelig studerer Naturen gjennem dens mangeartede Phænomener og paa de samlede Kjendsgjerningers Basis søger at opstille de Love, hvorefter Alt regjeres. Den hele store Virksomheds indre Væsen, alle Kræfters og Legemers Ophør, Skabningens Hvorledes og Hvorfor tør Naturforskeren ei indgaa paa, eller rettere, han kan ei afsløre denne Hemmelighed. Alt er skabt vist og godt, Naturens Orden er fast og uforanderlig og kun saaledes aaben for Undersøgelse af dens phænomenale Yttringer og deres Combination. Det Spørgsmaal, som engang blev mig gjort af en Lærer i Philosophi og af mig blev nævnt i et foregaaende Møde, nemlig: om ogsaa Naturforskeren havde apodiktisk Vished for, at Solen vil staa op i Morgen, som den saalænge har gjort, er, som Enhver vil føle, ørkesløst i en Discussion om Skabningens Væsen. Naturloven er her opgjort med mathematisk Nøiagtighed, og den har holdt Stik i Tusinder af Aar og vil holde sig, indtil Sol eller Jord forgaar eller træder ud af sine Baner, hvilket Ingen kan vide noget om.

Betragtes altsaa Skabningen fra det Standpunkt eller med den Opfatning, som Naturforskeren har indtaget, vil det strax som en historisk Kjendsgjerning vise sig, at man har naaet de sikreste Resultater i den Del af Naturstudiet, der har medgivet en Granskning af Phænomenerne ved Hjælp af mathematiske Beregninger, medens Studiet af en anden Del (Biologien) har ifølge den vexlende og mangeartede Virksomhed mødt overordentlige Vanskeligheder.

Den Evidents, hvormed Naturforskeren er tilfreds, er vistnok heller ikke fremgaaet, uden at det har været nødvendigt at opstille Hypotheser; men Forskjellen mellem den rene speculative Tænkning og Mathematikerens samt Naturforskerens Speculationer har væsentlig været den, at disse Sidste altid ere fremsprungne af Noget, der var givet eller factisk constateret; de have støttet sig til visse Kjendsgjerninger som Fundament, men ikke indgaaet paa at construere apriorisk, saaledes som den ældre Tids speculative Philosopher ganske ofte forsøgte det. Ved Overgangen fra den rene transcendentale Tænkning (Metaphysik) til den saakaldte Naturphilosophi nærmede man sig ganske vist paa en Maade til at anskue Naturen med en Naturforskers Øie; men Blikket laa for høit, og derfor kunde og kan ikke nogen Generalisation eller noget almengyldigt System fremstaa paa den Vei. Det er i saa Henseende af Interesse at høre — til Ex. ogsaa af Hr. Hjelms Foredrag, — hvor tvingende Trangen er til at benytte Naturphænomener som Beviser for eller til at demonstrere Rigtigheden af flere philosophiske Sætninger, og heri tør man maaske se Tendentsen til en Slags Mediation; men Anvendelsen af disse Phænomener f. Ex. i: at Ringene i Vandet, naar man kaster 2de Stene ud, møde hinanden paa en vis Maade, hvorved Lys- og Lydbølgernes gjensidige og dog uafhængige Krydsning skal anskueligjøres; eller at 2de sammenstødende Kugler drives tilbage, eller Opfatningen af Tyngde, Cohæsion, Katalyse, Electricitet o. s. v. — vil, saavidt jeg formaar at skjønne, ikke kunne gjøre det forstaaeligt for Naturforskeren, at hermed nogen oplysende Forklaring er givet angaaende de virkende Kræfters Væsen.

Den Sætning, „at det Hele er i sin Enhed uendeligt, i sin Flerhed endeligt," — „at der er Enhed i Modsætningen og Modsætning i Enhed," har vist sin Rigtighed fra det almindelige philosophiske Synspunkt, hvorfra Hjelm betragter Tingen; — men naar man følger hans Begrebers Udvikling, navnlig med Hensyn til Betydningen af Kraft (Dynamis, Vis,) i Modsætning til eller, om man vil, i Relation til Materie, vil det snart vise sig, at der findes en ganske stor Kløft mellem hans og Naturforskerens Philosophi.

Hvis jeg i dette Punkt har forstaaet Hr. Hjelm ret, vil han ifølge sin philosophiske Anskuelse have „Kraft" betragtet som en Enhed af Flerheder. Men til dette Resultat er Naturforskeren endnu ei kommen op. Vistnok er det i den senere Tid lykkedes at combinere enkelte Kræfter paa en Maade, som antyder en vis Ensartethed, og denne Granskningens Frugt har ikke alene havt en høi Grad af videnskabelig Interesse, men ogsaa fundet sin vigtige Anvendelse i det practiske Liv; imidlertid maa det dog nok erkjendes, at i det Hele har Studiet maattet nøie sig med at trænge ind i de enkelte Naturkræfters Virkninger og at indordne disse under bestemte Love, hvorved Phænomenerne i Naturen gjøres forstaaelige og saavidt muligt ogsaa praktisk brugbare. Men reiser man nu tillige Spørgsmaal om Kræfternes indre Væsen eller Ophav, da maa visselig Naturforskeren beskedent bøie sig og henvise dette til Skaberens Hemmeligheder.

Gaar man over til Betragtningen af den organiske Natur, bliver Studiet saameget vanskeligere, som vi her have for os Materien i en levende Tilstand. Den belivende Kraft (Livskraften) er som saadan eller i sit Væsen ukjendt og kan ei granskes paa den almindelige naturvidenskabelige Vei. Physiologen søger derfor, som Enhver ved, hovedsagelig at studere den vegetative Virksomhed gjennem nøiagtige Undersøgelser af Materiens fineste eller elementære Processer i Forbindelse med de ydre Betingelser for Familiernes og Individernes Levedygtighed, og videre er han ikke kommen. — Kan Philosophien her løfte Naturforskeren høiere op ved noget mere apriorisk System? Det synes ikke saa for Tiden; men Ingen kan vide, om dette engang bliver den menneskelige Tænkning forundt. Udstrække vi dernæst Naturbetragtningen i et videre Omfang, som vi ere nødte til, naar ogsaa den animalsk-organiske og mentale Livsvirksomhed stiller sig for os, da faa vi tillige med en Categori af Phænomener at gjøre, der for Philosophien som for Biologien frembyder et Problem af en aldeles eiendommelig Beskaffenhed, nemlig Nervesystemets intime Virksomhed. Forholdet mellem Dynamis (Vis) og Materia kan her ligesaalidt opgjøres ved den rene Tænkning som ved Studiet paa naturvidenskabelig Vei, da vi ikke kjende de materielle Forandringer, hvorved den intellectuelle Virksomhed i sine Aabenbarelser bliver mulig. Det aandelige Liv er mægtigt, evigt i sit Princip; men Ingen kan sige, at det herneden ikke er paa det nøieste bunden til Materien. Hjernens eiendommelige Dannelse og Udvikling i Forbindelse med en stor Mængde Phænomener, der aabenbare sig saavel i sund som i sygelig Tilstand, sætter det udenfor al Tvivl, at de aandelige Anlæg og Evner ere afhængige af Hjernens Bekvemhed som det materielle Centralorgan for den hele mentale Kraft og Virksomhed. Ligefra Gall's og Spursheim's combinerede physisk-psychiske Undersøgelsesmaade og til det nærværende Tidspunkts minutiøse Undersøgelser af Nervemassens Structur har man søgt at granske og bestemme Hjerne- og Nervelivets Beskaffenhed, og det skal ei kunne nægtes, at ogsaa i dette Punkt Physiologien har gjort et Skridt fremad; — men naar saa igjen det Spørgsmaal reises: hvori bestaar det intellectuelle Livs egentlige Væsen, eller hvorledes kan Hjernen tjene som et Medium, da staa vi igjen ganske stille. Vi vide intet herom, og Intet tyder hen paa, at vi nogensinde skulle komme dette nærmere, end hvad Skaberen har givet os som en fuldendt Kjendsgjerning.

Det mentale Livs Foreteelser ere mangfoldige, og Nuancerne i aandelig Kraft og bevidst Opfatning kunne variere paa en høist forskjellig Maade, uden at man heri ser noget abnormt; imidlertid kan Enheden i denne Mangfoldighed dog saaledes forrokkes, at vi maa kalde det Sygdom, — en aandelig abnorm Tilstand — (Sindssygdom), og da denne heller ikke kan abstraheres fra Materien, ere ogsaa disse i sin Optræden psychiske Phænomener blevne Gjenstand for en naturvidenskabelig Forskning. I en tidligere Tid betragtede man denne Del af Pathologien som en ren aandelig Deviation, hvorimod almindelig Menneskehjælp omtrent var unyttig; men efterhaanden er dette bleven anderledes, og det organiske Livs Forbindelse med og Indflydelse ogsaa paa disse Onder er mere og mere bleven anerkjendt. Psychiatrene tale nu endog om, at den Tid tør komme, da ogsaa disse Sygdomme ville hovedsagelig blive studerede og bedømte paa et somatisk Grundlag. Men ligesaalidt som Kundskaben endnu i paatageligt Mon har nærmet sig til dette Maal, ligesaalidt tror jeg, at den nogensinde vil naa derhen; thi først maatte dog det normale Forhold mellem Intelligents og Hjernemasse være opklaret (Mentalphysiologi), og neppe mener Nogen for Alvor, at dette vil ske. Exempelvis skal jeg blot nævne en af de lavere staaende aandelige Evner, nemlig Hukommelsen. Hvorledes tør Nogen driste sig frem med en Tanke om Muligheden af at forklare denne Evne gjennem Materiens Studium. Vi huske fra vor tidlige Barndom, men Ingen har studeret paa i Hjernen at finde nogen Forklaring af et saadant vidunderligt Phænomen, skjønt Gall nok søgte at localisere Evnen til et bestemt Sted. Det store „Hvorledes“ er og bliver en skjult Sag for os, da Hjernen i sin Sammensætning ikke indeslutter nogen Erindringstavle. — Det hele psychiske Liv maa selvfølgelig studeres i sine Aabenbarelser som saadant og i sin individuelle Mangfoldighed. Paa dette Felt kan det vel med Grund siges, at Philosophen og Naturforskeren mødes og virkelig støtte hinanden. Allerede Plato kom, som jeg af Citater har seet, paa metaphysisk Vei til det Resultat, at Sjælens Sygdom er afhængig af somatiske Eiendommeligheder, og mange Naturforskere ere ved deres Iagttagelser ganske naturlig ledede hen til at gjøre Erfaringen anvendelig ogsaa paa den criminelle Ansvarlighed (Pinel, Despine, Pritchard, Hutcheson og mange flere), men til en organisk Grundvold er det umuligt at støtte Læren, da vi ikke kjende

Betingelserne for det intellectuelle og moralske Livs Abnormiteter. Paa somatisk Vei vil det ei lade sig udgrunde, hvorledes hele Generationer i en Familie kunne fødes med gode og onde Tilbøieligheder. Betingelsen for den saakaldte „moralske Sands" i dens mangelagtige Udvikling ligger over den physikalske Undersøgelse. Jeg skal med Hensyn til denne Gjenstand tillade mig at minde om et Foredrag — oplyst ved Erfaring — som jeg for nogle Aar siden holdt i denne Afdeling af Videnskabsselskabet angaaende en manglende eller rudimentair Sands for Toner og Musik, hvor dog under en gjennem flere Aar vedholdende Opmærksomhed og Øvelse Organet udvikledes i en paatagelig Grad.

Psychologien er, henseet til Objektet, vel ogsaa et Naturstudium, men af den Beskaffenhed, at det ikke kan drives alene ved ihærdig Iagttagelse og Induction af underordnede Tænkere. Det kræver fortrinsvis aandelige Begavelser hos den undersøgende Forsker, fordi Aanden her skal bedømme det mentale Felts Styrke og Actualitet i en individuel Mangfoldighed. Med andre Ord: Aanden skal bedømme sig selv og sit Væsen. Ingen er, tænker jeg, saa stor Materialist, at han ikke erkjender Psychologiens Indflydelse paa Retslære, Morallære, Ethik o. s. v., kort paa den hele Culturudvikling og Civilisation. Naturforskeren beskyldes jo ofte for Materialisme, og dette er vist ikke uden Grund, forsaavidt Materien og Lovene for dens Bestand udgjør hans Arbeide; men naar man herved vil have forstaaet en mere tyk Materialisme som Modsætning til Spiritualisme, kan det ogsaa med fuld Grund indvendes, at Ingen har større Anledning og Opfordring end Naturforskeren, der ser den beundringsværdige Regelmæssighed i Skabningens mindste Detailler, til at bøie sig for og hylde Skaberens Almagt.

Hvorvel det nu uomtvisteligt er saa, at ingen noksaa nøiagtig og indtrængende Undersøgelse af Hjernen vil kunne forklare, hvorledes Aanden bruger dette Redskab, har man dog, som ovenfor antydet, søgt at overbevise sig om de enkelte Deles Betydning i den animalsk-organiske Virksomhed og dette ikke uden Resultat. Exempelvis kan det saaledes nævnes, at Alt tyder hen paa, at den store Hjernes øverste Dele ere nødvendige for den egentlige

Intelligents og høiere moralske Sandsning, medens det instinctive og vegetative Livs Processer nærmest afhænge af de indre Partiers Integritet. Ja, saa begrændset til et eneste lille Punkt er den hele dyriske Livsvirksomhed, at et Knappenaalstik i denne „nodulus vitalis“ er nok for at udslukke alt Liv. Vel vil efter en saa hurtig Død enkelte vegetative Processer endnu vedvare en kort Tid, men med det tabte centrale Nerveliv er hos de høiere Dyr ogsaa det vegetative Liv ugjenkaldelig tabt. Jeg ved, at Assessor Hjelm ogsaa er bekjendt med disse Kjendsgjerninger, da jeg leilighedsvis har havt Anledning til at tale med ham herom.

Efterat have forudskikket disse korte Bemærkninger om den naturvidenskabelige Forsknings Standpunkt og Tendents, forsaavidt jeg har kunnet tilegne mig Gjenstanden, og hvorved forøvrigt intet Nyt er fremført, skal jeg tillade mig at optage nogle faa af Hr. Hjelms Spørgsmaal og Sætninger, dem han ogsaa særskilt har fremført i Videnskabsselskabets mathematisk-naturvidenskabelige Afdeling med det Ønske herom at foranledige en Discussion. Mulige Misforstaaelser ville under en videre Meningsudvexling kunne opklares. Følgende Sætning: „Bevidstheden er først potentiel, senere bliver den gjennem Sandserne actuel,“ har Hjelm fremsat med den Bemærkning, at den formodentlig vil blive uomtvistet og ikke give Anledning til nogen Discussion. Dette tror jeg dog ikke kan blive Tilfældet, om Sætningen skal drøftes fra Physiologiens Synspunkt. Jeg er meget mere tilbøielig til at antage, at det maa komme til at hede: „Bevidstheden er først latent[1] og bliver senere gjennem Sandserne potentiel eller actuel.“ Det synes, som at dette ogsaa var Aristoteles's Mening, naar han siger: „Nihil est in intellectu, quod non prius erat in sensu,“ hvilket ogsaa stemmer med alle senere Naturforskeres Opfatning af Hjernen som

[1] Maaske er ogsaa Assessor Hjelm paa en Maade enig heri, forsaavidt han i sine — nu trykte — Bemærkninger, som jeg først har seet, efterat mine Bemærkninger vare nedskrevne, ligeledes taler om en latent Kraft. Men for Naturforskeren vil dog Spørgsmaalet hovedsagelig afhænge af Hjernens Beqvemhed som Organ for den aandelige Kraft, der altsaa fra Begyndelsen er som saadan lidet mærkbar, men udvikler sig og vinder i Intensitet med Materiens Udvikling.

Intelligentsens Organ. Det nyfødte Barn er nemlig omtrent at betragte som en Organisme uden nogen egentlig Selvbevidsthed, og først gjennem de sandselige Indtryk bliver det bevidste Liv vakt. For en apriorisk Betragtning maa dette synes anderledes, og dette er ganske naturligt, naar man holder paa den abstrakte Mening, at „al Enhed er Kraft", som ogsaa af Hjelm er udtalt, og at Materien er tilbleven ifølge en Kraftyttring. Sætte vi os imidlertid ikke paa et saadant primitivt Skaberstandpunkt, men betragte og undersøge vort Objekt, det nyfødte Barn, da maa vi nødvendigvis komme til et omvendt Resultat. Naar saaledes til Ex. en af vort Lands Philosopher, afdøde Statsraad Treschow, har ment, at Barnets Dreining af Hoved og Øine mod Lyset er et Tegn paa det intelligente Livs Tilværelse, eller, med andre Ord, Barnet maa have en bevidst Trang henimod Lyset, da synes dette jo ogsaa ganske smukt, og man hviler gjerne paa denne Tanke. Men Naturforskerens philosophiske Betragtning af Phænomenet, der støtter sig til Analogi og Induction, stemmer ikke med en saadan Opfatning. Som det vil være Enhver bekjendt, gives der Planter, som stadig vende sin Blomst mod Solen og følge dens Gang. Her er det ikke nogen Bevidsthed, men en ganske anden Naturkraft, som virker. Videre gives der flere Insekter, som begjærlig søge Lyset, om det end er brændende, og tilsidst virkelig brænde sig op. Disse Dyr kunne paa Grund af deres Nervesystems mindre fuldkomne Udvikling ikke tillægges noget Skjøn eller nogen Bevidsthed, naar de saa ivrigt søge Lyset. Og i Virkeligheden er det spæde Barn omtrent i samme Tilstand. Hvorledes har nu Biologen paa naturvidenskabelig Vei søgt at belyse dette Forhold mellem Kraft og Materie? Det er jo naturligt, da Ingen kjender Kraftens Væsen[1], at man har været dreven til at undersøge det materielle Medium, hvorigjennem den virker. Saa-

[1] Under Begrebet „Kraft" har man i Almindelighed forstaaet noget „Immaterielt": men i saa Fald maa da de materielle Partikler, som skulle sammenføies, allerede existere, og seet paa den Maade vil det være uegentligt at sige, at Kraften danner Materien. Derimod synes Kraften paatagelig at dannes af Materien, naar til Ex. 2 Metaller bringes i Berørelse og derved en galvanisk Virksomhed frembringes.

meget har man da ogsaa lært, at Hjernemassen er meget blød hos det spæde Barn, men at den fastner med Alderen, og at formentlig saaledes alle dens senere Elementer blive mere og mere skikkede for den ophøiede Rolle, de skulle udføre som den intellectuelle Krafts Organer. Med andre Ord, det synes bestemt saa, at en Udvikling af den aandelige Kraft er afhængig af en i qvalitativ og qvantitativ Henseende godt udviklet Hjerne. Formentlig tvivler vel ingen Philosoph, der har skuet noget ind i den physiologiske og ethnologiske Forskning, heller paa, at Materien her har en vigtig Rolle. Om Hjernen hos den Voxne ved Sygdom igjen bliver blød i visse Dele, se vi ogsaa en tilsvarende Tilbagegang i den intellectuelle Sphære. Men da vi, som ovenfor sagt, intet kjende til de intimere Forandringer under Udøvelsen af den hele aandelige Virksomhed og neppe nogensinde naa saalangt, maa vi nøie os med at granske de grovere somatiske Betingelser for et sundt Aandsliv (sana mens in sano corpore), og forresten vil vist Physiologen afstaa fra enhver Forklaring af det aandelige Livs Grundvæsen og af dets potentielle Differentser hos Individet. Dette maa og bør staa, saaledes som det ogsaa benævnes: som en B e g a v e l s e af det Slags, som Ingen skal udgrunde. Af denne Fremstilling vil det ogsaa fremgaa, hvorledes en Naturforsker maa komme til at anskue flere andre af Hjelms Sætninger.

Naar det saaledes heder, „at Bevidstheden har Sandser“, maa det erindres, at Sandsningen formentlig er Bevidsthedens Kilde. Sætninger som: „Bevidsthedens legemlige Organisation;“ „at Bevidstheden er det, som driver Tanken fra Modsigelse til Modsigelse, fra Modsætning til Modsætning;“ „at Modsætningen bevirker Bevægelse;“ „at Villien bestemmes ved den stærkeste Bevægelsesaarsag;“ „at de enkelte Materier ere forskjellige i Typus, men sammenhængende i deres Vexelvirkning“ o. fl., der ere baserede paa en — som det maa synes Naturforskeren — halv metaphysisk halv psychologisk Betragtning, kan der fra et almindeligt naturvidenskabeligt Standpunkt neppe blive Tale om at discuttere; — eller, om de skulle discutteres, maatte de blive at betragte fra et ganske andet Udgangspunkt, end det, den rene Tænkning har indtaget. Jeg tør efter min Opfatning ialfald ikke indlade mig herpaa.

Naar derimod Hjelm, formentlig som et Bevis paa Naturanskuelsens Usikkerhed, siger, „at Forstanden ei altid bliver rigtig, fordi Gjenstanden ofte stiller sig forskjelligt, f. Ex. ved Refraction af Lyd og Lys,“ da er dog denne Indvending, saavidt jeg opfatter det her vundne Resultats Betydning, ikke holdbar; thi det første Indtryk er her ei det Betegnende for den forstandige eller beregnende Opfattelse af Phænomenet, da man mathematisk har seet sig istand til at corrigere det Vildledende i det første Indtryk paa Bevidstheden. Dette henhører da til den „Psycho-Physik,“ som af Hjelm er antydet som ogsaa tilhørende en nyere Tids philosophiske Forskning.

Assessor Hjelm har udtalt, „at man maa gaa ud fra, hvad der uafviselig paatvinger sig,“ altsaa fra Prænotioner, som maa ansees som uden videre givne. Saavidt jeg skjønner, er det jo dette, som ogsaa Naturforskeren gjør, naar han tager Skabningen, Naturen, som det Givne, medens han ikke tør gaa ud fra givne Ideer. Hvorledes stiller nu en primitiv Idégang sig? Dette Spørgsmaal bliver, saavidt jeg forstaar, meget vanskeligt at besvare. En Vild, et Naturmenneske, der er opvoxet uden nogen anden belærende Indvirkning, end den, en simpel Naturbetragtning medfører, vil ganske vist gjøre sig Ideer, der ere vakte gjennem Sandserne, og hvor ikke den aandelige Opfatningsevne ligger overmaade lavt, der vil sikkert en religiøs Idéforbindelse udvikle sig. Trangen hertil maa kaldes uafviselig og tvingende; men i Formen vil Tilbedelsen nærmest hefte sig ved Naturgjenstande, Dyr, Solen o. s. v. og først under en høiere Culturs Paavirkning vinde sig op til en klarere Bevidsthed.

Naar man vil studere Aandsudviklingen paa en psycho-physisk Maade, kan det efter min Opfatning ikke blive rigtigt at begynde med, hvad der rører og bevæger sig i den fuldt udviklede Bevidsthed, der driver Tanken frem med en Magt, der er uimodstaaelig, og som giver Støtte for det Udsagn, at Mennesket er skabt i Guddommens Billede. Kraften i sin Forbindelse med Materien har for

Naturforskeren ogsaa en Barndomstid i den organiske Verden. Livets Spire er tilstede, men den tiltrænger Cultur for at udvikles til en moden Frugt med fornyet Spirekraft. Buffon udtalte ogsaa dette tydeligt, naar han benævnte Materien „productrix", og Philosophen Schelling har, hvorvel i noget dunklere Udtryk, sagt det samme, naar han definerer Livet som „Identiteten af Product og Productivitet." For Naturforskeren er dog hermed intet forklaret[1], og heller ville vi samstemme med den bekjendte Physiolog Haller, naar han siger: at i Naturens Indre formaar ingen menneskelig Aand at trænge ind, den maa være tilfreds med at granske Skallen[2], fordi dette nu allerede gamle Udsagn dog endnu er gyldigt og betegner Biologens nærværende Bestræbelser og Standpunkt.

Jeg maa bede Selskabet om en overbærende Bedømmelse, idet jeg slutter disse Bemærkninger i Anledning af Hr. Assessor Hjelms Foredrag. De indeholde, som ovenfor sagt, ikke noget Nyt, men de faar staa i vore Forhandlinger som et Udtryk af en anden Opfatning og en anden Synskreds end Hjelms. At dette Standpunkt skulde bære Præget af en ensidig Materialisme og betragtes som Udtryk af en saadan mere kras Anskuelse, vilde jeg nødigt. Det videnskabelige Arbeide vil gaa sin Gang paa det store Felt, hvorpaa det uden Hinder og Fordom nu frit bevæger sig, og det vil gaa frem, — hvorvel paa flere Veie — til Held for Samfundets sande Interesser — til dets Forædling.

[1] Cfr. en Fremstilling af Linné's Opfatning af Naturen af Prof. I. Hwasser. „Valda Skrifter," 5te B.

[2] Hallers Ord lyde saa:

„Ins Innere der Natur
Dringt kein erschafner Geist
Zu glücklich nur
Wenn er die Schale weist."

Bidrag til Legemernes Molekylartheori.

Af Cato M. Guldberg.

V.

Den kritiske Temperatur.

Det er henved et halvt Aarhundrede, siden *Cagniard de Latour* paaviste, at Vandet gik over i Dampform uden mærkelig Volumforandring ved meget høie Temperaturer og Tryk. Hans Apparater vare for ufuldkomne til at bestemme Trykket og Temperaturens Størrelse. Først i 1869 har *Th. Andrews* offentliggjort nøiagtige Forsøg, hvorved han har bestemt for enkelte Legemer det Tryk og den Temperatur, hvorunder Vædsken gaar over i Damp uden Volumforandring. Han kalder denne Temperatur den *kritiske Temperatur,* eller det *kritiske Punkt.* For *Kulsyre* er denne Temperatur $30{,}_9{}^0$ C og for *Æther* 200^0 C.

I Videnskabsselskabets Forhandlinger for Aaret 1868 har jeg angivet den generelle Methode til at bestemme Temperaturen og Trykket under Overgangen fra en Agregattilstand til en anden. Jeg vil nu vise, hvorledes den der fremsatte Theori stiller sig ligeoverfor *Andrews'* Resultater, og udvikle de nye Egenskaber ved Legemernes Fundamentalligninger, hvortil man uvilkaarligen ledes.

Betragter man et Legeme i en given Agregattilstand, saa ere dets fysikalske Egenskaber bestemte ved Legemets to Fundamentalligninger. Den ene af disse angiver Sammenhængen mellem Legemets Volumen u og dets Temperatur t samt dets Tryk p. Den anden angiver Sammenhængen mellem Legemets indre Totalvarme U og to af de foregaaende Størrelser. Jeg vil i det følgende altid antage u og U udtrykt som Funktioner af p og t. Betragter man Legemet i en anden Agregattilstand, saa existerer der ligeledes for denne to nye Fundamentalligninger, der udtrykke dets

Volumen v og dets indre Varme V i denne nye Tilstand som Funktioner af p og t.

Gaar nu Legemet over fra den første Agregattilstand til den anden, saa forandres dets Volumen fra u til v, og Legemet maa tilføres eller berøves en indre Varmemængde, der er lig $V - U$. Denne Overgang sker nu under et Tryk p og en Temperatur t, som alene afhænger af Trykket. Sammenhængen mellem Temperaturen og Trykket under Overgangen er bestemt ved en Ligning:

$$\varphi(p, t) = 0.$$

Dersom man nu indfører de af denne Ligning fundne Værdier for Trykket i Ligningerne for Volumen u og v, saa erholdes Legemets Volumen, naar det befinder sig paa Overgangen fra den ene Agregattilstand til den anden, udtrykt ved Temperaturen alene. Betragtes f. Ex. Overgangen fra Vædske til Damp, saa findes Vædskens Volum ved Kogepunktet u og Dampens Volum ved Mætningspunktet v udtrykte ved Temperaturen t. Nu viser det sig, at jo høiere Temperaturen bliver, desto større bliver Vædskens Volum u, og desto mindre bliver Dampens Volum v. Man vil tilsidst komme til en Temperatur, hvor $u = v$, og denne Temperatur er den *kritiske Temperatur*. Men nu stiller sig strax det Spørgsmaal, hvorledes forholder Legemet sig ved en Temperatur, der er høiere end denne kritiske Temperatur. Besvarelsen er let, naar vi betragte en geometrisk Fremstilling af Fundamentalligningerne. Enhver af Fundamentalligningerne fremstiller en Flade; afsættes Temperaturen t og Trykket p langs de to horizontale Axer, saa fremstiller den vertikale Ordinat Volumen eller den indre Varme. Betragtes nu de to Flader u og v, der fremstille Vædskens og Dampens Volum, saa ville disse skjære hinanden i en Curve, hvis ene Ligning er:

$$u = v.$$

Ligningen, der angiver Sammenhængen mellem Trykket og Temperaturen under Overgangen fra Vædske til Damp, eller:

$$\varphi(p, t) = 0$$

fremstiller geometrisk en vertikal Cylinderflade: denne Cylinderflade skjærer de to Flader u og v i to Curver, som angive Vædskens Volum ved Kogepunktet og Dampens ved Mætningspunktet, og disse to Curver støde sammen med Volumfladens Skjæringslinie i et Punkt, som selvfølgelig er det kritiske Punkt, og hvis tilhørende Temperatur er den kritiske Temperatur.

Nu indsees let, *at saalænge, som Temperaturen er lavere end den kritiske Temperatur, saalænge sker Overgangen fra den ene Agregattilstand til den anden langs Cylinderfladen* ($\varphi = 0$), *men saasnart Temperaturen overstiger den kritiske Temperatur, sker Overgangen fra den ene Agregattilstand til den anden langs Volumfladernes Skjæringslinie* ($u = v$).

Ligningen $u = v$ kan bringes til Formen:

$$\psi(p, t) = 0.$$

Denne Ligning fremstiller en vertikal Cylinderflade, der gaar gjennem Fladernes Skjæringslinie og skjærer $p\,t$ Planet i denne Skjæringslinies Projektion. Betragter man blot Planet $p\,t$, saa fremstiller $\varphi = 0$ og $\psi = 0$ to Curver, som man kunde kalde *Overgangscurverne;* den ene er Overgangscurven *med* Volumforandring, den anden Overgangscurven *uden* Volumforandring.

Fig. a.

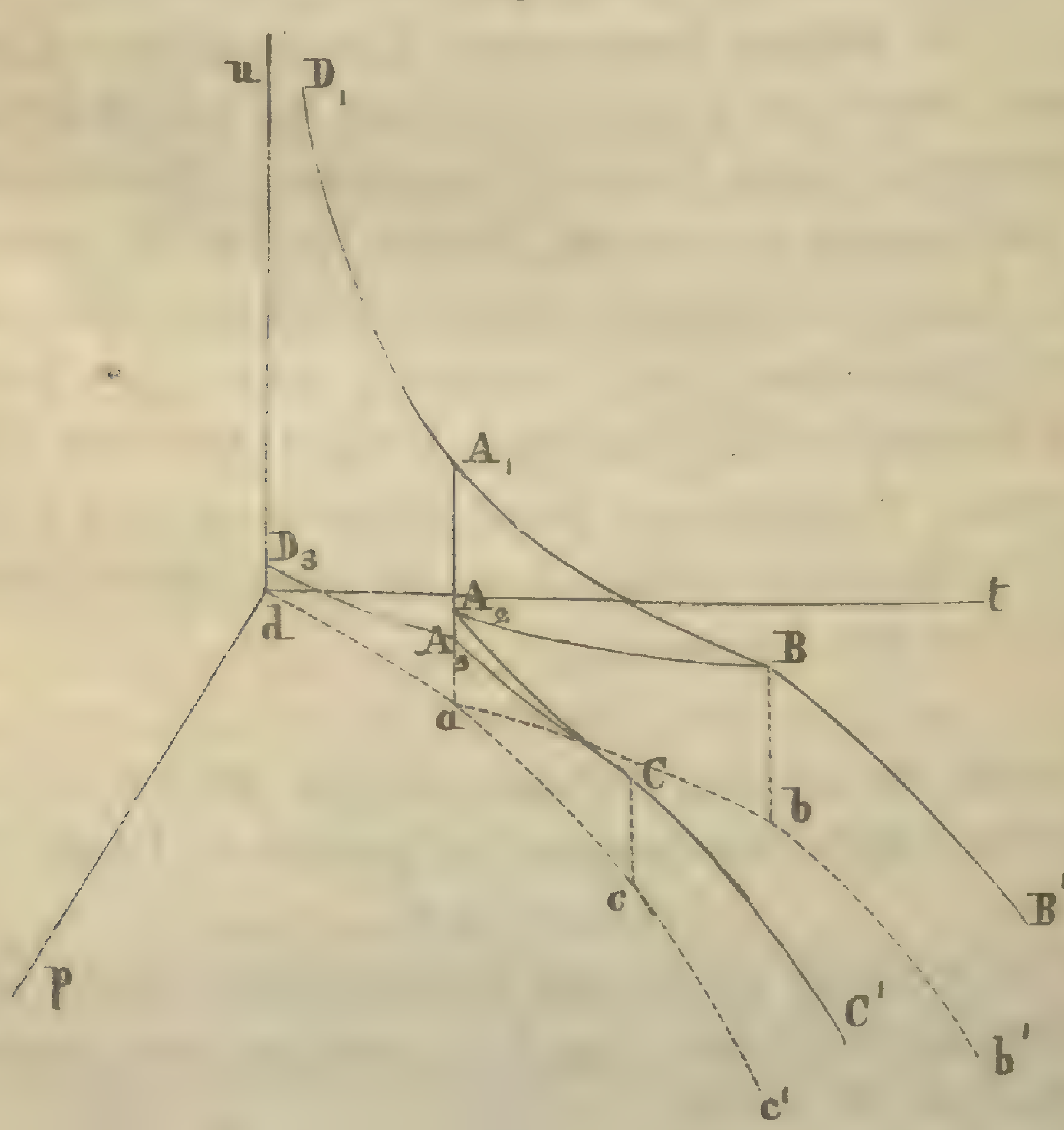
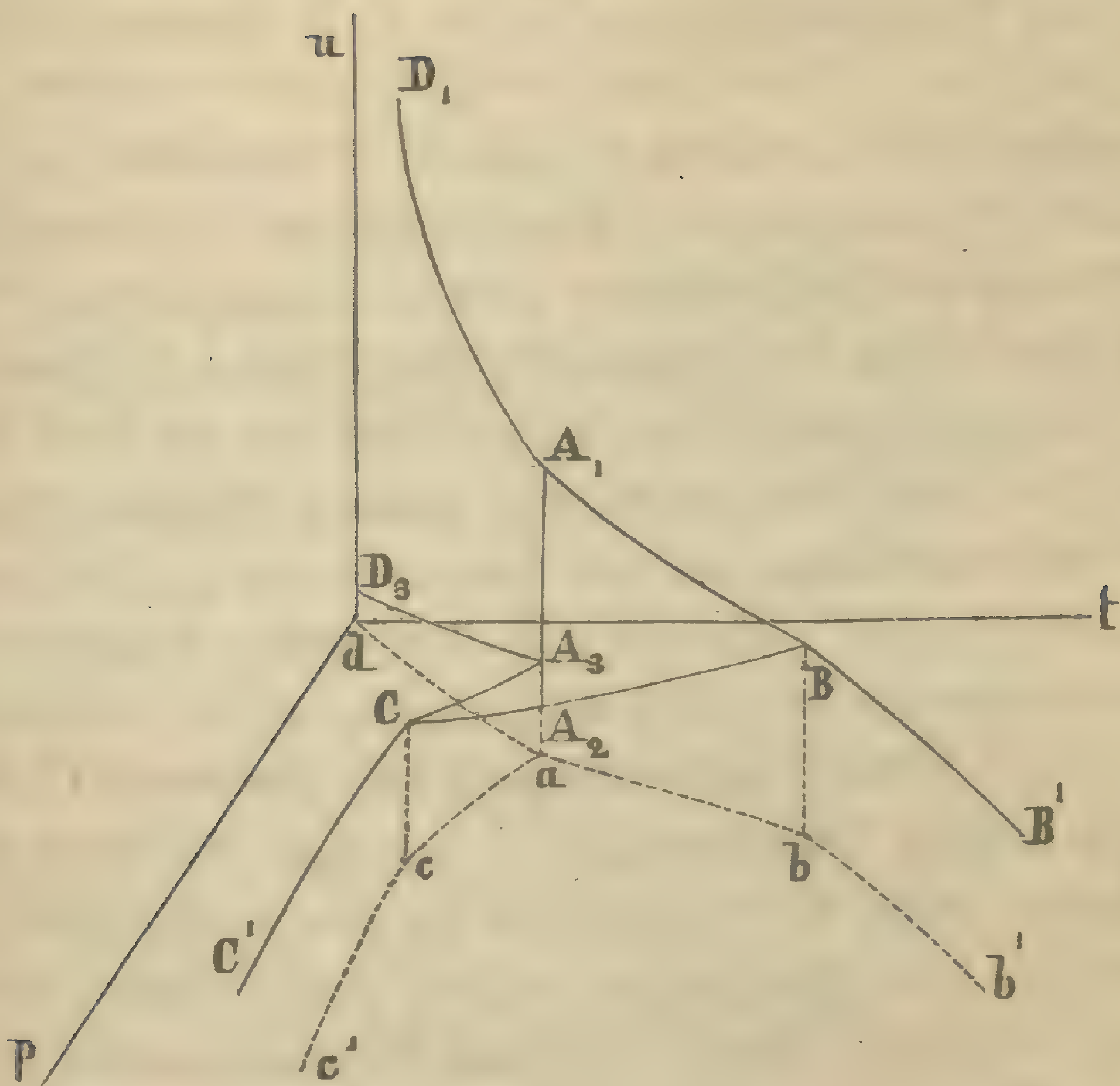


Fig. b.



Som jeg ved en tidligere Leilighed har antydet, kan man dele Legemerne i to Klasser; den ene, som omfatter de Legemer, der *forøge* sit Volum, naar de gaa over fra faste til flydende, og den med a) mærkede Figur refererer sig til disse; den anden Klasse omfatter de Legemer, som *formindske* sit Volum, naar de gaa over fra faste til flydende, som f. Ex. Vand, den med b) mærkede Figur tilhører denne Klasse.

I Figuren er den *absolute* Temperatur t afsat langs den ene horizontale Axe og Trykket p langs den anden; de 3 Flader, der fremstille Legemets Volum i *dampformig*, *flydende* og *fast Tilstand*, ere tænkte fremstillede, men kun deres Skjæringslinier og Overgangslinierne ere antydede. Punktet a fremstiller det Punkt, hvorved Legemet samtidig kan existere i alle tre Agregattilstande; jeg har i mine foregaaende Afhandlinger kaldt dette Punkt Legemets *Fællespunkt*; i en Afhandling af *J. Thomson* fra iaar sees, at han foreslaar at kalde det *det tredobbelte Punkt*. Curven a b fremstiller Ligningen $\varphi(p, t) = 0$ og bestemmer Overgangen fra Vædsketilstanden til Damptilstanden, naar Temperaturen er lavere end den kritiske Temperatur. Curven $A_2 B$ fremstiller Vædskens Volum ved Kogepunktet og Curven $A_1 B$ Dampens Volum ved Mætningspunktet. Curven $B B'$ er Skjæringslinien mellem Vædskefladen og Dampfladen, og dens Projektion $b b'$ fremstiller $\psi(p, t) = 0$; den angiver Overgangen fra Vædsketilstanden til Damptilstanden, naar Temperaturen er over den kritiske Temperatur. ***Punktet B er det kritiske Punkt*** for Overgangen fra Vædske til Damp.

Aldeles paa lignende Maade forholder det sig med Overgangen fra den ***faste Tilstand*** til den ***flydende Tilstand;*** Curven $a c$ angiver Sammenhængen mellem Temperaturen og Trykket under Overgangen ($\varphi = 0$). Curven $A_2 C$ fremstiller Vædskens Volum ved Stivningspunktet (Frysepunktet), og Curven $A_3 C$ fremstiller det faste Legemes Volum ved Smeltepunktet. Curven $C C'$ er Skjæringslinien mellem Vædskefladen og den faste Tilstands Flade og C det ***kritiske Punkt*** for Overgangen fra fast til flydende Tilstand.

Betragter man Overgangen fra den faste Tilstand til Damptilstanden, saa sker denne kun med Volumforandring og finder Sted langs Linien $a d$; Curven $A_1 D_1$ fremstiller Dampens Volum ved Mætningspunktet, og Curven $A_3 D_3$ fremstiller det faste Legemes Volum, naar Trykket er saa lavt, at det kan fordampe.

Vilde man geometrisk fremstille de Flader, der repræsentere den indre Varme *U*, saa vilde de have lignende Form som i Figuren.

Naar et Legeme gaar over fra en Agregattilstand til en anden, vil den Ligning, der bestemmer Sammenhængen mellem Temperaturen og Trykket, være udtrykt, saaledes som i mine tidligere Afhandlinger paavist, ved

$$V - U = A \left[t \frac{dp}{dt} - p\right] (v - u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Her betegner t den ***absolute*** Temperatur, A det mekaniske Varmeækvivalent, og $\frac{dp}{dt}$ tilhører Overgangslinien ($a b$ i Figuren). Indføres nu heri U, V, u og v som Funktioner af p og t, saa vil denne Differentialligningens almindelige Integral være:

$$\varphi(p, t) = 0.$$

Men Ligningen (a) kan ogsaa tilfredstilles ved at sætte:

$$V = U \text{ og } v = u.$$

Skal dette være muligt, saa maa disse to Ligninger give samme Resultat og lede til samme Ligning mellem p og t, nemlig:

$$\psi(p, t) = 0.$$

Man ser altsaa, at Skjæringslinien mellem Volumfladerne u og v maa have samme Projektion paa p t Planet, som Skjæringslinien mellem Varmefladerne U og V. Dette udsiger, at *naar et Legeme gaar over fra en Agregattilstand til en anden uden Volumforandring, da forbliver ogsaa den indre Varme i Legemet uforandret.*

Dersom imidlertid 2 Udtryk $V - U = 0$ og $v - u = 0$ skal give samme Curve uden dog at være identiske, saa maa de nødvendigvis kunne skrives under Formen:

$$V - U = G(p, t) \cdot \psi(p, t)$$

$$v - u = g(p, t) \cdot \psi(p, t).$$

Indsættes disse Værdier i Ligningen (a), saa kan Ligningen opløses i 2 Ligninger:

$$A\left(t\frac{dp}{dt} - p\right) = \frac{G(p, t)}{g(p, t)} \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

og:

$$\psi(p, t) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Integralet af Ligning (b) er altsaa:

$$\varphi(p, t) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

Derimod synes Ligningen $\psi = 0$ at være Ligning (b) uvedkommende og kun at være en singulier Opløsning af Ligning (a). Jeg skal nu vise den mærkelige Sammenhæng, der finder Sted mellem φ og ψ.

Ifølge den mekaniske Varmetheoris anden Hovedsætning finder følgende Relation Sted mellem den indre Varme U og Volumen u:

$$\left(\frac{dU}{dp}\right) = -A\left[p\left(\frac{du}{dp}\right) + t\left(\frac{du}{dt}\right)\right].$$

De med ( ) betegnede Differentialer ere partielle Differentialer. Denne Ligning gjælder ogsaa for V og v og følgelig ogsaa for $V - U$ og $v - u$. Indføres nu de ovenfor fremstillede Værdier for disse Udtryk, saa faar man:

$$\psi\left(\frac{dG}{dp}\right) + G\left(\frac{d\psi}{dp}\right) = -A\left[pg\left(\frac{d\psi}{dp}\right) + p\psi\left(\frac{dg}{dp}\right) + tg\left(\frac{d\psi}{dt}\right) + t\psi\left(\frac{dg}{dt}\right)\right].$$

Søges nu af denne Ligning $\frac{G}{g}$, og sættes denne Værdi lig den ved Ligning (b) givne Værdi, erholder man:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\left(\frac{d\psi}{dt}\right)}{\left(\frac{d\psi}{dp}\right)} - \frac{\psi}{Atg\left(\frac{d\psi}{dp}\right)}\left[\left(\frac{dG}{dp}\right) + At\left(\frac{dg}{dt}\right) + Ap\left(\frac{dg}{dp}\right)\right].$$

Her betegner $\frac{dp}{dt}$ det Differentialforhold, der tilhører Ligningen $\varphi = 0$. Bemærkes nu, at:

$$d\psi = \left[\left(\frac{d\psi}{dp}\right)\frac{dp}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\right] dt$$

saa kan Ligningen skrives:

$$\frac{d\psi}{\psi} = -\frac{dt}{Atg}\left[\left(\frac{dG}{dp}\right) + At\left(\frac{dg}{dt}\right) + Ap\left(\frac{dg}{dp}\right)\right] \quad . \quad (e)$$

Man kan nu antage to Tilfælde:

1) Høire Side i Ligning (e) er *alene en Funktion af t;* isaafald er det almindelige Integral:

$$\psi(p, t) = C\chi(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

og følgelig er:

$$\varphi(p,t) = \psi(p, t) - C\chi(t).$$

I dette Tilfælde er $\psi(p, t) = 0$ et *partikulært Integral* af $\varphi(p, t) = 0$, idet det fremkommer ved at sætte *Integrationskonstanten* $C = 0$. Den *kritiske Temperatur* er given ved Ligningen:

$$\chi(t) = 0.$$

2) Høire Side af Ligning (e) indeholder en Funktion af ψ som Faktor; isaafald er det almindelige Integral:

$$\psi(p, t) = \chi(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

hvor Integrationskonstanten indgaar i Funktionen paa en ubekjendt Maade; man har:

$$\varphi(p, t) = \psi(p, t) - \chi(t).$$

Den kritiske Temperatur er bestemt ved:

$$\chi(t) = 0.$$

Den ovenfor udviklede Fremgangsmaade til Bestemmelsen af de 2 Overgangslinier forudsætter, at man kan udtrykke u og U som Funktioner af p og t. Dette vil maaske frembyde store Vanskeligheder selv ved de approximative Formler, som kjendes for Fundamentalfunktionerne.

Tænker man sig Trykket p givet som Funktion af Temperaturen t og Volumen u, og den indre Varme U ligeledes som Funktion af t og u, saa vil man, ved at sætte Trykkene ligestore for begge Agregattilstande, erholde en Ligning, mellem u og t, der bestemmer Volumfladernes Skjæringslinier. Sættes ligeledes de indre Varmemængder ligestore, findes en ny Ligning mellem u og t, der maa give identisk samme Resultat som den første.

Det er sandsynligt, at den første Overgangslinie isaafald lettest lader sig udtrykke ved u og t, og man kan derfor søge at borteliminere p og $\frac{dp}{dt}$ af Ligning (a) ved at indføre p's Værdi fra Fundamentalfunktionerne. Fremgangsmaaden sees bedst ved nedenstaaende Exempel.

Specielle Tilfælde.

Legemernes Fundamentalfunktioners sande Form er aldeles ubekjendt; af de forhaanden værende Forsøg er det vanskeligt at opstille Tilnærmelsesformler, der skal gjælde gjennem et større Temperaturinterval. De her opstillede Formler kan derfor ikke gjøre Fordring paa at fremstille de virkelige Forhold, men maa nærmest betragtes som Exempler paa den ovenfor udviklede Theoris Anvendelse.

Jeg vil derfor *antage,* at der *existerer et Legeme,* hvis Fundamentalfunktioner i den flydende Tilstand kan skrives:

$$\frac{p}{t} = -\frac{R}{u} + \frac{X}{u^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$U = F - \frac{At^2 X'}{u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

og hvis Fundamentalfunktioner i den dampformige Tilstand kan skrives:

$$\frac{p}{t} = \frac{S}{v} - \frac{Y}{v^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$V = G + \frac{At^2 Y'}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Her betegner S og R konstante Størrelser: F, G, X og Y ere

Funktioner af t alene; X' og Y' ere de deriverede Funktioner af X og Y. Det bemærkes, at U og V begge ere fundne af den bekjendte Ligning:

$$\left(\frac{dU}{du}\right) = A\left[t\left(\frac{dp}{dt}\right) - p\right].$$

Skjæringslinien mellem Volumfladerne findes af (1) og (3).

$$u = \frac{X + Y}{R + S} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Denne Ligning angiver altsaa Legemets Volum, naar det gaar over fra Vædske til Damp, *uden Volumforandring;* det da stedfindende Tryk p findes ved at indføre Værdien af u i (1) og bliver bestemt ved:

$$\frac{p}{t} = (R + S)\,\frac{(SX - RY)}{(X + Y)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

hvilken Ligning altsaa fremstiller den anden Overgangslinie $\psi(p, t) = 0$. Af Ligningerne (2) og (4) findes den samme Skjæringslinie bestemt ved:

$$F - G = \frac{At^2\,(X' + Y')}{u}$$

hvilken Ligning i Forbindelse med (5) leder til *følgende Betingelsesligning* mellem Funktionerne F, G, X og Y:

$$\frac{F - G}{At^2} = (R + S)\,\frac{X' + Y'}{X + Y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Den første Overgangslinie bestemmes ved Ligning (a), der kan skrives:

$$(V - U)\,dt = At^2\,(v - u)\,d\left(\frac{p}{t}\right)$$

Indsættes nu for $v d\left(\frac{p}{t}\right)$ dens Værdi af Ligning (3) og for $u d\left(\frac{p}{t}\right)$ dens Værdi af Ligning (1), saa erholdes ved Hjælp af Betingelsesligningen (7) en Differentialligning, hvis Integral er:

$$R \text{ lognat } u + S \text{ lognat } v - (R+S) \text{ lognat } (X+Y) + 2\left(\frac{X}{u} + \frac{Y}{v}\right) = C. \quad (8)$$

Ved Hjælp af Ligningerne (1) og (3) kan nu u og v bortelimineres, og man har den anden Overgangslinie $\varphi(p, t) = 0$, hvis Form imidlertid er høist ubekvem. Dersom man i Ligning (8) sætter $v = u$ og bemærker, at isaafald maa u faa samme Værdi som i (5), saa findes Konstanten C, og Ligningen kan skrives:

$$R \operatorname{lognat}\left(\frac{X+Y}{u(R+S)}\right)+S \operatorname{lognat}\left(\frac{X+Y}{v(R+S)}\right)=2\left[\frac{X}{u}+\frac{Y}{v}-R-S\right] \quad . \quad (8^b)$$

Man skulde nu vente at kunne finde den kritiske Temperatur af Ligning 8^b ved deri at sætte $v=u$; sættes $v=u$, saa findes imidlertid ikke nogen bestemt Temperatur, men en Ligning mellem u og t, der falder sammen med Ligning (5). Dette har sin Grund deri, at Ligning (8) er fremkommen ved Integration af Ligning (a), uden at *den Faktor, der bestemmer den anden Overgangslinie,* er bortskaffet; følgelig fremstiller Ligning (8) *samtidig begge Overgangslinier.*

For at finde den *kritiske Temperatur* gaar jeg derfor frem paa følgende Maade.

For Kortheds Skyld sættes:

$$\frac{X+Y}{u(R+S)}=a;$$

$$\frac{X+Y}{v(R+S)}=b;$$

$$\frac{X}{X+Y}=z;$$

$$\frac{R}{R+S}=r.$$

Ligning (8^b) antager da Formen:

$$r \operatorname{lognat} a+(1-r) \operatorname{lognat} b-2(za+(1-z)b-1)=0 \quad . \quad (8^c)$$

Elimineres p af (1) og (3) og indføres a, b, z og r i den fremkomne Ligning, erholdes:

$$a(za-r)-b((1-z)b-(1-r))=0 \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Med disse Betegnelser er den anden Overgangslinie fremstillet ved $a=1$ og $b=1$. Eliminerer man nu b mellem Ligningerne (8^c) og (9), saa fremkommer en Ligning mellem a og z. Sætter man nu Temperaturen t lig den *kritiske Temperatur,* saa erholder z en vis Værdi z', og Ligningen mellem a og z' maa da have 2 ligestore Rødder, nemlig $a=1$. Udvikles lognat i Række, og opstilles Betingelsen for, at Ligningen er divisibel med $a-1$ og den tilbageblevne Divisor ogsaa divisibel med $a-1$, saa findes Værdien af z bestemt ved:

$$z=-\frac{r^2}{1-r}.$$

Indføres atter de forrige Betegnelser, erholdes *Ligningen,* som *bestemmer den kritiske Temperatur:*

$$\frac{X}{R^2} + \frac{Y}{S^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Den indre latente Varme under Overgangen fra den ene Aggregattilstand til den anden er bestemt ved:

$$V - U = G - F + At^2 \left(\frac{X'}{u} + \frac{Y'}{v}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

og kan ved Hjælp af Ligning (7) samt Ligningerne (1) og (3) bringes til følgende Former:

$$V - U = At^2 \left[\frac{X'}{u} + \frac{Y'}{v} - (R + S)\frac{X' + Y'}{X + Y}\right] \quad . \quad . \quad (11^b)$$

$$V - U = \frac{At^2}{X + Y}\left[\frac{X'Y - YX'}{uv} - \frac{p}{t}(X' + Y')\right][v - u] \quad (11^c)$$

Denne Ligning i Forbindelse med Ligning (a) leder til følgende Formel, der kan tjene til approximativ Bestemmelse af den anden Overgangslinie:

$$d\left[\frac{p(X+Y)}{t}\right] = \frac{YdX - XdY}{uv} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Sættes:

$$\frac{p}{t}(X + Y) = P,$$

$$\frac{X}{Y} = Z,$$

findes: $dP = \frac{Y^2}{uv} dZ.$

Ved Hjælp af Ligningen (1) og (3) kan Y bortskaffes, og man finder:

$$\frac{dP}{P} = \frac{Su + Rv}{SvZ - Ru} \cdot \frac{dZ}{1 + Z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Deles nu Curven i mindre Stykker, og sættes for hvert Stykke $\frac{u}{v}$ konstant lig en Middelværdi, saa beregnes med Lethed P.

Sættes for det første Stykke af Curven $\frac{u}{v} = 0$, findes:

$$\text{lognat } P_0 = \frac{R}{S} \text{ lognat} \left[\frac{X}{X + Y}\right] + C \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Vil man anvende de opstillede Formler paa Vand (H_2O), saa kommer man til følgende Resultat.

Sættes:

$$F = ct + B$$
$$G = c't + B',$$

hvor c, c', B og B' ere konstante Størrelser, saa findes ved Hjælp af Formel (7):

$$X + Y = Kt^m e^{\frac{\alpha}{t}};$$

$$\text{hvor:} \quad m = \frac{c - c'}{A(R+S)}.$$

Endvidere vil jeg antage, at X har Formen:

$$X = kt^m e^{\frac{\beta}{t}} + a.$$

Af Forsøgene over Vandets Udvidelse og Kompression findes: $R = 754$; $\alpha = 0{,}1954$; $m = 1{,}41$; $\beta = m \,.\, 277$; $k = 0{,}00004908$; naar Enhederne ere Kilogrammet og Meteren.

Af Forsøgene over Dampens latente Varme og Tæthed findes:

$$S = 46 \text{ og } a = 693{,}4.$$

Bestemmelsen af K bliver derimod meget usikker, og det er netop den, som har mest Indflydelse paa Bestemmelsen af den kritiske Temperatur.

Sættes $K = 0{,}00004107$, findes den kritiske Temperatur at ligge omkring 900° (627° C.); Trykket er da i det kritiske Punkt 2800 Atmosfærer og Vandets og Dampens Volumen 0,00162 Kubikmeter.

Uagtet Formlerne stemme overens med *Vandets Egenskaber* indenfor de bekjendte Forsøgs Grændser, kan man ikke tillægge dem nogen generel Betydning. Af Formel (1) vil man nemlig se, at Kompressionskoefficienten, der er lig $-\frac{du}{udp}$, aftager med Temperaturen og er aldeles uafhængig af Funktionen X. Af *Grassi*'s Forsøg over Vædskers Sammentrykning fremgaar, at for flere Vædsker, som Æther og Alkohol, tiltager Kompressionskoefficienten med Temperaturen. En Formel, som tilsteder dette, er følgende:

$$\frac{p}{t} = -\frac{K}{t} + \frac{R}{u} + \frac{X}{u^2}$$
$$U = F + AKu - \frac{At^2X'}{u}.$$

K og R ere konstante Koefficienter; F og X Funktioner af t. Kompressionskoefficienten bliver her:

$$-\frac{du}{udp} = \frac{1}{2K - \frac{Rt}{u} + 2p}.$$

For Æther og Alkohol er følgelig R positiv; for Vand er derimod R negativ. Imidlertid er Antallet af Forsøg over Vædskers Kompression for lidet til en nøiagtig Bestemmelse af K og R, og tillige synes det at fremgaa, at Kompressionskoefficienten lider en stærkere Forandring med Trykket, end ovenstaaende Formel tilsteder.

Ny Interpolationsmethode.

Af

J. J. Åstrand.

Blandt de Afhandlinger, der specielt behandle Interpolations-problemet, indtager, med Hensyn til Grundighed og Elegance, den af Encke i Berliner Astron. Jahrbuch für 1830 offentliggjorte, paa Gauss' Forelæsninger over Interpolationstheorien grundede, Afhandling uden Tvivl den første Plads. Efter deri at have deduceret den af Lagrange fundne, men først i Lacroix's Calcul different. et integral meddelte generelle Formel for Bestemmelsen af en Functionsværdi, naar Differentserne mellem to og to af de, de givne Functionsværdier tilsvarende, successive Argumenter ere ulige store, afleder Encke derfra tre forskjellige, for ligestore Argumentdifferentser gjældende Formler, af hvilke den ene er den i det practiske oftest benyttede og i elementære Lærebøger optagne Interpolationsformel, der først fremstilledes af Newton.

Senere meddeltes andre Interpolationsmethoder af Bessel[1] og Hansen,[2] hvilke i visse Tilfælde ere dels bekvemmere, dels noget nøjagtigere end Newtons. Hertil kommer den Gaussiske, især ved Tabelberegninger ofte anvendte Methode for „Interpolation i Midten."[3] Alle disse Formler og Methoder, der, tillige med forskjellige andre, fremstilledes samlet af Cronstrand,[4] have det tilfælles, at, naar efter en af Samme enten en hel Tabel eller, som Tilfældet f. Ex. er ved Occultationsberegninger, kun nogle faa Functionsværdier skulle beregnes, maa disse bestemmes hver enkelt for sig, ved gjentagne Substitutioner i den valgte Interpolationsformel.

[1] Astronomische Untersuchungen. II, p. 150

[2] Tables de la Lune, p. 69.

[3] Schumachers Hülfstafeln, neu herausg. v. Warnstorff.

[4] Handbok i practiska Astronomien, I, p. 69—72.

I sin fortrinlige Afhandling „Über die Dimensionen des Erdkörpers“[1] fremstillede Encke en Methode, der væsentlig adskiller sig fra de førnævnte deri, at de interpolerede Functionsværdier findes ved successiv Addition og Subtraction af Differentsrækker, der ere Functioner af de givne eller directe beregnede Functionsværdiers Differentser. En lignende, maaske noget simplere Methode blev af mig meddelt i en liden Opsats med Titel „Die Constanten der Sonnenfinsterniss am 14ten und 15ten März 1858.“[2] Jeg giver mig nu herved den Ære at meddele en anden Interpolationsmethode, der paa Grund af dens Nemhed og Nøjagtighed med Fordel turde kunne anvendes ved Beregning af saavel hele Tabeller, som Grupper af enkelte Functionsværdier, saa ofte disse skulle angive Størrelsen af æqvidistante Ordinater i en hvilkensomhelst parabolisk Curve af ikke højere Grad end den 6te, og hvori de tilsvarende Abscisser angives af Tabellens Argumenter; eller, med andre Ord, saa ofte de givne Functionsværdiers 7de og følgende Differentser ere enten $= 0$, eller saa smaa, at de uden mærkelige Feil kunne antages $= 0$.

Naar i det nedenstaaende Schema af Argumenter deres tilsvarende Functionsværdier og disses successive Differentser:

Arg.	Funct.	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6
T_{-3}	F_{-3}						
		$\mathrm{I}_{,,,}$					
T_{-2}	F_{-2}		$\mathrm{II}_{,,}$				
		$\mathrm{I}_{,,}$		$\mathrm{III}_{,,}$			
T_{-1}	F_{-1}		$\mathrm{II}_{,}$		$\mathrm{IV}_{,}$		
		$\mathrm{I}_{,}$		$\mathrm{III}_{,}$		$\mathrm{V}_{,}$	
T	F		II		IV		VI
		I'		III'		V'	
T_{+1}	F_{+1}		II'		IV'		
		I''		III''			
T_{+2}	F_{+2}		II''				
		I'''					
T_{+3}	F_{+3}						

sættes:

$$\mathrm{I} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{I}_{,} + \mathrm{I}') \quad \mathrm{III} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{III}_{,} + \mathrm{III}') \quad \mathrm{V} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{V}_{,} + \mathrm{V}').$$

saa er, efter den af Hansen fremstillede, men først af Stirling[3] fundne Interpolationsformel:

[1] Berliner Astron. Jahrbuch für 1852, p. 331—336.

[2] Astron. Nachr. No. 1125.

[3] Se Sammlung von Hülfstafeln der Berliner Sternwarte, von Foerster. p. XI.

$$(1)\;\ldots\;\; F_n = F \begin{cases} + n\,\mathrm{I} \\ + \frac{n^2}{2}\,\mathrm{II} \\ + \frac{n(n^2-1)}{2.3}\,\mathrm{III} \\ + \frac{n^2(n^2-1)}{2.3.4}\,\mathrm{IV} \\ + \frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{2.3.4.5}\,\mathrm{V} \\ + \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{2.3.4.5.6}\,\mathrm{VI} + \ldots \end{cases}$$

Udvikles i (1) Coefficienterne og ordnes Producterne efter de stigende Potentser af n, saa erholdes:

$$(2)\;\ldots\;\; F_n = F + nA + n^2B + n^3C + n^4D + n^5E + n^6F + \ldots,$$

hvor:

$$(3)\;\ldots\;\; \begin{cases} A = \mathrm{I} - \frac{1}{6}\,\mathrm{III} + \frac{1}{30}\,\mathrm{V} - \ldots \\ B = \frac{1}{2}\,\mathrm{II} - \frac{1}{24}\,\mathrm{IV} + \frac{1}{180}\,\mathrm{VI} - \ldots \\ C = \frac{1}{6}\,\mathrm{III} - \frac{1}{24}\,\mathrm{V} + \ldots \\ D = \frac{1}{24}\,\mathrm{IV} - \frac{1}{144}\,\mathrm{VI} + \ldots \\ E = \frac{1}{120}\,\mathrm{V} - \ldots \\ F = \frac{1}{720}\,\mathrm{VI} - \ldots \end{cases}$$

Opgaven er nu, i den givne Functionsrække mellem F og $F_{\div 1}$, $F_{\div 1}$ og $F_{\div 2}$, $F_{\div 2}$ og $F_{\div 3}$ o. s. v., samt mellem F og F_{-1}, F_{-1} og F_{-2}, F_{-2} og F_{-3} o. s. v., at interpolere $m-1$ Led: $F_{+\frac{1}{m}}$, $F_{+\frac{2}{m}}$, $F_{+\frac{3}{m}}$ o. s. v., samt $F_{-\frac{1}{m}}$, $F_{-\frac{2}{m}}$, $F_{-\frac{3}{m}}$ o. s. v., nemlig ved først at beregne de i det følgende Schema indgaaende Differentser I, I' II III, III' IV V, V' og VI samt derefter, ved successiv Addition og Subtraction, de enkelte Functionsværdier.

$T_{-\frac{3}{m}}$	$F_{-\frac{3}{m}}$						
		$\mathrm{I}_{,,,}$					
$T_{-\frac{2}{m}}$	$F_{-\frac{2}{m}}$		$\mathrm{II}_{,,}$				
		$\mathrm{I}_{,,}$		$\mathrm{III}_{,,}$			
$T_{-\frac{1}{m}}$	$F_{-\frac{1}{m}}$		$\mathrm{II}_{,}$		$\mathrm{IV}_{,}$		
		$\mathrm{I}_{,}$		$\mathrm{III}_{,}$		$\mathrm{V}_{,}$	
T	F		II		IV		VI
		I'		III'		V'	
$T_{\div\frac{1}{m}}$	$F_{\div\frac{1}{m}}$		II'		IV'		
		II''		III''			
$T_{\div\frac{2}{m}}$	$F_{\div\frac{2}{m}}$		II''				
		II'''					
$T_{\div\frac{3}{m}}$	$F_{\div\frac{3}{m}}$						

Sættes her:

$$\mathrm{I} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{I}_{,} + \mathrm{I}') \qquad \mathrm{III} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{III}_{,} + \mathrm{III}') \qquad \mathrm{V} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{V}_{,} + \mathrm{V}'),$$

og beregnes, ved i (2) at sætte $\frac{1}{m}$ istedetfor n, de successive Functionsværdier og deres Differentser, saa findes:

$$(4) \ldots \left\{\begin{aligned}
\mathrm{i} &= \frac{1}{m}A + \frac{1}{m^3}C + \frac{1}{m^5}E + \ldots\\
\mathrm{ii} &= \frac{2}{m^2}B + \frac{2}{m^4}D + \frac{2}{m^6}F + \ldots\\
\mathrm{iii} &= \frac{6}{m^3}C + \frac{30}{m^5}E + \ldots\\
\mathrm{iv} &= \frac{24}{m^4}D + \frac{120}{m^6}F + \ldots\\
\mathrm{v} &= \frac{120}{m^5}E + \ldots\\
\mathrm{vi} &= \frac{720}{m^6}F + \ldots
\end{aligned}\right.$$

samt

$$\mathrm{I}_{,} = \mathrm{I} - \tfrac{1}{2}\mathrm{II} \quad \mathrm{II}_{,} = \mathrm{II} - \mathrm{III} \quad \mathrm{III}_{,} = \mathrm{III} - \tfrac{1}{2}\mathrm{IV} \quad \mathrm{IV}_{,} = \mathrm{IV} - \mathrm{V} \quad \mathrm{V}_{,} = \mathrm{V} - \tfrac{1}{2}\mathrm{VI}$$
$$\mathrm{I}' = \mathrm{I} + \tfrac{1}{2}\mathrm{II} \quad \mathrm{II}' = \mathrm{II} + \mathrm{III} \quad \mathrm{III}' = \mathrm{III} + \tfrac{1}{2}\mathrm{IV} \quad \mathrm{IV}' = \mathrm{IV} + \mathrm{V} \quad \mathrm{V}' = \mathrm{V} + \tfrac{1}{2}\mathrm{VI}$$

Substitueres (3) i (4), saa faaes:

$$(5) \ldots \left\{\begin{aligned}
\mathrm{i} &= \frac{1}{m}\mathrm{I} - \frac{m^2-1}{6m^3}\mathrm{III} + \frac{(m^2-1)(4m^2-1)}{120m^5}\mathrm{V} - \ldots\\
\mathrm{ii} &= \frac{1}{m^2}\mathrm{II} - \frac{m^2-1}{12m^4}\mathrm{IV} + \frac{(m^2-1)(4m^2-1)}{360m^6}\mathrm{V} - \ldots\\
\mathrm{iii} &= \frac{1}{m^3}\mathrm{III} - \frac{m^2-1}{4m^5}\mathrm{V} + \ldots\\
\mathrm{iv} &= \frac{1}{m^4}\mathrm{IV} - \frac{m^2-1}{6m^6}\mathrm{VI} + \ldots\\
\mathrm{v} &= \frac{1}{m^5}\mathrm{V} - \ldots\\
\mathrm{vi} &= \frac{1}{m^6}\mathrm{VI} - \ldots
\end{aligned}\right.$$

eller:

$$(6) \ldots \left\{\begin{aligned}
\mathrm{vi} &= \frac{1}{m^6}\mathrm{VI} - \ldots\\
\mathrm{v} &= \frac{1}{m^5}\mathrm{V} - \ldots\\
\mathrm{iv} &= \frac{1}{m^4}\mathrm{IV} - \frac{m^2-1}{6}\,\mathrm{vi} + \ldots\\
\mathrm{iii} &= \frac{1}{m^3}\mathrm{III} - \frac{m^2-1}{4}\,\mathrm{v} + \ldots\\
\mathrm{ii} &= \frac{1}{m^2}\mathrm{II} - \frac{m^2-1}{12}\left(\mathrm{iv} + \frac{m^2-4}{30}\mathrm{vi} - \ldots\right)\\
\mathrm{i} &= \frac{1}{m}\mathrm{I} - \frac{m^2-1}{6}\left(\mathrm{iii} + \frac{m^2-4}{20}\mathrm{v} - \ldots\right)
\end{aligned}\right.$$

Formlerne (5) eller (6) indeholde altsaa Opgavens Opløsning, og de ere tydeligen exacte, saa ofte VII, VIII, IX o. s. v. ere $= 0$.

Skal der interpoleres i Midten mellem de givne Functionsværdier, saa udføres Beregningen af de forskjellige Differentser efter følgende Formler, der erholdes ved i (6) at sætte $m = 2$.

$$(7) \ldots \left\{\begin{aligned} \mathrm{vi} &= \tfrac{1}{64}\,\mathrm{VI} \\ \mathrm{v} &= \tfrac{1}{32}\,\mathrm{V} \\ \mathrm{iv} &= \tfrac{1}{16}\,\mathrm{IV} - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{vi} \\ \mathrm{iii} &= \tfrac{1}{8}\,\mathrm{III} - \tfrac{3}{4}\,\mathrm{v} \\ \mathrm{ii} &= \tfrac{1}{4}\,(\mathrm{II} - \mathrm{iv}) \\ \mathrm{i} &= \tfrac{1}{2}\,(\mathrm{I} - \mathrm{iii}). \end{aligned}\right.$$

Exempel. Af de givne tidecimalige Logarithmer for 100, 102, 104, 106, 108, 110 og 112 at finde Log. for 103, 105, 107 og 109.

100	2,0000000000						
		+ 86001718					
102	0086001718		− 1670043				
		84331675		+ 63628			
104	0170333393		1606415		− 3571		
		82725260		60057		+ 267	
106	0253058653		1546358		3304		− 33
		81178902		56753		234	
108	0334237555		1489605		3070		
		79689297		53683			
110	0413926852		1435922				
		78253375					
112	0492180227						

Her er:

$\mathrm{vi} = -33 : 64 = -0{,}52.$ $\mathrm{v} = \dfrac{267 + 234}{2} : 32 = 7{,}80.$

$\mathrm{iv} = -3304 : 16 + 0{,}26 = -206{,}24.$ $\mathrm{iii} = \dfrac{60057 + 56753}{2} : 8 - \tfrac{3}{4} . 7{,}80$
$= 7294{,}77.$

$\mathrm{ii} = -(1546358 - 206{,}24) : 4 = -386537{,}94.$

$\mathrm{i} = (\dfrac{82725160 + 81178902}{2} - 7294{,}77) : 2 = 40972393{,}12.$

$\mathrm{v}_{,} = 7{,}80 - 0{,}26 = 7{,}54.$ $\mathrm{v}' = 7{,}80 + 0{,}26 = 8{,}06.$

$\mathrm{iii}_{,} = 7294{,}77 - 103{,}12 = 7191{,}65.$ $\mathrm{iii}' = 7294{,}77 + 103{,}12 = 7397{,}89.$

$\mathrm{i}_{,} = 40972393 - 193268{,}97 = 40779124{,}03.$ $\mathrm{i}' = 40972393 +$
$193268{,}97 = 41165661{,}97.$

Med disse Differentser fortsættes Regningen, udgaaende fra Log. 106, opad og nedad saaledes:

103	2,0128372247						
		+41961145,82					
104	0170333393		−401548,02				
		41559597,80		+7612,19			
105	0211892991		393935,83		−214,30		
		41165661,97		7397,89		+8,06	
106	0253058653		386537,94		206,24		−0,52
		40779124,03		7191,65		7,54	
107	0293837777		379346,29		198,70		
		40399777,74		6992,95			
108	0334237555		372353,34				
		40027424,40					
109	0374264979						

Altsaa overensstemmende med Vegas Thesaurus Logarithmorum.

Dersom kun $F_{-\frac{1}{2}}$ og $F_{+\frac{1}{2}}$ skal bestemmes, saa udføres Regningen lettere efter følgende, af (5) og (7) resulterende Formler:

$$(8)\begin{cases} \mathrm{I}_{,} = \frac{1}{8}\left((3\mathrm{I}_{,} + \mathrm{I}') - \frac{1}{16}(5\mathrm{III}_{,} + 3\mathrm{III}') + \frac{1}{128}(7\mathrm{V}_{,} + 5\mathrm{V}')\right) = \frac{1}{8}\left(\alpha - \frac{1}{16}\beta + \frac{1}{128}\gamma\right) \\ \mathrm{I}' = \frac{1}{8}\left((3\mathrm{I}' + \mathrm{I}_{,}) - \frac{1}{16}(5\mathrm{III}' + 3\mathrm{III}_{,}) + \frac{1}{128}(7\mathrm{V}' + 5\mathrm{V}_{,})\right) = \frac{1}{8}\left(\alpha' - \frac{1}{16}\beta' + \frac{1}{128}\gamma'\right). \end{cases}$$

Af de givne i det foregaaende Exempel erholdes saaledes:

$3\,\mathrm{I}_{,}$ =	248175780	$\mathrm{I}_{,}$ =	82725260
I' =	81178902	$3\,\mathrm{I}'$ =	243536706
$5\,\mathrm{III}_{,}$ =	300285	$3\,\mathrm{III}_{,}$ =	180171
$3\,\mathrm{III}'$ =	170259	$5\,\mathrm{III}'$ =	283765
$7\,\mathrm{V}_{,}$ =	1869	$5\,\mathrm{V}_{,}$ =	1335
$5\,\mathrm{V}'$ =	1170	$7\,\mathrm{V}'$ =	1638
α =	329354682	α' =	326261966
β =	470544	β' =	463936
γ =	3039	γ' =	2973
$\frac{1}{128}\gamma$ =	24	$\frac{1}{128}\gamma'$ =	23
$-\frac{1}{16}\beta$ =	−29409	$-\frac{1}{16}\beta'$ =	−28996
8	329325297	8	326232993
$\mathrm{I}_{,}$ =	41165662	I' =	40779124
Log. 106 =	2,0253058653	Log. 106 =	2,0253058653
Log. 105 =	2,0211892991.	Log. 107 =	2,0293837777.

Skal der interpoleres paa begge Sider af F, f. Ex. 5 Functionsværdier, saa at Intervallet mellem T_{-1} og T samt det mellem T og T_{+1} deles i 6 lige store Dele, saa er $m = 6$, og man har da at regne efter:

$$(9)\quad\ldots\quad\begin{cases}\mathrm{vi} = \frac{1}{46656}\,\mathrm{VI}\\ \mathrm{v} = \frac{1}{7776}\,\mathrm{V}\\ \mathrm{iv} = \frac{1}{1296}\,\mathrm{IV} - \frac{35}{6}\,\mathrm{vi}\\ \mathrm{iii} = \frac{1}{216}\,\mathrm{III} - \frac{35}{4}\,\mathrm{v}\\ \mathrm{ii} = \frac{1}{36}\,\mathrm{II} - \frac{35}{12}\left(\mathrm{iv} + \frac{16}{15}\,\mathrm{vi}\right)\\ \mathrm{i} = \frac{1}{6}\,\mathrm{I} - \frac{35}{6}\left(\mathrm{iii} + \frac{8}{5}\,\mathrm{v}\right).\end{cases}$$

Exempel. At interpolere Parallelgradens Længde for hvert tiende Minut, mellem 59° og 61° Bredde, naar dens Længde er bleven beregnet for hver Grad mellem 58° og 62°.

φ	g i n. Fod.			
58°	188452,55			
		−5282,57		
59	183169,98		−56,53	
		5339,10		+1,65
60	177830,88		54,88	
		5393,98		1,62
61	172436,90		53,26	
		5447,24		
62	166989,66			

Her er:

$$\mathrm{I}_{,} = -5339{,}10 \qquad\qquad \mathrm{II} = -54{,}88$$

$$\mathrm{I}' = -5393{,}98 \qquad \mathrm{ii} = \tfrac{1}{36}\,\mathrm{II} = -\ 1{,}5244$$

$$\mathrm{I} = -5366{,}54 \qquad\qquad \mathrm{III} = +\ 1{,}635$$

$$\tfrac{1}{6}\,\mathrm{I} = -\ 894{,}4233 \qquad \mathrm{iii} = \tfrac{1}{216}\,\mathrm{III} = +\ 0{,}0076.$$

$$-\tfrac{35}{6}\,\mathrm{iii} = \quad -0{,}0467$$

$$\mathrm{i} = -\ 894{,}47$$

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{ii} = -\quad 0{,}762$$

$$\mathrm{i}_{,} = -\ 893{,}708$$

$$\mathrm{i}' = -\ 895{,}232.$$

Altsaa:

59°	0′	183169,98			
			−885,968		
	10	182284,020		−1,564	
			887,532		+0,008
	20	181396,488		1,556	
			889,088		0,008
	30	180507,400		1,548	
			890,636		0,008
	40	179616,764		1,540	
			892,176		0,008
	50	178724,588		1,532	
			893,708		0,008
60	0	177830,88		1,524	
			895,232		0,008
	10	176935,648		1,516	
			896,748		0,008
	20	176038,900		1,508	
			898,256		0,008
	30	175140,644		1,500	
			899,756		0,008
	40	172240,888		1,492	
			901,248		0,008
	50	173339,640		1,484	
			902,732		
61	0	172436,90			

Uafhængigt af Differentserne kunne de successive Functionsværdier, med en ofte tilstrækkelig Nøjagtighed, beregnes efter Formelen:

$$F_{m \div n} = \pm F_m \mp nF_{m \div 1} \pm \frac{n(n-1)}{2} F_{m \div 2} \mp \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \, . \, 3} F_{m \div 3} \pm \ldots \mp nF_{m \div n-1},$$

hvor de øverste Fortegn gjælde for $n = 2k - 1$ og de underste for $n = 2k$, naar $k =$ helt Tal. Denne Formel er desto mere approximerende, jo større n tages. Saaledes erholdes, naar man i det første af de ovenstaaende Exempler tager $m = 103$ og $n = 6$, Log. $109 = 2{,}0374264981$.

Med Hensyn til Nøjagtighedsgraden af Interpolationsregninger er følgende Anmerkning af Vigtighed. Aldenstund Feilen i enkelte af de givne Functionsværdier muligens kan opgaa til en halv Enhed, saa kan muligens Feilen i enkelte af de første Differentser opgaa til en hel, i enkelte af de andre Diff. til 2 hele, i enkelte af de tredie til 4, o. s. v. Disse Feilstørrelser ere altsaa Grændseværdier, men som kun sjelden finde Sted, da Functionsværdiernes Feil i Regelen ere mindre end en halv Enhed, og desuden de derved opstaaede Feil i Differentsrækkerne ofte compensere hinanden. Feilene i de efter (6) beregnede mellemste Differentser blive, paa Grund af Divisioner med alt højere Potentser af m, alt mindre og mindre, men kan dog tydeligen, i enkelte af disse Differentser, opgaa til en halv Enhed. Derved forøges, i Regelen, Feilene i de øvrige, oven- og nedenom Horizontallinien F II IV VI successivt beregnede Differentser, alt mere jo større m er, og stundom saa betydeligt, at man tilsidst finder saadanne Værdier paa $F_{\;1}$ og F_{+1}, der med flere eller endogsaa mange Enheder afvige fra de givne, hvilket Resultat altsaa antyder Tilstedeværelsen af forholdsmæssige Feil i de interpolerede Functionsværdier. Det turde heraf være klart, at man, for at erholde disse rigtige til nærmeste Enhed, bør udføre Regningen med en à to Decimaler mere, end i de givne Functionsværdier. Dette er dog mindre fornødent, naar $m' = 2$ og der regnes enten efter den Gaussiske Formel, eller efter (8).

Meddelelser fra Universitetets kemiske Laboratorium.

Ved P. Waage.

I.

Om Bromets Opløselighed i Saltsyre.

Af Realkandidat S. Henrichsen.

(Hertil en Plade Kurver.)

(Meddelt i Mødet den 13de Oktbr. 1871.)

I Videnskabsselskabets Forhandlinger for Aaret 1869 Pag. 360 findes en Afhandling, der senere er optaget i Fresenius Zeitschrift für analytische Chemie, B. 10, Pag. 206, om en almindelig Anvendelse af Brom som Oxydationsmiddel. Da det i mange Tilfælde kan være af Interesse at vide, hvor bromrig en saadan oxyderende Opløsning, som man anvender, er, saa er i det følgende undersøgt, hvormeget Brom Saltsyre af forskjellig Styrke og ved forskjellige Temperaturer kan optage. Ved Hjælp af nedenanførte Tabel eller Kurver kan man altsaa, naar man har en Saltsyre af bekjendt Styrke og ryster denne med Brom ved en bestemt Temperatur, aflæse, hvor meget Brom den indeholder.

Undersøgelsen er udført paa følgende Maade. Ved Hjælp af ren Saltsyre paa 25 % tilberedtes Syrer af tilnærmelsesvis 3 %, 8 %, 15 % og 20 %. Styrken af samtlige disse Opløsninger bestemtes derpaa nøjagtig ved Hjælp af salpetersurt Sølvoxyd. Til disse Syreopløsninger sattes et Overskud af Brom, og Blandingen rystedes $\frac{1}{2}$—$\frac{3}{4}$ Time ved konstant Temperatur (1° C. — 15° C. — 25° C.). Saasnart Opløsningen kunde antages at være mættet med Brom, udtoges en Del af Opløsningen, som enten blev vejet eller maalt, og i sidste Tilfælde bestemtes Opløsningens Egenvægt. Den udtagne Prøve bragtes i en 150^{cc} Kolbe, som derpaa fyldtes til Mærket med Vand. I denne Opløsning titreredes den fri Brommængde med Jodkalium og undersvovlsyrligt Natron.

Iagttagelser.

Ved Fældning med salpetersurt Sølvoxyd fandtes Saltsyreopløsninger at indeholde:
2,97 % HCl, 7,63 % HCl, 14,88 % HCl, 19,86 % HCl og 24,82 % HCl.
Disse Syreopløsninger mættedes med Brom ved 15° C.; de herved erholdte Opløsninger havde følgende respektive Egenvægter:

1,068, 1,135, 1,250, 1,314 og 1,357.

Rent Vand	mættet	med Brom	ved	1° C.	har	Egenvægten	1,0290
—	—	—	—	15°	—	—	1,0224
—	—	—	—	25°	—	—	1,0210

Forsøg ved 1° C.

Vand	mættet	med Brom	indeholdt		3,98 %	Brom.
Saltsyre af	2,97 %	—	—	—	8,00 -	—
—	- 7,63 -	—	—	—	14,02 -	—
—	- 14,88 -	—	—	—	22,00 -	—
—	- 19,86 -	—	—	—	25,72 -	—
—	- 24,82 -	—	—	—	27,77 -	—

Forsøg ved 15° C.

Vand	mættet	med Brom	indeholdt		3,42 %	Brom.
Saltsyre af	2,97 %	—	—	—	7,16 -	—
—	- 7,63 -	—	—	—	12,68 -	—
—	- 14,88 -	—	—	—	19,55 -	—
—	- 19,86 -	—	—	—	22,81 -	—
—	- 24,82 -	—	—	—	24,82 -	—

Forsøg ved 25° C.

Vand	mættet	med Brom	indeholdt		3,12 %	Brom.
Saltsyre af	7,63 %	—	—	—	11,47 -	—
—	- 14,88 -	—	—	—	18,66 -	—
—	- 19,85 -	—	—	—	21,69 -	—
—	- 24,82 -	—	—	—	23,36 -	—

Ved Hjælp af disse Resultater ere vedføjede Kurver optrukne, og af disse er igjen følgende Tabel udledet.

	1° C.	5° C.	10° C.	15° C.	20° C.	25° C.
	Br.	Br.	Br.	Br.	Br.	Br.
Vand	3,98 %	3,80 %	3,62 %	3,42 %	3,25 %	3,12 %
5 % Saltsyre	10,68 -	10,27 -	9,80 -	9,40 -	9,05 -	8,75 -
10 - —	16,80 -	16,25 -	15,60 -	15,00 -	14,47 -	14,08 -
15 - —	22,12 -	21,35 -	20,50 -	19,76 -	19,12 -	18,60 -
20 - —	25,75 -	24,87 -	23,85 -	22,97 -	22,27 -	21,75 -
25 - —	27,87 -	26,86 -	25,75 -	24,82 -	24,05 -	23,45 -

II.

Nogle Forsøg med Succinimid.

Af Farmaceut **Dexrud.**

(Meddelt i Mødet den 24de Novbr. 1871.)

Den store Lethed, hvormed Vandstoffet i Succinimid lader sig erstatte af Metaller til krystallinske Forbindelser, vækker Formodning om, at dette Stof ogsaa i andre Retninger vil vise Reaktioner, der ere forskjellige fra de andre Amiders. Forat prøve denne Formodning er følgende Forsøg bleven anstillet med Succinimid og med Succinimidkviksølv.

En vandig Opløsning af Succinimid tilsattes i smaa Portioner Brom. Bromets Farve forsvandt, indtil der var tilsat 2 Atomer Brom paa hvert Molekyl Succinimid. Af Opløsningen erholdtes Krystaller, der havde Ravsyrens Smeltepunkt (180°) og øvrige Egenskaber. Reaktionen foregaar derfor sandsynligvis efter følgende Ligning:

$$C_4H_4O_2 . NH + 2Br + 3H_2O = C_4 H_4 O_2 H_2 O_2 + NH_4 OBr + HBr.$$

Brom og Iod viste lignende Virkning paa Succinimidkviksølv. Der dannedes Bromkviksølv og Iodkviksølv samt Ravsyre.

En alkoholisk Opløsning af Svovlkulstof indsmeltedes i Glasrør med Succinimidkviksølv og ophededes i 3 Dage til omtrent 80° C. Ved Rørets Aabning undveg Karbonylsulfid. Massen blev udtrukken med Alkohol, hvorved sort Svovlkviksølv blev uopløst, medens det alkoholiske Udtræk gav Krystaller af Succinimid (Smeltepunkt 122°). Reaktionen mellem Svovlkulstof og Kviksølvforbindelsen kan derfor fremstilles under Ligningen:

$(C_4 H_4 O_2)_2 N_2 Hg + H_2O + CS_2 = HgS + COS + 2(C_4 H_4 O_2 NH)$.

Succinimidkviksølv ophededes i lukket Glasrør med Svovlætyl. Ved Rørets Aabning undveg ingen Gas. I Massen fandtes Svovlkviksølv og Succinimid.

Tilsættes til en koncentrisk varm Sublimatopløsning en varm mættet Opløsning af Succinimid, saa udkrystalliserer ved Afkjøling smukke tavleformige Krystaller med rhombisk Gjennemsnit, der er let opløselige i Vand, tungt opløselige i Alkohol. Krystallerne har Sammensætningen:

$$2(C_4 H_4 O_2 N) Hg + Hg Cl_2.$$

To Analyser gav

	1.	2.	beregnet
C	14,2 %	14,4 %	14,4 %
H	1,3 -	1,29 -	1,2 -
N	4,4 -		4,2 -
Hg	62,0 -	60,06 -	59,9 -
Cl	10,3 -		10,6 -

Krystallerne vare vandfri og tabte ikke noget ved 120° C.

Dette er, saavidt vides, det første Exempel paa en Forbindelse af et metalholdigt Amid med en anden Metalforbindelse.

III.

Nogle Iagttagelser om Saltmængden i Kristianiafjordens Vand.

(Meddelt i Mødet den 8de Decbr. 1871.)

Enhver, som oftere har badet sig her ved Kristiania, vil have bemærket, at Vandets Saltrigdom kan variere i en meget betydelig Grad. Da jeg troede, at det kunde have Interesse at faa et nøjere Kjendskab saavel til Vandets absolute Saltmængde, som til disse Variationers virkelige Størrelse, saa benyttede jeg Anledningen til i afvigte Sommer, da jeg oftere rejste ud og ind

Fjorden, at optage Vandprøver ved forskjellige Dampskibsstoppesteder. Disse Vandprøver har jeg da senere undersøgt.

Prøverne ere, hvor intet angaaende Dybden er anført, alle tagne nøjagtig 1 Meter under Vandfladen. En med Bly belastet tom Flaske blev i en Snor sænket ned 1 Meter under Vandfladen, hvorpaa Proppen i samme ved Hjælp af en anden Snor med et raskt Ryk blev udtrukken.

Prøverne ere tagne fra Dampskibet, medens dette laa stille ved de respektive Stoppesteder. De ere saaledes tagne paa temmelig grundt Vand.

De Stoppesteder, hvorfra Prøver ere tagne, ere følgende: Holmen i Asker, Sandvigen, Snarøen, Huk og Pipervigen. Jeg har idethele taget 5 Rækker Prøver, saaledes at der hver Gang er taget Vand samme Dag fra samtlige Stoppesteder.

I samtlige 25 Vandprøver har jeg bestemt Egenvægten ved Hjælp af et meget fint Baudin's Araometer. Af de to sidste Rækker har jeg desuden ladet bestemme de faste Bestanddele i 1000^{cc} ved 100^{0} C.[1]

De gjorte Iagttagelser ere følgende:

	Holmen.	Sandvigen.	Snarøen.	Huk.	Piperviken.
	Egenvægt.				
1871 August 30te	1,0099	— 1,0093 —	1,0102	1,0101	1,0072
— 31te	1,0103	1,0090	1,0112	1,0098	1,0082
Sept. 4de	1,0118	1,0104	1,0111	1,0111	1,0100
— 12te	1,0110	1,0100	1,0119	1,0103	1,0117
	Gram.	Gram.	Gram.	Gram.	Gram.
Saltmængde paa 1000^{cc}	17,53	17,48	17,22	17,89	17,48
Sept. 21de	1,0168	1,0160	1,0195	1,0210	1,0214
Saltmængde paa 1000^{cc}	24,50	24,41	29,46	32,24	32,24

Da Egenvægttallene ikke give noget oversigtlig Udtryk for de forskjellige Saltmængder, saa har jeg ved Hjælp af Forholdet mellem de bestemte Saltmængder og Egenvægterne i de to sidste Rækker beregnet den sandsynligste Saltgehalt for samtlige observerede Egenvægter, idet jeg har multipliceret samtlige Egenvæg-

[1] Disse Bestemmelser ere udførte af Hr. Farmaceut Doxrud.

ters Decimalsifre med 1555. Dette Tal er nemlig Middeltallet af Forholdene mellem Saltmængderne og Decimalsifrene i de to sidste Rækker. Herved fremkomme følgende Tal:

	Holmen.	Sandvigen.	Snarøen.	Huk.	Piperviken.
Salte i 1 Liter.	Gram.	Gram.	Gram.	Gram.	Gram.
August 30te	15,39	14,44	15,86	15,71	11,19
— 31te	16,02	14,00	17,42	15,24	12,75
Septbr. 4de	18,35	16,17	17,26	17,26	15,55
— 17de	17,11	15,55	18,50	16,02	17,20
Middel	16,72	15,04	17,26	16,06	14,17
Sept. 21de —	26,12	24,88	30,32	32,65	33,28
Middel af samtlige Iagttagels.	18,60	17,01	19,87	19,37	17,99

Jeg har taget Midlerne af de 4 første Observationsrækker, da jeg tror, at disse er sandere Udtryk for Vandets normale Saltmængde paa disse Steder end Midlerne af samtlige Rækker.

Grunden til, at den sidste Række har givet en større Saltgehalt end de foregaaende, er den, at der i Tiden mellem næstsidste og sidste Observationsrække blæste en ualmindelig vedholdende Nordenvind. Herved er det færske Vand i Overfladen bleven drevet ud og fra Dybet erstattet med saltere. I Tiden mellem første og næstsidste Række var derimod Vejr- og Vindforholdene i Fjorden temmelig normale.

Forat faa en Forestilling om Vandets Saltrigdom i forskjellige Dyb i Fjorden benyttede jeg Anledningen til under et kort Ophold i Drøbak den 21 Oktbr. 1871 at tage Vandprøver fra følgende 4 Dybder.

Under Overfladen	2 Meter	28 Meter	58 Meter	80 Meter (= 2 Meter fra Bunden).
Egenvægt	1,0195	1,0253	1,0240	1,0258
Fundet Salte i 1000cc	27,01	34,16	32,72	34,72 Gram.

Sluttelig hidsættes en fuldstændigere Undersøgelse af Søvand fra Thorsøkilen ved Fredriksstad.

Vandets Egenvægt fandtes ved 15° C. 1,0110.

1) 105,95 Gram. Vand gav fældt med Klorbarium:
0,299 Gram. svovlsur Baryt.
202,20 Gram. Vand gav paa samme Maade:
0,576 Gram. svovlsur Baryt.
2) 50,55 Gram. Vand gav fældt med salpetersurt Sølvoxyd:
1,539 Gram. Klorsølv.
3) 303,3 Gram. Vand inddampedes til Tørhed, tilsattes Saltsyre og Bromvand og fældtes med Ammoniak; Bundfaldet vejede 0,004 Gr. Filtratet fældtes med oxalsurt Ammoniumoxyd, Bundfaldet vejedes som 0,3400 Gr. Kalk, og i Filtratet fældtes Magnesia med fosforsurt Natron. Ved Glødning af Bundfaldet erholdtes 0,2540 pyrofosforsurt Magnesia.

101,1 Gr. Vand inddampedes, tilsattes Baryt og filtreredes. Barytoverskuddet fældtes med Svovlsyre; ved Inddampning og Glødning erholdtes 1,413 Gr. svovlsur Alkalier. Heri fandtes 0,019 Gr. svovlsurt Kali.

101,1 Gram. Vand inddampedes til Tørhed, Residuet vejede 1,407 Gr. tørret ved 170° C.

Efter disse Data beregnes Vandets Sammensætning i 1000 Dele til:

Klornatrium	11,4900 Gr.
Svovlsurt Kali	0,1879 —
Klormagnesium	0,6942 —
Svovlsurt Magnesia	0,7319 —
Svovlsur Kalk	0,8167 —
Jernoxyd og Kiselsyre	0,0133 —
	13,9340 —
Direkte funden Sum	13,9180 —

I 1854 undersøgte Brødrene Strecker Søvand fra Sandefjord.[1] De fandt i dette temmelig nøjagtig den samme Saltmængde (13,9917). Derimod var Sandefjordsvandet noget rigere paa Magnesia og fattigere paa Kalk og Svovlsyre end Thorsøkilens Søvand.

[1] Das chem. Laboratorium, Universitätsprogram.

Om Lavoisier og den franske Chemi.

Af Th. Hiortdahl.

(Foredraget i Mødet den 24de Marts 1871.)

Er der i Videnskaben, hvor Frankrige dog har gjort saamange hæderlige Erobringer, noget Felt, hvoraf det især deleshed kan have Grund til at være stolt, saa er det først og fremst Chemien, hvis hele moderne Udvikling er grundlagt og befæstet der som intet andet Sted. Det er en let forstaaelig Følelse af Stolthed, som har bragt en af Frankriges første Chemikere (A. Wurtz) til at begynde sin histoire des doctrines chimiques (1868) med de Ord: „la chimie est une science française; elle fut constituée par Lavoisier d'immortelle mémoire". Men saameget berettiget der end er i denne Ytring, er den naturligvis ikke fri for Overdrivelse, og neppe skikket til at behage de tydske Chemikere, der sandelig ogsaa have arbeidet meget paa den i Frankrige grundlagte Bygning, og som senere mere end nogen anden har bygget videre. I Anledning af en Bemærkning af en tydsk Chemiker (Fittig) har Wurtz senere givet en Forklaring af disse Ytringer. hvorved de mistede deres mest saarende Braad.

Disse Ytringer af Wurtz sees imidlertid at have fremkaldt nogle senere Reklamationer fra tydsk Side; det er disse, som jeg i dette Foredrag vil forsøge at belyse. I Juliheftet f. f. A. af den af Professor Kolbe i Leipzig redigerede Journal für praktische Chemie findes der en Afhandling af Hr. Volhard, Professor i München, hvor Lavoisiers Adkomst til at kaldes Chemiens Grundlægger diskuteres og bestrides. Lavoisiers Betydning er saa almindelig kjendt og hans Navn af en saa stor Anseelse, at et Forsøg paa at forandre vore igjennem lange Tider ligesom rodfæstede Anskuelser derom maa antages at have saa megen Interesse, at jeg tør tillade mig nogle Øieblikke at henlede Selskabets Opmærksomhed derpaa.

Dette Arbeide er overskrevet: „Die Begründung der Chemie durch Lavoisier“. Havde Lavoisier været en Tydsker, mener Hr. Volhard, havde man sikkerlig forlængst søgt at faa hans Fortjenester af Chemien nygternt og upartisk bedømte; men han tilhørte en Nation, der holder sine store Mænd høit i Ære, og som i deres Forherligelse gaar maaske ligesaameget for vidt, som Tydskerne gjøre forlidet i saadan Retning. Han har desuden havt det Held at faa en Dumas[1] — en Sprogets og Fremstillingens næsten uopnaaede Mester — til Tolk for sine Bedrifter og sin sørgelige Skjæbne.[2] Af Dumas' poetiske Fremstilling — saa mener fremdeles Hr. Volhard — har udviklet sig et Slags Lavoisierkultus, som navnlig har fundet Udbredelse blandt de tydske Chemikere, og i tydske Lærebøger kaldes han jævnligen den videnskabelige Chemis Grundlægger.

Det er ikke vanskeligt at paavise det mindre korrekte i denne Fremstilling. Længe før Dumas udgav det Værk, hvortil her sigtes — leçons de philosophie chimique. 1837 — var i Tydskland og af tydske Videnskabsmænd Lavoisiers Betydning fastslaaet. Det er ikke mere end tre Aar efter Lavoisiers Død, at I. F. Gmelin i sin Geschichte der Chemie (1797—99. 3 Bd.) ved Inddelingen af Chemiens Historie i Tidsaldere opstiller som den sidste: Lavoisiers Tidsalder. Enhver, som kjender den, stundom lidt tørre, opregnende Maner, som er fulgt i dette for sin Tid mærkelige Værk, vil forbauses ved at se den Varme, hvormed Lavoisiers Liv og Skjæbne er skildret.[3] Scheele, Bergman og Priestley ere gjorte til Gjenstand for ligesaa udførlige Fremstillinger, men ingen af disse berømte Samtidiges Navne er her sat i Spidsen for den nye Tidsalder. Dernæst bør det heller ikke lades ubemærket, at flere Aar efter, at Dumas' leçons vare udkomne, blev

[1] En af Frankriges berømteste Chemikere, forhen Minister.
[2] Lavoisier blev guillotineret 1794, 51 Aar gammel.
[3] Tildels efter La Landes notices.

i Tydskland udgivet det lærdeste Værk over Chemiens Historie, som endnu fremdeles er Hovedværket i denne Retning: Kopps Geschichte der Chemie. 4 Bd. 1843—47. Dette Værk, som er berømt ved Nøiagtighed, Selvstændighed og historisk Objektivitet, er visseligen langt mere kjendt og læst i Tydskland end Dumas' leçons, og maa antages at have været Grundlaget for de i Lærebøgerne givne historiske Data. Det er saalangt fra, at man her finder nogen Slags Lavoisierkultus; Kopp omtaler endog flere Steder Lavoisier i haarde og bebreidende Udtryk, men han giver ham, hvad hans er, og tildeler ham utvetydigen og villigen en Betydning som ingen anden. Endnu Aaret efter, at Wurtz's Arbeide var udkommen, har man i Tydskland faaet et nyt historisk Arbeide (Entwickelungsgeschichte der Chemie v. Ladenburg, 1869), hvor det i Forordet heder: „Dabei bin ich nur bis Lavoisier zurückgegangen, weil durch diesen Forscher unsere Wissenschaft eine neue Gestalt angenommen hat, und weil man behaupten kann, dass wir noch heute in den durch ihn begonnen Entwickelungsepoche begriffen sind."

Det er altsaa ikke gjennem nogen af Dumas indstiftet Lavoisierkultus, men fuldt saa meget gjennem tydske Chemikeres Arbeider, at den Opfatning forlængst er godkjendt, at Lavoisier har grundlagt den nyere Chemi.

Før vi gaa ind paa de Dele af Hr. Volhards Fremstilling, som det maatte være nødvendigt at underkaste en kort Analyse, maa vi dvæle et Øieblik ved et andet Emne, ikke fordi det er af nogen Vigtighed for det foreliggende Spørgsmaal, men fordi Hr. Volhard har draget det frem. Enhver, der begynder at befatte sig med Chemiens Historie, bliver paa det pinligste overrasket — siger han — ved i Kopps Værk at finde det paavist, at Lavoisier — for hvem vi fra den første Undervisning modtage fast ubegrændset Ærefrygt — har tilegnet sig en hel Række af Opdagelser, der tilhøre Andre. Ere disse Indgreb i fremmed Eiendom — slutter Hr. Volhard — ikke ligesaa mange Beviser paa manglende Evne til selv at præstere noget?

Det vilde føre for vidt her at gaa nærmere ind paa de af

Chemikerne forlængst kjendte Forhold, hvortil her sigtes; at de ikke ere vel skikkede til at benyttes saaledes, som Hr. Volhard har gjort, vil imidlertid være klart, naar man ser, hvorledes Kopp selv har opfattet dem.

„Mit vieler Härte," siger denne lærde Historieskriver (Gesch. I. 302) „ist gegen Lavoisier dieses, anscheinend manchmal geflissentliche, Ignoriren der Verdienste Anderer hervorgehoben worden; lässt sich sein Verfahren gleich nicht ganz rechtfertigen, so muss doch zu einer richtigen Würdigung der Verhältnisse hervorgehoben werden, dass die meisten der von ihm verschwiegenen Arbeiten Anderer, deren Resultate mit den seinigen übereinstimmen und vor diesen die Priorität haben, nur einzelne, abgerissene Thatsachen behandlen, während Lavoisiers Arbeiten alle unter sich in nothwendigsten Zusammenhange stehen, und diejenige seiner Untersuchungen, wobei er ganz selbständig die wichtigsten Wahrheiten fand, ihn auch sicher zu den einzelnen Entdeckungen führen mussten, welche bereits Einige vor ihm anticipirt hatten."

Og det kan i Sandhed for dem, der kjende Gangen i Lavoisiers Arbeider, neppe være tvivlsomt, at Konsekventserne af dem vilde have ført ham til flere af de Opdagelser, som andre Chemikere kom ham i Forkjøbet med. Ogsaa Hr. Ladenburg har nylig (Entwickelungsgeschichte p. 25) udtalt samme Tanke.

Dette, mener Hr. Volhard, er umuligt; Lavoisier kunde aldrig selv opdage Noget, hans Fremskridt ere ganske afhængige af hans berømte Samtidiges Opdagelser; han var nemlig ikke Chemiker, hans Tanker ere aldrig chemiske, men physikalske. Denne Sætning søger Hr. Volhard at bevise ved en Sammenligning mellem Lavoisier og Scheele, den mest berømte af hans Samtidige.

Scheele levede i smaa Kaar og under tarvelige Forholde i en liden svensk By, men forbausede Verden ved den ene klassiske Undersøgelse efter den anden, over hele Chemiens Omraade, overalt opklarende og opdagende nye Legemer som ingen Anden; men trods alle sine Opdagelser har han kun øvet en mindre Indflydelse paa selve Videnskaben. Og Lavoisier, der levede i glimrende ydre Forhold og udrustet med alle Hjælpemidler, men til hvis Navn dog ikke knytter sig Opdagelsen af noget nyt Legeme eller nogen ny Fremstilling af et chemisk Præparat, eller nogen charakteristisk Reaktion, — han har øvet en umaadelig Indflydelse paa Videnskabens Udvikling. Hvem raader denne Gaade?

Lavoisiers første chemiske Arbeide — om Vandets Forvandling til Jord — har ogsaa været Gjenstand for et Arbeide af Scheele, og disse to Afhandlinger har man oftere stillet sammen for at forstaa Forskjellen mellem de to Mestere; en saadan Sammenligning er det nu, som danner Udgangspunktet i Hr. Volhards Fremstilling.

Naar Vand — selv om det er ganske rent — længere Tid koges i Glaskar, bliver det grumset, og ved Afdampning efterlader det en jordartet Rest. Dette var bleven kaldet Vandets Forvandling til Jord. Baade Lavoisier og Scheele kom til det Resultat, at noget af Glassets Substants optages af Vandet, men den Vei, de gik, var forskjellig.

Lavoisier kogte en afveiet Mængde Vand i et ligeledes veiet Glaskar. Glasset minkede i Vægt ligesaameget, som den erholdte jordartede Rest veiede. Herved var bevist, at denne før havde været en Bestanddel af Glasset. Hvad dens Natur forøvrigt angik, maatte han indrømme, at hans Forsøg dermed vare ufuldstændige; det var ham paafaldende, at den var tungt smeltelig, medens selve Glasset jo er en letsmeltelig Substants.

Scheele derimod kogte noget Vand i en liden Glaskolbe, og da Forsøget var færdigt, lod han det udskilte Grums sætte sig af; saavel dette som den klare Vædske behandledes med Reagentser, hvorved paavistes Kiselsyre, Alkalier og lidt Kalk; da disse Stoffe netop indeholdes i Glas, sluttede han, at Vandet ved fortsat Kogning kan decomponere Glasset.

Lavoisier optræder — siger nu Hr. Volhard — ligeoverfor det Phænomen, der skal forklares, ikke som Chemiker; saasnart den chemiske Del af Opgaven begynder, ophører hans Evne; han kan ikke faa den jordartede Rest til at tale, han kan ikke stille noget Spørgsmaal til den.

Skal man i Nutidens chemiske Sprog forklare Forskjellen mellem Gangen i disse Undersøgelser, kan man sige, at Lavoisier ikke har udført nogen kvalitativ Analyse, hvilket derimod Scheele har gjort, og det paa en for den Tid særdeles elegant Maade, men at han har udført en kvantitativ Bestemmelse. Naar man vil bedømme disse Forsøg, bør man tage Hensyn til, at Lavoisier i den historiske Indledning, han som sædvanligt forudskikker sin Afhandling, ved Gjengivelsen af de tidligere Forsøg allerede var kommen ind paa den Tanke, at Glasset kunde „de sa propre substance" have afgivet denne Jord (oeuvres. II. 6); aldenstund han iforveien havde en Formodning om den kvalitative Side af Sagen, om at selve Glassets Substants blev afgivet til Vandet, maatte netop den af ham anvendte kvantitative Methode være den mest afgjørende. Det var først flere Aar senere, og efterat Lavoisiers Arbeide var blevet bestridt af andre Chemikere, at Scheele gav sig ifærd med denne Sag; intet er da rimeligere, end at han valgte en anden Methode. Man kunde endnu tilføie, at uden Lavoisiers Arbeide vilde Scheeles Analyse ikke være nok til at afgjøre Sagen fuldstændigt, da Kiselsyre, som Scheele paaviste, ikke alene er en Bestanddel af Glas, men tillige netop er en vigtig Bestanddel af de saakaldte jordartede Legemer.

Efterat Hr. Volhard ved denne Sammenligning[1] har søgt at begrunde sin Paastand, at Lavoisier ikke var Chemiker, fortsætter han omtrent saaledes: Men selv om man ikke kan tilskrive Lavoisier nogen fremragende Begavelse og Kundskaber som Chemiker, saa har han maaske i Videnskaben indført Ideer, som vare nye og af saadan Vigtighed, at man derfor skulde kunne kalde ham Chemiens Grundlægger?

Den phlogistiske Hypothese omfattede kun den kvalitative Side af Forbrændingsprocessen; Stahl forsøgte ikke paa at forklare, at Metallerne tiltage i Vægt ved at ophedes i Luften. Man har heraf villet udlede, mener Hr. Volhard, at Vægten paa den Tid blev betragtet som en uvæsentlig og foranderlig Egenskab

[1] En saadan Sammenstilling af de to omtalte Arbeider er ogsaa nylig gjort af Hr. Ladenburg (p. 23—24), som dog lægger Vægten paa ganske andre Sider af Forsøgene.

hos Materien, og Dumas betegner det som en Hovedfortjeneste af Lavoisier, at han har indført den kvantitative Methode i Chemien; fra Dumas skulde denne Mening atter og atter gaa igjen i alle de historiske Omrids, der gjerne forudskikkedes Lærebøger i Chemi. [1]

Det er i Sandhed et overflødigt Arbeide, naar Volhard dernæst gjennem endel anførte Steder søger at vise, at der ogsaa før Lavoisiers Tid mangfoldige Gange var taget Hensyn til Legemernes Vægt, at de phlogistiske Chemikere ofte anføre de anvendte Vægtmængder, og at de endog saavidt muligt have udført kvantitative Analyser.

Thi der er ingen, som tvivler paa dette, eller som tror, at Lavoisier var den første, der anvendte Vægten i Chemiens Tjeneste.

Det er ikke herom, at der handles.

Men Tingen er, som bekjendt, den, at Lavoisier var den første, der opfattede Vægtmængden, den kvantitative Side, som noget aldeles kapitalt, som en conditio sine qua non, uden hvilken fuldstændig Forklaring af de chemiske Processer ikke var at finde. Og dette gaar som den røde Traad gjennem alle hans Arbeider; der findes neppe et af disse Arbeider, hvor ikke Veininger — og hvilke Veininger! Bestemmelser af en hos Chemikeren neppe før seet Nøiagtighed — spiller en væsentlig Rolle. Og fra Begyndelsen og til Enden har dette Princip været ledende for Lavoisier, som for Ingen før ham; mærkeligt nok, at han allerede i sit første Arbeide — det oven nævnte om Vandets Forvandling til Jord — beskriver en Vægt, som han til chemisk Brug har ladet konstruere, og som i Nøiagtighed staar langt over, hvad man før pleiede at bruge. Ligefra hans første Arbeide, ligefra hans første Ungdom, har den Tanke fæstet Rod hos ham, at nøiagtige Vægtbestemmelser ikke blot vare nødvendige, men af alleryderste Vigtighed for Chemien, eller at man — som Kopp etsteds siger — maatte indføre i Chemien de allerede nogen Tid i Physiken bekjendte nøiagtigere experimentelle Methoder.

[1] Man bør erindre, at ogsaa Kopp heri ser en af de væsentligste Sider af Lavoisiers Reform af Chemien.

Derfra denne Sophisme, som Hr. Volhard atter og atter stiller paa Spidsen: Lavoisier kan vel have været Physiker, men han var ikke Chemiker. Sagen er, at han var ikke nogen phlogistisk Chemiker, thi han var den første antiphlogistiske; derfor hans Retning og Arbeidsmethoder i visse Stykker forskjellig fra Forgjængernes og de Samtidiges.

Den nu følgende Del af Hr. Volhards Afhandling er en historisk Exposé, hvor han nærmere udvikler, hvorfor Stahl og Phlogistikerne maatte betragte Vægtsforøgelsen som uvæsentlig for Forklaringen af Forbrændingen, samt yderligere paaviser, at de ældre Chemikere nok anvendte Vægten, men at den Tids Kundskaber endnu ikke vare tilstrækkelige for virkelige kvantitative Bestemmelser af de fleste sammensatte Legemers Bestanddele, og heller ikke vare saa udviklede, at disse kvantitative Bestemmelser kunde forekomme Chemikere af nogen særdeles Vigtighed. Der fremstilles videre, hvorledes Lavoisiers Opfatning afhænger af en Række Forestillinger, som udviklede sig i Løbet af det 18de Aarhundrede, navnlig ved Blacks Arbeider, og hvorledes især de ved disse Arbeider indledede rigtigere Forestillinger om Varmens Natur her vare til største Veiledning. Det betones stærkt, at den phlogistiske Chemi har fremskaffet det hele Materiale, baade det chemiske og physikalske, og at det har været Lavoisiers, den ved udmærkede physikalske og mathematiske Kundskaber udrustede Lavoisiers, Fortjeneste at bringe de saaledes udviklede Forestillinger til fuld Gyldighed i Chemien, men at han ingen nye har tilføiet.

Her ser man atter det samme Mistag, der gaar gjennem hele dette Arbeide. Det er ganske vist saa, at Phlogistikerne havde samlet det Materiale, hvoraf Lavoisiers Lærebygning er opstaaet. De have først erkjendt Sammenhængen mellem de mange og tilsyneladende forskjelligartede Phænomener, der alle bero paa Forbrænding. De have endvidere leveret et stort og værdifuldt Materiale, men dette bestaar i enkelte Kjendsgjerninger og i enkelte Opdagelser, som hver for sig kunne være af høit Værd; men som ikke kunne bringe Videnskaben noget frem; de kunde ikke ved den da herskende chemiske Opfatning forenes og samles til en Sum: under Paavirkningen af de ældre Anskuelser bleve de en livløs og død Ophoben af Stof. Phlogistikerne kunde — hvad ogsaa Hr. Volhard har paavist — aldrig komme længere; selv de, der først fik holde Nøglen til Gaaden i sin Haand, Priestley og selv Scheele kunde ikke løse den, da deres Opfatning ligefrem stod dem i Veien. Og nu er det Lavoisiers ubestridte Fortjeneste at have indblæst Liv i den døde Masse, at have samlet alle de spredte og isolerede Kjendsgjerninger til en ny Opfatning, som kunde blive frugtbar, og som blev saa frugtbar, som neppe nogen Mands Gjerning har været for Videnskaben. Det var ved at indføre et physikalsk Princip — det kvantitative — i Chemien, at dette blev muligt; her maatte en ny Faktor ind, og ganske naturligt er det da, at Lavoisier maatte rette sin meste Opmærksomhed paa denne, for at den med fuld Kraft kunde løse Opgaven. Det er denne Lavoisiers særegne Retning — ganske vist forskjellig fra den mere rent chemiske, hvori Flertallet af Phlogistikerne arbeidede, men som var uomgjængelig nødvendig for den rigtige Udvikling af Chemien, — Hr. Volhard hele Tiden tænker paa, naar han saa gjentagende betoner, at Lavoisier ikke var Chemiker.

Intet Fremskridt i Videnskaben er nogensinde aldeles uafhængigt af Videnskabens tidligere Standpunkt. Men fra den Omstændighed, der saa stærkt er fremholdt, at Phlogistikerne have leveret Materialet til den nye Lære, kan ikke drages den Slutning, at denne har udviklet sig umiddelbart af hin; thi dertil ere begge altfor grundforskjellige.

I den følgende Del af sin Afhandling gaar Hr. Volhard nærmere ind paa Lavoisiers Arbeider om Forbrændingsprocessen. Anlægget i denne anden Del er ganske det samme som i den første Del af Afhandlingen: der begyndes med at mistænkeliggjøre Lavoisier i Læserens Øine, og dernæst gjentages dette præterea censeo: han var ingen Chemiker.

Priestley havde fundet, at naar Metaller ophedes i et vist

Volum Luft, vil dette mindske, og at Metallet ikke kan lide nogen videre Forandring i den Luft, der bliver tilbage efter Formindskelsen.

Lavoisier indsaa, at Luftens Formindskelse maatte hidrøre derfra, at en Bestanddel af den fixeredes paa Metallet, og at dette maatte tiltage i Vægt saameget som Vægten af den absorberede Luft udgjorde. Han har i denne Retning anstillet mange Forsøg, der dels ere mere udførte Gjentagelser af Priestleys, og dels ere originale.

Det er navnlig de Forsøg, der skulle vise Metallernes Vægtsforøgelse og Luftens Absorption, som Hr. Volhard gjør til Gjenstand for Kritik. Lavoisier gik frem omtrent paa samme Maade som Priestley; han indbragte en veiet Mængde Metal (Bly eller Tin) i en Glasklokke, hvor Luften var afspærret ved Vand eller Kviksølv. Metallet ophededes ved et Brændglas, Luftens Rumformindskelse iagttoges ved at aflæse, hvor høit Vædsken var steget i Klokken, og Metallet veiedes efter Forsøgets Slutning. Denne Vægtsbestemmelse var det ikke altid muligt at udføre med Nøiagtighed, da endel af det dannede Metaloxyd afsatte sig rundt omkring i Klokken og ikke let lod sig samle sammen til en nøiagtig Veining. Imidlertid slutter Lavoisier af sine Forsøg, 1) at naar en vis Mængde Metal er forkalket (oxyderet) i en vis Mængde Luft, er denne ikke længere tjenlig til Fortsættelse af Forkalkningen, — samt at 2) eftersom Forkalkningen fuldendes, minker Luften, og den minker omtrent i samme Forhold som Metallerne tiltage i Vægt. Han sluttede fremdeles, 3) at under Forkalkningen en Gas optages af Metallet, og at denne Optagen er Aarsag i Vægtsforøgelsen; og han ledede endvidere hen paa den Tanke, at 4) ikke hele Luften er skikket til paa denne Maade at optages, men at det sandsynligvis kun er en bestemt Del, der optages; naar denne er udtømt, ophører Forkalkningen.

Naar man sammenligner disse Slutninger med de Forsøg, hvoraf de angivelig ere udledede, siger Hr. Volhard, som charakteriserer Forsøgene som en eneste tilnærmet Overensstemmelse i en Række modstridende Experimenter, — ser man øieblikkelig, at disse Slutninger ikke ere udledede af disse Forsøg, men at de ere udledede af Priestleys.

Den eiendommelige Maade, hvorpaa Hr. Volhard her argumenterer, er baseret paa en mindre korrekt Gjengivelse af Lavoisiers Forsøg. Det vil være tilstrækkeligt at stille ved Siden af hinanden Hr. Volhards Angivelser og Lavoisiers egne.

	Absorberet Luft.	Metallets Vægtsforandring efter Hr. Volhards Angivelser.	Metallets Vægtsforandring efter Lavoisiers egne Iagttagelser.
1ste Forsøg	7 Kub. Tommer.	$\frac{1}{2}$ Gr. Aftagen.	Blyet havde aftaget $\frac{1}{2}$ Gram; men det var klart nok, naar man saa den gule Udblomstring, der bedækkede Klokken, at Formindskelsen kom af en Fordampning, og at Metallet havde — naar Hensyn hertil toges — *tiltaget flere Gr.*
2det Forsøg	. . . . . .	omt. $\frac{1}{8}$ Gr. Tiltagen.	Omtr. $\frac{1}{8}$ Gr. Tiltagen.
3die Forsøg	5—6 Kub. "	4 Gr. Aftagen.	Metallet aftog 4 Gr.; det saa ud til, at man kunde have fundet *disse og endnu mere til* i den sublimerede Del.
4de Forsøg	$3\frac{3}{4}$ Kub. "	$1\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$ Gr. Tiltagen	$1\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=2\frac{1}{2}$ Gr. Tiltagen.

Lavoisier havde altsaa i de 3 Forsøg, som lykkedes (No. 1, 3, 4), fundet Tiltagen i Vægt — at denne ikke altid lod sig nøiagtig bestemme, er før forklaret —, medens Hr. Volhard fremstiller det, som om en Aftagen var iagttaget i No. 1 og 3, og som om No. 4 var det eneste, der viste Vægtsforøgelse. Hertil kommer, at Lavoisier udtrykkelig siger, at han drager de ovennævnte

Slutninger ikke blot af disse Forsøg, men tillige af dem, der skulle beskrives i det niende Kapitel; de der beskrevne Forsøg omhandlede Phosphorets Forbrænding og indrømmes af Hr. Volhard selv at være mere overbevisende.

Man ser, at naar Hensyn tages til disse Berigtigelser, kan der ikke være noget i Veien for, at Lavoisier kunde drage de oven anførte Slutninger.

Kort Tid efter lykkedes det Lavoisier ved et kapitalt Forsøg — Tinnets Ophedning i lukkede Kar, af alle hans Forsøg det vigtigste, mener Hr. Volhard, og man kan trygt sige, et af de vigtigste Forsøg, der nogensinde ere anstillede — med slaaende Klarhed at bevise, at Forbrændingen bestaar i Legemernes Optagen af Luften, at Legemerne efter Forbrændingen have tiltaget netop ligesaa meget, som Luften har aftaget i Vægt.

Men hvilken Luft, hvilken Del af Luften eller hvilken Slags Luft er det, som forbinder sig med det brændbare Legeme? Lavoisiers Anskuelser om dette Punkt vise, hvorlidet han forstaar at tænke chemisk, mener Hr. Volhard; han troede nemlig, at det var den fixe Luft (Kulsyren, som vi kalde den), der var Forbrænderen. Hensyn til denne Gasarts chemiske Egenskaber burde strax have vist ham, hvor umulig hans Formodning var; man ser, at Lavoisiers Ubehjælpelighed at operere med chemiske Begreber her strax hjælper ham over en Vanskelighed.

Den Vildfarelse, som Lavoisier her uheldig begik, er, som Alverden ved, overmaade let forklarlig. Dels var Kulsyren den eneste dengang kjendte Gas, der kunde optages af andre Legemer; dels var et tidligere af Lavoisier selv anstillet Forsøg — saa korrekt det end var — virkelig af den Beskaffenhed, at det let kunde bringe ham paa denne Afvei. Ved at reducere Blyoxyd til metallisk Bly ved Kul havde nemlig Lavoisier fundet, at der udvikledes en Gas, som viste sig at være Kulsyre; han sluttede, at den Gas, der gik bort fra Oxydet ved dets Overgang til Metal, var den samme, som Metallet optog i sig ved Oxydationen; en Slutning, som dengang, da han endnu ikke havde fundet Kulsyrens Sammensætning, var høist naturlig.

Men Hr. Volhard har ogsaa her lagt Vægten paa det mindre væsentlige. Det Store i Sagen er, at Lavoisier ved dette Forsøg — Tinnets Ophedning i lukkede Kar — har for første Gang her, saa klart og fyldestgjørende som muligt kan bevises, godtgjort, at Forbrændingen er en chemisk Forbindelse af den Art, at Legemet optager et andet Legeme (Luften) i sig; kan vel dette berettes klarere, end derved, at Tinnet efter Forbrændingen netop havde tiltaget saa meget i Vægt, som Luften havde minket? Dette Forsøg er nyt, uagtet det forlængst var udført af Boyle; thi derved ere de nye Principer fastslaaede. Og disse nye Principer ere i den Grad trængte ind i Chemien og have i den Grad rammet Spørgsmaalets Kjærne, at vi endnu den Dag idag ikke kunne tænke chemisk, ikke kunne klargjøre os en chemisk Proces, uden ved at gaa frem netop paa samme Maade, som Lavoisier har anvendt. I den her første Gang med fuld Klarhed paaviste Kjendsgjerning, at de virkende Mængder før og efter den chemiske Proces ere uforandrede, men at en Del af det ene Legeme er optaget af det andet, ligger Spiren til de Ligninger, som Chemikerne i vore Dage altid anse som uomgjængelig nødvendige til fuld Forklaring af enhver chemisk Proces. Et Forsøg, hvormed et saadant nyt befrugtende Princip er indbragt i Videnskaben, er den store Ting, det er den store Ting fremfor denne eller hin enkelte nye Opdagelse; Forbrændingens Natur paa denne Maade engang uomstødeligt fastslaaet, var det nemlig forholdsvis let ved videre Forsøg at bestemme den Gasarts chemiske Natur, som spillede Hovedrollen ved Forbrændingen. Den Vildfarelse, som Lavoisier kom ind paa ved denne videre Betragtning, er, som oven vist, let forklarlig, og han blev heller ikke længe i den.

Herved er virkelig allerede Hovedprincipet for Forbrændingen — og derved som bekjendt alle chemiske Processers — opstillet; Retningen, hvori Chemien fremtidig skulde udvikle sig, var nu angivet. Det næste Skridt, at finde den virkelige Forbrænder, maatte nu nødvendigen komme, men kunde blot tjene til at gjøre den alt dragne Fure dybere og skarpere. Eller, det var det opstillede Hovedprincip, som var det nye og store; Surstoffets

Opdagelse, som nu kom, var kun en nødvendig Konsekventse, tjente kun til at precisere den vundne Opfatning. Det er saaledes fremdeles misforstaaet af Hr. Volhard, naar han her fortsætter: Saalangt er Udviklingen af Lavoisiers Forestillinger ganske fri for chemiske Tanker; nu først begynder den chemiske Opgave, nemlig at finde Surstoffet.

Det er her, at Hr. Volhard benægter Muligheden af — hvad ellers almindelig antages — at Lavoisier selv ved sine Forsøg maatte have opdaget Surstoffet, som alle hans Arbeider nu pege lige imod. „De andre Forskere, Priestley og Hales, rettede chemiske Spørgsmaale til de Gasarter, de undersøgte: kan Du underholde Forbrændingen? eller: kan Du selv brænde? men Lavoisier blot veier og maaler dem, og derved opdager man intet nyt Legeme."

Priestley opdagede Surstoffet; men Lavoisier forstod bedre at vurdere denne Opdagelse; Surstoffets Egenskaber gjorde alt klart for ham: her var Forbrænderen fundet. Og dermed var Hovedtrækkene af Lavoisiers System færdigt: Forbrændingen er et Legemes Forbindelse ved Surstof. De videre Arbeider ere kun Oversættelser af Andres, især Priestleys, Undersøgelser fra Phlogistertheoriens Sprog til Oxydationstheoriens. Man maa beundre, fortsætter Hr. Volhard, Lavoisiers Klarhed og Konsekvents og altid anse ham som en af de genialeste og aandrigeste Forskere, men aldrig viser han sig produktiv som Chemiker; vi finde hos ham ingen nye chemiske Tanker, ingen nye chemiske Methoder.

Kjendskab til Surstoffets chemiske Egenskaber, saa er Slutningen af Hr. Volhards Afhandling, er Oxydationstheoriens chemiske Grundlag. Uden dette var Lavoisiers Forestillinger om Forbrændingsprocessen forsvunden ligesaa sporløst som Rey, Hooke og Mayows. Efter Princip og Materiale er saaledes Oxydationstheorien en Frugt af den phlogistiske. I det 18de Aarhundrede opsamledes de fornødne chemiske og physikalske Erfaringer, og de havde udviklet sig saavidt, at der til dens Forstaaelse ikke udfordredes nogen fremragende Begavelse, men kun en klar Aand, der er uhildet af den herskende Laugsfordom. Derved kunde det, som blev skjult for selve Mesteren, hvis hele Tanke beherskedes af Phlogistikertheorien, blive klart for en Dilettants[1] uhildede Blik.

Det Resultat, hvortil Hr. Volhard er kommet, kan kun naaes ved den særegne Maade, hvorpaa han forestiller sig en Chemikers Opgave og Gjerning. Det pointeres gjentagende, at Lavoisier ikke har været produktiv som Chemiker, at han ikke har opdaget nye Stoffe, nye Methoder o. s. v., saa man skulde tro, at Chemiens Maal var alene dette. Der tales gjentagende om, at Lavoisier ikke forstod at tænke chemisk, at han ikke havde Blik for den kvalitative Side, men blot veiede og maalte. Og det, at han har bragt visse Principer til almindelig Gyldighed i Chemien, bliver kun nævnt som noget underordnet; medens derimod det fremhæves, at, engang Sagen erkjendt, det øvrige Arbeide kun var en Slags Oversættelse af tidligere Undersøgelser, hvorfor han maa dele Æren for sit Værk med alle disse Medarbeidere. Det store Faktum, som ikke kan benægtes, bliver fremstillet som en Opfatning, der netop laa for en Dilettant.

Det er kun gjennem en saadan stadig Fremhæven af de mindre væsentlige Ting og en Tilbageholden af de væsentlige, at Hr. Volhard er kommen til sit Resultat; men de enkelte nye Opdagelser, den enkelte Paavisning af dette eller hint nye Stof er det mindre væsentlige ved Chemikerens Gjerning; det er den gjennem disse erhvervede Erkjendelse, Faststillelsen af visse Principer, som er det Væsentlige: — i Chemien, som overalt ellers, er Maalet større end Midlerne. Og Lavoisiers Fortjeneste — den at have givet Chemien en saadan Erkjendelse — er saa stor og har været saa frugtbar, at han — selv om han ikke ved personlige Iagttagelser havde bidraget det mindste, selv om han ikke havde udført sine mange og omhyggelige Undersøgelser — altid maa nævnes som Grundlægger af den Chemi, som vi endnu den Dag idag arbeide i.

[1] Den Opfatning, at Lavoisier kun var en Dilettant, udtales ogsaa et andet Sted i Hr. Volhards Afhandling, hvor han skildres som en Generalforpagter, der i ledige Timer syslede med Naturvidenskaben. De bindstærke Afhandlinger og yderst vidtløftige Forsøg skulde være tilblevne kun i ledige Timer!

Der er meget i denne Lavoisier-Affaire, som har noget tilfælles med en anden Strid i en anden Videnskab, endel Aartier senere; det er Champollions Opdagelse af Læsningen af de ægyptiske Monumenter. Men nu er det almindelig erkjendt: Champollion læste ikke de første Hieroglypher, det var Young. Men alligevel nævnes Champollion ubestridt af Alle som den ægyptiske Historieforsknings Fader; den enkelte Opdagelse var forbleven død i Youngs Hænder; det var først Champollion, som fik de gamle Monumenter til at fortælle. Ligesaavist som det var ham, der først fandt Nøglen til denne tusindaarige Gaade, ligesaavist var det Lavoisier, der gav os Nøglen til den ældste Gaade: „hvad er Ilden“?

Derfor er aldrig nogen af de Forskere, som læste de første af denne Gaades Hieroglypher, Scheele, Priestley og de andre store Samtidige, nogensinde nævnt som den chemiske Videnskabs Fader; men denne Ære er altid og hidtil ubestridt bleven Lavoisier tildel. Og det er ikke noget fransk Paafund: den rette Opfatning af Lavoisiers Fortjeneste er strax trængt igjennem og blev maaske først udtalt i Tydskland. Allerede 3 Aar efter hans Død stod den Sag saa klar, at i Gmelins Historie opstilledes Lavoisiers Tidsalder: og som virkende i denne nævnes alle de andre berømte Medarbeidere.

Dette, at grundlægge den chemiske Videnskab paa en ny Basis, blev Lavoisier muligt alene derved, at han indbragte det physikalske Begreb, det Kvantitative, i Chemien. Derved gav han denne Videnskab en Klarhed og en Sikkerhed, som den rent kvalitative Phlogistontheori aldrig kunde opnaa, da den hvilede paa en Hypothese, der var uforenelig med den gamle Iagttagelse om Vægtsforøgelsen. Den kvantitative Erkjendelse, der er bleven af saa uberegnelig Indflydelse paa Chemiens Udvikling, blev nærmere udviklet og klarnet ved Lavoisiers Forsøg, som derfor i Retning og Anlæg maatte blive forskjellige fra Phlogistikernes. Men det er ikke berettiget af denne Lavoisiers særegne Retning at udlede, at han ikke var Chemiker, thi denne Retning har nu saaledes sammenknyttet sig med den rent chemiske, som Phlogistikerne repræsentere, at ingen Chemiker længere kan arbeide uden netop i den. Hvad ved vel en Chemiker om et Legeme, naar han kjender dets Egenskaber og kan fremstille det, men forresten kun ved, at det indeholder disse eller hine Elementer? Hvorledes skulde vel den organiske Chemi have udviklet sig uden Lavoisiers Arbeider om Vægtsforøgelsen ved Forbrændingen, uden hans første Forsøg paa Elementæranalysen, hvis Princip endnu er Kjærnen i vor Tids mere fuldkommengjorte Methoder? hvorledes skulde vel den theoretiske Chemi være kommen videre frem, uden at indforlive i sig de physikalske Begreber Damptæthed og Atomer? Phlogistontheorien, Surstoffets Opdagelse, Vandstoffets Opdagelse, eller ingen andre af den Tids store Opdagelser kunde gjøre det; det var først ved at bringe visse Principer til almindelig Gyldighed i Chemien og saa at sige sætte enhver enkelt af disse store Stene paa sin rette Plads, at Bygningen kunde blive reist, og dette er Lavoisiers Fortjeneste.

I den samme Journals følgende Hefte kom dernæst en Afhandling af Redaktøren, Prof. Kolbe: „über den Zustand der Chemie in Frankreich.“ Han foresætter sig her at levere en Kritik over det Arbeide af Wurtz, som vi have nævnt her i Indledningen.

Men det kan vel neppe kaldes nogen Kritik: i en særegen Tone, der nærmest kunde betegnes som lidenskabelig, fremsættes en Række Spørgsmaal, hvorledes Wurtz vel kan vove dette og hint, udkastes nogle Insinuationer, som hellere kunde være uskrevne, og fortælles endelig en Historie om Bogens Tilblivelse, idet den nemlig skulde være skrevet for at kaste Franskmændene Blaar i Øinene og ved Fortids Glands dække Nutidens Tilbagegang.

Dernæst fortsættes: Vi erkjende gjerne og uden Misundelse, at Paris i Begyndelsen af dette Aarhundrede var Videnskabens Centralpunkt, som tiltrak Lærde allesteds fra o. s. v. Og nu — — —; der gives for Chemikerne, som for Studerende i andre Videnskaber, ikke mere at lære i Paris. Der fremstilles videre, hvorledes Pariser-Akademiet ogsaa er i Tilbagegang, og hvorledes

Chemikernes Produktivitet i Frankrige har aftaget, medens der i Tydskland udvikles en stedse stigende Produktivitet; hvorledes der i Frankrige er daarlige og utilstrækkelige Laboratorier, medens der i Tydskland netop i de sidste Aar er anlagt mange og storartede nye. Men sæt, at der i Frankrige byggedes nye Laboratorier, saa slutter Hr. Kolbe sin hist og her med Politik indsprængte Fremstilling, hvor ere de Mænd, der ligesom de tydske Professorer i Chemi pligttro og med Interesse vilde undervise den Studerende fra Morgen til Aften? Han tvivler paa, at der i Frankrige findes en eneste, som alvorligt og samvittighedsfuldt vilde paatage sig denne Opgave, og som besidder de fornødne Kvalifikationer. — Denne Fremstilling er, uagtet der i visse Stykker virkelig er adskilligt i hvad der siges, altfor ensidig, til at den kan forbigaaes i al Taushed.

„La chimie est une science française.“ Det af denne Ytring, der er saa faktisk, at det ikke godt ganske kan benægtes, fremstilles af Hr. Kolbe saaledes, at han gjerne erkjender, at Paris i Begyndelsen af Aarhundredet var Videnskabens Centrum.

Hvad den chemiske Videnskab angaar, saa er ikke blot den gjenfødt og den moderne Chemi derved grundlagt i Frankrige; men den er ogsaa der udviklet til fuld Modenhed og Bevidsthed. Alle de Forskere, der efterfulgte Lavoisier, og som bidrog til den theoretiske Chemis Udvikling til den Form, hvori vi endnu i det Væsentlige erkjende den, ere paa yderst faa Undtagelser nær Franskmænd. Følger man Ordenen i Kopps Historie, ser man Guyton de Morveau (1737—1816), Fourcroy (1755—1809), Berthollet (1748—1822), Vauquelin (1763—1829), Proust (1755—1826), Englænderen Dalton (1766), Gay-Lussac (f. 1778), Englænderen Davy (1778—1829), Thenard (f. 1777) og saa Berzelius (f. 1779). I dette Tidsrum fra 1775 — omkring 1820, 45 Aar, møde vi blandt Chemiens fremragende Mænd af Tydskere alene Klaproth (1743—1818), et af de hæderligste og bedste Navne, vi kjende i Chemiens Historie, men hvis Arbeider, efter deres Natur, ikke vare af den Betydning for selve Videnskabens Udvikling, som de før nævnte. Saa først fremtræder Faraday (f. 1791), Mitscherlich (f. 1794), Dumas, Liebig og Wöhler (fødte i de første Aar af dette Aarhundrede).

Chemien er saaledes virkeligen ikke langt fra at kunne kaldes en fransk Videnskab; grundlagt og befæstet i Frankrige, ere mange Decennier hengaaede, førend Tydskerne fik udrettet noget tilgavns deri; men det skal ogsaa indrømmes, at da Liebig og Wöhler først kom til, saa bidrog de ganske overordentligt til dens Fremskridt. Og da for omtrent 20 Aar siden den organiske Chemi begyndte at træde ind i et nyt Spor, hvorhen nu hele Chemien mere og mere ledes, udgik ligeledes de vægtigste Stød fra Frankrige; Navnene Dumas, Laurent og Gerhardt ere uadskilleligt forbundne med den nyere Chemis Udvikling.

Tydskerne have senere ikke været ledige; Liebig og Wöhler ere voxede frem til en stor Skare af ivrige, flittige og udmærkede Forskere. De have overfløiet Frankrige i Undervisningsanstalter og Laboratorier, og det nye chemiske Selskab i Berlin har under Hofmanns Ledelse udviklet sig saa, at denne Hovedstad vel snart ubestridt vil kunne kaldes Chemiens Hovedsæde. Alt dette ville vi gjerne erkjende; Ingen kan føle andet end den mest levende Glæde over de vigtige og store Bidrag, hvormed Chemien dagligen beriges fra Tydskland. Men om end Frankrige maa siges ikke paa langt nær at have udviklet sig i denne Retning saa stærkt som Tydskland, er det langt fra, at der i dette Land ikke længere er Chemikere tilstede. Alle Videnskabsmænd, der kjende de vigtige og, hvad her udtrykkeligt skal fremhæves, netop alle i nye Felter ryddende Arbeider, der udgaa fra école normale's, collège de France's og école de médecine's Laboratorier, ville finde Prof. Kolbes ovenciterede Udtalelser overdrevne.

Ethvert Folk har sin særegne Mission at opfylde. Det er det franske Folk, til hvem hele Europa staar i en dyb Gjæld for snart sagt ethvert stort Fremskridt i Civilisation og Videnskab. Dette ædle Folk, der først rystede Europa ved de nyere politiske Ideers Opvaagnen, har tillige — som paa saa mange andre Felter af Videnskaben — grundlagt Chemien paa Basis af nye Anskuelser. Den ihærdige og flittige, energiske tydske Nation følger efter og udvikler i det følgende afsluttende Arbeide samme Energi, som de franske udviklede i dets Grundlæggelse. Hver har sin Opgave; men ubilligt er det, naar den, som følger efter i Sporet, vil søge at forringe den, der først har aabnet det.

Oversigt

over Videnskabs-Selskabets Møder i 1871.

Den 13de Januar. Philosophisk-historisk Classe.

1. Caspari foredrog en Afhandling om det græske Elements Styrke og det græske Sprogs Brug i den romerske Menighed i de første tre Aarhundreder af dennes Tilværelse.

Den 27de Januar. Mathematisk-naturvidenskabelig Classe.

1. G. O. Sars holdt et Foredrag over nogle Echinodermer fra den norske Kyst. (S. 1.)

2. Mohn meddeelte nogle Bemerkninger angaaende Dybde-Forholdene i det Kariske Hav og Temperatur-Forholdene i de nordlige Have.

Den 10de Februar. Almindeligt Møde.

1. Præses fremlagde Regnskabet for 1870 og foreslog som Revisorer Adjunct Odén og Professor Sexe. Eenstemmig vedtaget.

2. Lochmann foredrog Bemerkninger angaaende Sygdommes Latents.

C. Boeck gjorde dertil nogle Modbemerkninger.

3. Dr. Jacob Worm Müller blev optagen som Medlem.

Den 24de Februar. Philosophisk-historisk Classe.

1. Bugge behandlede, efter indledende Bemerkninger om Sprogsammenligningens Anvendelse til at oplyse de japhetiske Folks ældste Culturhistorie, endeel enkelte Ord fra dette Synspunkt.

2. Caspari meddeelte Oplysninger om Propheten Jonahs og hans Fader Amithais Navne.

Den 10de Marts. Mathematisk-naturvidenskabelig Classe.

1. A. Boeck indleverede Tegninger af 6 nye Arter Amphipoder, som Esmark havde sendt ham fra Californien, og fremsatte nogle Bemerkninger om Amphipodernes Udbredelse og Udseende i de forskjellige Egne af Jorden. (S. 32.)

2. Rasch fremlagde til Optagelse i Selskabets Skrivter to Arbeider af R. Collett:

a) Et Supplement til et tidligere Arbeide over Fuglene. (S. 53.)

b) Beskrivelse over en Fiskeart, som G. O. Sars havde fundet i Hardangerfjorden paa 100—150 Favnes Dyb. (S. 62.)

3. A. Guldberg foredrog en ny Methode til Løsningen af den cubiske Ligning. (S. 287.)

Den 24de Marts. Almindeligt Møde.

1. Hiortdahl fremsatte nogle Bemerkninger angaaende den franske Chemie og navnlig Lavoisier, hvis Fortjenester han søgte at hævde mod nogle, fornemmelig fra tydsk Side, fremkomne Forsøg paa at nedsætte dem. (S. 508.)

2. Robert Collett blev optagen som Medlem.

Den 14de April. Philosophisk-historisk Classe.

1. Faye foredrog Bemerkninger ved Hjelms Afhandling om Bevidsthedens Væsen. (S. 469).

En Discussion paafulgte, hvori Hjelm, A. Guldberg, Faye og Monrad toge Deel. Navnlig gjorde den Sidste opmerksom paa Fayes formeentlig feilagtige Brug af de bekjendte philosophiske Termini: Potentialitet og Actualitet.

Den 3die Mai. Almindeligt Møde.

1. C. Boeck, der under Holmboes Sygdoms-Forfald fungerede som Præses, oplæste en Aarsberetning og knyttede dertil et Ønske om fornyet Kraft og Helbred for H. M. Kongen efter de overstaaede tunge Prøvelser.

2. C. Boeck meddeelte nogle Bemerkninger angaaende Kraft og Stof, samt om Forholdet mellem organiske og uorganiske Kræfter.

Den 12te Mai. Mathematisk-naturvidenskabelig Classe.

1. A. Boeck omtalte a) 4 nye Dyrearter fra det Kariske Hav og b) Amphipodernes Classification grundet paa Ædderedskabernes Bygning.

2. Faye gjentog sine Bemerkninger ved Hjelms Afhandling om Bevidsthedens Væsen.

3. G. O. Sars fremlagde en Undersøgelse over Hardangerfjordens Fauna. (S. 246.)

4. Blytt meddeelte Bidrag til Kundskaben om Vegetationen i den lidt sydfor og under Polarkredsen liggende Deel af Norge. (S. 125.)

5. Mohn meddeelte Beretning om Tordenveir i Norge i 1870. (S. 110.)

6. A. Guldberg holdt et Foredrag om Ligninger af 5te Grad. (S. 307.)

7. Bjerknes meddeelte en Afhandling om sphæriske Legemers Bevægelse i et Fluidum. (S. 327.)

Den 26de Mai. Philosophisk-historisk Classe.

1. Caspari foredrog en Undersøgelse om Oprindelsen til den christelige Daabsformel og særlig til Udtrykket „in nomine" i dens i den vesterlandske Kirke brugelige Form.

2. J. E. Sars holdt et Foredrag over Forholdet mellem Religion, Familje og Stat hos de germaniske Folk.

Foredraget gik nærmest ud paa at vise, hvorledes Antagelsen af Germanernes banebrydende Indflydelse paa den almindelige politiske Udvikling kan bringes i Overeensstemmelse med den af Aug. Comte opstillede historiske Theorie.

Man har været enig om at fremhæve Modsætningen mellem den antike og den moderne Verden i Hensyn paa Opfatningen af Staten og Gjennemførelsen af Forholdet mellem Stat og Individ og at føre denne Modsætning for en væsentlig Deel tilbage til Germanernes „esprit d'individualisme". Men ved denne er man bleven staaende som noget Givet, et Naturanlæg, en Raceejendommelighed, der ikke yderligere kan forklares, eller man har forklaret den paa en urigtig Maade. Som oftest er den bleven opfattet som en Egenskab, der i Almindelighed tilhører Menneskene paa et primitivt Standpunct, man har stillet den individuelle Frihed forud for det ordnede Samfund, man har ladet den germaniske Stat opstaa ved en frivillig Sammenslutning, hvorved den Enkelte opgiver noget, men saalidt som muligt, af sin oprindelige Selvraadighed [Guizot, Rogge, Eichhorn o. fl.]. Mod Rigtigheden af en saadan Betragtningsmaade har nyere Forskere [t. Ex. Wilda] protesteret; de har med Rette villet have Samfundet betragtet som noget oprindeligt, som et Naturphænomen [„Erst in dem Gemeinwesen hat der Germane sein stolzes Haupt zu erheben gelernt"]. Men, naar de til Forklaring af det Ejendommelige ved den germaniske Stats- og Samfundsskik taler om denne Races Frihedssind, sterke Personlighedsfølelse etc., da er dette at omskrive Problemet, ikke at løse det. At forklare et Phænomen vil sige at paavise dets Sammenhæng med et andet mere almindeligt eller mere oprindeligt. Et saadant er i nærværende Tilfælde den forholdsviis lidet indgribende Rolle, som Religion og Religionsvæsen sees at have spillet hos Germanerne, sammenlignet med de fleste andre Folk, navnlig den antike Verdens. Vi veed, at de ikke havde nogen særegen Prestestand. Cæsar fremhæver dette som en Merkelighed i Modsætning til Kelterne, med hvem de iøvrigt viste en saa nær Overeensstemmelse. Vi veed, at de gamle Nordmænds Moral havde i en usedvanlig Grad en reent practisk Charakteer og at den stod i liden eller ingen Forbindelse med Religionen: de moralske Bud skulde efterleves, ikke af Hensyn paa Guderne, men af Hensyn paa Mandens egen Ære og Selvstændighed. Nordmændene havde som Romerne sine Auspicier og troede paa dem: men medens Romeren, som F. de Coulanges udtrykker det, var „brave au combat à condition que les auspices lui assuraient la victoire", er det af mange Træk i Sagaerne bekjendt, at det hos Nordmændene gjaldt som en Æressag for den Kjække at slaaes ligegodt, om han end forud vidste, at Guderne havde besluttet hans Undergang. Overhovedet er det vistnok med Føje sagt om de nordiske Folk i Almindelighed, at de religiøse Forestillinger hos dem øvede mindre Indflydelse end hos noget andet Culturfolk, hvorom Historien veed at fortælle [M. Büdinger].

Men Religionen har været med at bygge Staten, de religiøse Forestillinger har været de ældste og sterkeste aandige Baand mellem Menneskene og ved dem fremfor alt er Samfundenes Charakteer bleven bestemt.

Dette er for Grækernes og Romernes Vedkommende ypperlig oplyst i den strassburgske Professor Fustel de Coulanges's Verk „La Cité Antique". Her udvikles først Familjeforfatningens Sammenhæng med en Udødelighedstro, der synes at have været fælleds for alle Folk af den ariske Æt, og ifølge hvilken de Afdøde vedblev at leve i sine Grave og herfra at staa i uafbrudt Forbindelse med sine efterlevende Frænder. Naar disse iagttog at offre til dem, blev de gode og beskyttende Genier, i modsat Fald onde og ødelæggende. Saaledes havde hver Familje sine egne Guddomme, sin egen Religion. Hos Hinduerne som hos Grækerne og Romerne var det Sønnen, der havde den Pligt at offre til sin Faders og sine Forfædres Aander. Familjereligionen gik kun i Arv paa Sverdsiden. „Le père, seul interprète et seul pontife de sa religion, avait seul le pouvoir de l'enseigner et ne pouvait l'enseigner qu'à son fils". Paa denne Maade knyttedes alle Generationer af den samme Familje sammen til en uadskillelig Eenhed. Familjen var et religiøst Samfund, en Kirke med en særegen Religion, og derpaa beror nu dens Forfatning, saadan som vi kan see, at denne har været hos Grækerne og Romerne i den ældste Tid; deraf udledes nu dens strenge indre Sammenhold, Huusfaderens uindskrænkede Magt, Sønnernes Umyndighed indtil Faderens Død, Kvindernes vedvarende Mindreaarighed eller ligefremme Ufrihed, de særegne Regler for Arvegangen og Ægteskabets Indgaaelse o. s. v. Deraf fulgte det, at den i reent physisk Henseende havde en anden Sammensætning end nuomstunder, at den indesluttede en Mangfoldighed af Individer, som nuomstunder ikke regnes til Familjen, medens andre var udelukkede, der nuomstunder regnes med. Det forbindende var mere den fælleds Religion end det naturlige Blodsforvandtskab. Kvinden, der blev giftet ind i en anden Familje, antog sin Mands Religion, traadte ind i hans Kirke; hun og hendes Børn blev fuldkommen fremmede for Brødre eller andre kjødelige Slægtninger. Paa den anden Side betragtedes Adoptivsønner eller Adoptivbrødre og deres Ætlinger som fuldkommen staaende i det samme Forhold til Familjen som virkelige Sønner eller Brødre, idet det religiøse Fælledskab bødede paa Mangelen af Blodsforvandtskab. Cognaterne udelukkedes, men Agnaterne toges med i videste Udstrækning; Agnationerne blev til Slægter [gentes] eller Khlaner, der overordnedes den naturlige Familje eller [som hos Kelterne] saagodtsom ganske ophævede denne.

Hvorledes nu af de patriarkalske Familjer eller Slægter de videre politiske Associationer er fremgaaet: om det er skeet ved en fortsat Forgrening af den oprindelige eenslige Slægt eller ved en Sammenslutning af flere indbyrdes uafhængige Slægter: kan i det Enkelte være uvist. Men hvorledes end Udvidelsen factisk er foregaaet, — kunstig eller naturlig, — saa er det vist, at man altid forestillede sig, at den var foregaaet naturlig, at den videre Kreds stedse havde gaaet umiddelbart frem af den engere. Stammen og Staten betragtedes som naturlige Eenheder, hvilende paa en oprindelig Blodsforvandtskabs-Grund. Alle Medlemmer af en Stamme eller Stat antoges at stamme ned fra den samme Ætfader. Ifølge heraf gjorde det religiøse Princip i Familjeforfatningen sig gjeldende ogsaa i de videre Kredse; Familjeretten blev Statsrettens Prototyp. Overgangen mellem Familje og Stat dannedes ved Slægten, der havde voxet ud over det paavislige Slægtskabs Grændser, men dog bevarede den naturlige Familjes Organisation, og hvorved der banedes Vej for Overførelsen af denne ogsaa til videre Samfundsdannelser [den Forskjel, som hos Romerne gjordes mellem „agnationes“ og „gentes“, forklares naturligt saaledes, at „gentiles“ var saadanne „agnati“, der ikke kunde paavise Graden af sit Frændskab. Lange, Röm. Alterthümer].

Ligesom Familjen blev altsaa ogsaa Staten hos Grækerne og Romerne opfattet som et religiøst Samfund, en Kirke. Som hiin havde ogsaa denne sit hellige Arnested med den altid brændende Ild og sine Huusguder; hvad Penaterne var for Familjen, blev Naturguddommene for Staten. Men heraf udledes nu igjen dennes absolute og exclusive Charakteer. Statens Chefer — Kongen eller de republikanske Magistratspersoner — var dens patresfamilias, Senatet var det Raad af erfarne Mænd, der plejede at omgive Huusfaderen, Borgerne var Statens Børn. Statsautoriteten var i Principet ubetinget som Huusfaderens, om end factisk indskrænket ved den oprindelige Familjeforfatning, saalænge denne nogenledes bevarede sin Kraft. Lovene havde en sacral Charakteer; de betragtedes som aabenbarede; Loven og Lovens Haandhævere tillagdes Myndighed til at bestemme ikke blot den juridiske Ret, men ogsaa den moralske. Hver Stat havde sine egne Guder, hvis Herredømme strakte sig saalangt, som Statens Grændser gik, som beskyttede hvad der laa indenfor disse, men var uforsonlige Fiender af hvad der laa udenfor, i andre Stater, der havde andre Guder, hines Medbejlere. Det fulgte heraf, at Borgere af forskjellige Stater betragtede hverandre ikke blot med et politisk, men med et geistligt Had. Derfor var det saa vanskeligt for en Fremmed at faa Borgerret i de græske Bycommuner. Derfor var Patriotismen ikke blot den øverste Dyd, men Indbegrebet af alle Dyder hos den gamle Verdens Folk. Naar Grækerne talte om Fædrelandets hellige Jord, saa var det ikke nogen tom Phrase. „Ce sol était véritablement sacré pour l'homme, car il était habité par ses dieux.“ Idet han tabte sit Fædreland, tabte han alt. I et Samfund, der var bygget paa saadanne Principer, kunde der ikke være Plads for den individuelle Frihed; Borgeren maatte blive Staten ubetinget underordnet og kunde ikke føle dette som nogen Tvang; han maatte betragte det som det naturlige Forhold. Derfor holdt Statsalmagten sig, efterat de religiøse Forestillinger, paa hvilke den oprindelig var grundet, havde tabt sit Herredømme over Sindene. De græske Philosopher og de romerske Jurister byggede sine Systemer paa den factiske Tingenes Tilstand, og disse blev derfor kun et nyt, mere videnskabeligt Udtryk for „Statstheologien“: Hvad der fra først af havde sin Grund i en religiøs Tro, blev nu deduceret fra en abstract Naturret, fra „Tingenes Væsen“. Her som i de fleste Retninger var den gamle Metaphysik kun en ny Form for den gamle Theologi og kunde derfor ikke emancipere Individet fra det Aag, som denne havde lagt paa det. Under alle Omvexlinger vedblev Staten hos Grækerne og Romerne at være almægtig; det private Liv slugtes af det offentlige, salus publica var lex suprema.

Sammenligner vi nu hermed Forholdene hos de germaniske Folk, saalangt man kan følge disses Samfundsudvikling tilbage i Tiden, møder der os en iøjnefaldende Overeensstemmelse, men tillige en iøjnefaldende Modsætning. Vi finder Spor af en lignende Udødelighedstro som den, F. de Coulanges omtaler hos Inder, Grækere og Italer, og en dermed forbunden for hver Familje særegen Cultus [Gulathingslovens Forbud mod at „blota hauga ok horga“ — de Afdøde nævnes ofte i Sagaerne „haugbuar“ etc.]. Vi finder fremdeles en Familjeforfatning, som i sine Hovedtræk stemmer med den græsk-italiske: Huusfaderens prestelige Verdighed, hans jus vitæ necisque over Familjens Medlemmer, Sønnernes Fortrin for Døttrene i Arvegangen, Kvindernes Umyndighed, Familjens Fælledsbesiddelse af Jorden o. s. v. Vi finder Spor af, at ogsaa hos Germanerne Familjerne ved Agnationsvæsenet har udvidet sig til Slægter eller Khlaner [Tacitus og Cæsar omtaler „propinqvitates“ „gentes“ hos de germaniske Folk; Landsbyforfatningen synes — at dømme efter de tilsvarende Forholde hos Hinduerne og de slavoniske Folk — at hvile paa en oprindelig khlansmæssig Ordning af Folket; det kan af enkelte Antydninger sluttes, at efter oprindelig germanisk Ret Landsbybønderne har været arveberettigede, naar en af deres Midte døde uden at efterlade sig Slægtninger. Waitz, Deutsche Verfassungsgesch.; Maine, Ancient Law]. Men alle disse Træk fremtræder langtfra med den samme Skarphed hos Germanerne som hos de andre ariske Stammer. Baandene mellem Familjens Medlemmer, deres Underordning under Huusfaderens Myndighed, hvorvel stram nok, viser sig dog ulige mindre stram end hos Italerne og Grækerne paa det samme Culturtrin. Sønnerne blev ifølge Tacitus selvstændige, naar de i Folkeforsamlingerne var bleven erkjendte som vaabenføre Mænd; Kvinderne indtog en friere Stilling: de kunde have Ejendom, endog Jordejendom; — Skilsmisse, Adoption var en langt friere Sag, havde langtfra en saa højtidelig Charakteer som t. Ex. hos Romerne. Familjen nærmede sig ved sin Sammensætning mere den moderne naturlige end den oprindelig patriarchalske eller religiøse Familje; Blodets Baand erkjendtes baade paa Spinde- og Sverdsiden, Agnationsprincipet gjaldt ikke paa langt nær saa ubetinget som hos den antike Verdens Folk [Tacitus, Germania, Cap. 20]. Vi finder vel Spor af et lignende Slægts- eller Khlansvæsen hos Germanerne som hos Kelterne eller Italerne; men disse Spor er svage og utydelige. De ældste tydske og nordiske Love følger i sine Bestemmelser om Arvegangen eller Mandeboden Slægtskabsgraderne meget langt, men gaar heller ikke udenfor de naturlige Slægtskabsgrader, medens derimod romersk Ret udstrakte Arve- og Værgemaalsretten ogsaa til Gentilerne, d. e. saadanne, der hørte til samme Slægt som den, efter hvem Arven var falden, eller over hvem Værgemaalet skulde øves, men som ikke kunde godtgjøre sit Slægtskabs Grad, ikke kunde paavise noget kjødeligt Forvandtskab.

Det fremgaar heraf, at hos Germanerne det religiøse Princip i Familjeforfatningen har gjort sig mindre sterkt gjeldende, og et lignende Forhold maa da ogsaa formodes at have fundet Sted med de af Familjerne fremgaaede videre Samfundsdannelser. Slægten, der var Overgangsled mellem Familje og Stat, manglede; men dette maa have virket til, at Statsret og Familjeret blev holdt skarpere ud fra hinanden, og at hiin derfor saameget lettere kunde antage en reent verdslig eller practisk Charakteer. Det er vistnok øjensynligt, at den videre Forening af Familjerne til en Stat ogsaa hos Germanerne har været bygget paa en religiøs Sanction og været betragtet som en guddommelig Indstiftelse. Men det er tillige øjensynligt, at dette Statens kirkelige

Væsen har været langt mindre fremtrædende, at denne Opfatning af Staten som et Gudernes Værk har gjort sig gjeldende i langt ringere Grad hos dem end hos den antike Verdens Folk. Man gjenfinder ikke i de gamle norske Love et sacralretligt Grundpræg, der kan lignes med t. Ex. den ældste romerske Lovgivnings; de have ikke Charakteren af absolute Bud, de udtale ikke saameget, hvad der er Ret, som hvad man er bleven enig om som hensigtsmæssigt, som et rimeligt Forlig i stridige Tilfælde.

Vi maa antage, at Grunden til, at det religiøse Princip saaledes træder mindre sterkt frem i Germanernes Samfundsforfatning, ligger deri, at denne Race fremfor de øvrige af samme Æt er bleven tidligt og sterkt udviklet i krigersk Retning. Ved Siden af det religiøse har nemlig ogsaa et andet Princip fra først af været virksomt til at knytte Menneskene sammen og bestemme Samfundenes Charakteer, nemlig det militære eller krigerske. Disse to Principer forholder sig saaledes til hinanden, at, jo mere det ene træder frem, jo mere trænges det andet tilbage. Det religiøse Princip er ifølge sit Væsen et ganske anderledes ubetinget end det militære. I Menneskenes Sammenslutning om religiøse Formaal forudsættes altid en højere Vilje som den bestemmende; i deres Sammenslutning til fælleds Forsvar mod en udvortes Fiende indgaar derimod altid et Element af bevidst Beregning og Frivillighed. Fra det militære Princip stammer derfor Friheden, fra det religiøse Autoriteten. Hvor dette har været ubetinget raadende, er Statsformen bleven fuldkommen despotisk. Saaledes hos mange orientalske Folk. Hos Grækerne og Italerne gjorde fra først af det militære Princip sig gjeldende ved Siden af det religiøse, men kun paa en underordnet Maade. I Overeensstemmelse dermed blev ogsaa det græsk-romerske Statsliv ligesaa fjernt fra orientalsk Despotisme som fra det nyere Europas politiske Frihed. Hos Germanerne derimod var det det militære Princip, der blev raadende; Folket inddeeltes som en Hær [Fylker og Hereder], Høvdingerne blev fremfor alt militære Chefer, medens deres prestelige Verdighed traadte i Baggrunden. Hertil maa nu den ejendommelige Betydning af de germaniske og specielt de anglo-nordmanniske Statsdannelser føres tilbage. Heraf fulgte det nemlig, at hos dem Staten aldrig antog nogen absolut Charakteer, at den ikke tillagdes nogen ubetinget Ret, men at dens Betydning og Nytte opfattedes som en relativ til de enkelte Familjer eller Individer, af hvilke den var dannet, at det sociale og det individuelle Synspunct, istedetfor at modsættes, saa det ene maatte fortrænge det andet, sideordnedes, og at saaledes Staten, for at bruge den bekjendte Lignelse, blev Pyramiden, stillet paa den brede Basis, idet der ved en saadan Sideordning af Stat og Individ som ligeberettiget var aabnet en Udvej til fredelig Udjevning, til Rettelser i det Enkelte, uden at det Hele angrebes, medens ved den antike, romerretlige Statstheorie kun et af to var muerligt: enten ubetinget Underkastelse eller Revolution.

Comte har i sit Værk „Cours de Philosophie Positive" bestridt eller ignoreret den Betydning, der i Regelen tillægges Germanerne for Europas nyere politiske Udvikling paa Grund af disse Ejendommeligheder ved deres Stats- og Samfundsskik. Han finder det urimeligt og i Strid med Grundsætningen om Continuiteten af den historiske Udvikling, at der tillægges barbariske eller halvbarbariske Folks Invasioner en bestemmende Indflydelse paa denne; men det er, som før omtalt, en Vildfarelse, naar Germanernes „esprit d'individualisme" opfattes som et Vidnesbyrd om et primitivt Culturstandpunct, og det kan nu dernæst godtgjøres, at den sedvanlige Lære om Germanernes epochegjørende politiske Rolle i Virkeligheden stemmer bedre med Comte's almindelige historiske Theorie end den Lære, han selv vil have gjort gjeldende.

Comte's Theorie er, som bekjendt, bygget paa Loven om de 3 Stadier, som den menneskelige Aand nødvendig maa gjennemløbe: det theologiske, det metaphysiske og det positive. Mennesket kan til en Begyndelse alene forklare Phænomenerne ved at gaa ud fra sig selv. Det forestiller sig alle Gjenstande belivet og udleder alle Phænomener af overnaturlige Væseners lunefulde og uberegnelige Viljesacter. Dette er det theologiske eller [som det vel rettere bør kaldes] volitionale Stadium.

Efter hvert som Menneskene bliver var en fast Regelmæssighed i Naturens Gang, der er uforenelig med Antagelsen af lunefulde Viljers Regimente, afløses denne Methode af en ny, hvorved Phænomenerne udledes af Essentser, Ideer eller Kvaliteter, der ligefrem er substitueret istedetfor Guderne og følgelig tænkes at have frembragt Tingen, tillægges en selvstændig Existents. Dette er den metaphysiske eller ontologiske Methode.

Begge disse Methoder, af hvilke den ontologiske kan betragtes som en Modification af den volitionale, har det tilfælleds, at de fører til „causæ finales“, til absolute Satser, der ikke kunne modificeres ved en fremadskridende Erfaring.

Først seent, efterat en lang Række af Forsøg har godtgjort det Sterile i alle Forsøg paa at komme til Erkjendelse af de Grundaarsager, der frembringer Phænomenerne, og efterat Menneskenes Evne til directe Iagttagelse af Phænomenerne er bleven tilstrækkelig opøvet, gjør den tredie Methode sig gjeldende, der af Comte kaldes den positive og af Stuart Mill med et mindre fordringsfuldt Navn den phænomenale. I Modsætning til de to foregaaende har denne en objectiv og relativ Charakteer. Ved den er enhver Stræben efter en endelig Forklaring opgivet; istedetfor at søge efter Phænomenernes Grundaarsager søger man at bringe deres Love, d. e. de constante Rapporter mellem dem, deres regelmæssige indbyrdes Forhold som Antecedentser og Conseqventser paa det Rene. De Systemer eller Theorier, hvortil Menneskeaanden ad denne Vej kommer, udmerker sig fremfor dem, hvortil den volitionale og ontologiske Methode fører, ved sin progressive Charakteer. De kunne modificeres efterhaanden, som Erfaringen skrider frem, medens de ældre Systemer heelt maa antages eller heelt forkastes.

Man seer, at alt dette kun passer paa den videnskabelige Udvikling. Naar Comte derfor taler om en theologisk, en metaphysisk, en positiv Politik, saa er dette ganske vist en mindre correct Brug af Ordene og kan alene gjelde med betydelige Indskrænkninger. Politiken er ikke blot Theorie, men ogsaa og fremfor alt Praxis. Forsaavidt der imidlertid til enhver Tid existerer et Slags politisk Theorie, en Opfatning af Staten og de sociale Phænomener, og forsaavidt som disse Theorier altid maa øve Indflydelse paa den politiske Praxis, kan dog Comte's Lov ogsaa have Anvendelse paa dette Felt. Til den volitionale Forklaring af Naturphænomenerne svarer nu unegtelig i en vis Forstand den Opfatning af Staten, som vi har seet var den raadende hos den antike Verdens Folk, ifølge hvilken Staten, dens Institutioner og Love udlededes fra selve Guderne og tillagdes en sacral Charakteer. Og paa samme Maade, som den theologiske Opfatning af Naturphænomenerne afløstes af en metaphysisk, der satte Abstractioner i Gudernes Sted som frembringende Tingene, — paa samme Maade udviklede sig af den theologiske Opfatning af Staten en metaphysisk, der førte til de samme practiske Conclusioner. Efterat man havde ophørt at tillægge Staten en guddommelig Oprindelse, deducerede man dens Love og Væsen af en saakaldet Naturret, der forudsattes at have frembragt dem som en „causa efficiens". Dette er det Standpunct, som indtoges af de græske Statsphilosopher og efter dem af de romerske Jurister, og som gjennem Romerretten og de romerretlige Statstheorier har hævdet sig indtil den nyere Tid.

Begge Opfatninger har den absolute Charakteer tilfælleds, som følger deraf, at de udleder Tingenes Væsen af et Princip, der staar over Phænomenerne og saaledes unddrager sig enhver Control eller fremadskridende Iagttagelse. Ligeoverfor begge har man kun Valget mellem ubetinget at forkaste eller ubetinget at underkaste sig.

Nu maa det naturligviis ikke glemmes, at her kun er Tale om en politisk Theorie, og at politisk Theorie er et, politisk Praxis noget andet. Om end Tanken underordner sig, er det derfor ikke sagt, at Lidenskaben gjør det. Det er imidlertid klart, at den Forestilling, man gjør sig om Statens Væsen, maa influere paa det Forhold, hvori man stiller sig til den, og saaledes har den theoretiske Statsabsolutisme været et virksomt Middel til at fremkalde og opretholde den practiske Statsabsolutisme. En Lære, ifølge hvilken Staten tillægges en ubetinget, over de enkelte Borgeres Tarv og Ønsker ophøjet Gyldighed, har i Praxis maattet føre til Regjereri, til en stedse fortsat Forflerelse af Institutionerne og Lovene, udenfor eller i Strid med det practiske Behov, alene af Hensyn til Forfatningens formentlige Symmetri eller Harmoni. Ligeoverfor disse theologiske og metaphysiske Theorier staar nu en Conception af Staten, der kan kaldes positiv, fordi den har en relativ Charakteer, og fordi dens Satser er undergivne Erfaringens Control. Denne opfatter Staten som et Menneskeværk, fremgaaet af Menneskenes umiddelbare Trang til Sammenslutning og deres Syn for de Fordele, den Enkelte drager af at leve i Samfund, tillægger derfor ikke Statsautoriteten nogen anden Ret til at blande sig ind i de Enkeltes Liv og Virksomhed end den, som er forenelig med disses virkelige Gavn eller Trang, og stiller ethvert Forfatningsspørgsmaal under den fremadskridende Udviklings vexlende Betingelser. Saaledes er Samfund og Individ sideordnet istedetfor at modsættes, og til en saadan Theorie, hvis Satser er relative og derfor stedse kunne modificeres, svarer en Praxis, der er jevnt fremadskridende, der stadig har Udveje til fredelig Udjevning, hvor der opstaar Collisioner, medens ved den Praxis, der svarer til den theologiske og metaphysiske Statsdoctrin, enhver Collision truer med at blive Revolution og at standse det hele Maskineri.

Som videnskabelig gjennemført Theorie tilhører denne Conception og kan den kun tilhøre den allernyeste Tid. Men som umiddelbar Forestilling, som practisk Grundsætning, der har gjort sig gjeldende i Gjennemførelsen af Forholdet mellem Stat og Individ, er den gammel. Og selve Theorien behøvede for sin Udvikling et saadant practisk Mønster, hvortil den kunde støtte sig. Det er her atter Sted til at minde om, at Politiken ikke er en blot Tankens, men ogsaa en Følelsens og Lidenskabens Sag. Ikke blot en theoretisk Erkjendelse, men ogsaa en practisk Opdragelse er derfor nødvendig for ethvert gjennemgribende politisk Fremskridt.

Det er ifølge heraf ikke i Strid med den historiske Udviklings Continuitet at antage, at Germanerne har grebet virksomt ind til at frigjøre Menneskeheden fra den græsk-romerske absolute Statstheologie og Statsmetaphysik. De har ikke kunnet hæve sig til en virkelig positiv Opfatning af Staten. Men idet hos dem det oprindelige religiøse Forfatningsprincip af reent ydre Aarsager blev trængt tilbage, underordnet andre Hensyn, kom dog Statens Opgave til at blive gjennemført i en væsentlig relativ Aand, om end uden nogen bevidst Reflexion, i de af dem grundlagte Stater. Og disse Staters jevne Fremadskriden maatte nu bidrage til at bane Vej for en Theorie af Statssamfundet, der staar i et lignende Forhold til de tidligere som den videnskabelige Forklaring af Naturphænomenerne til den ontologiske og volitionale.

Den 9de Juni. Mathematisk-naturvidenskabelig Classe.

1. Bjerknes fremlagde en Afhandling af Sylow: Om den Gruppe af Substitutioner, der tilhører Ligningen for Division af Perioderne ved de elliptiske Functioner. (S. 418.)

2. Den Samme fremkom med nogle supplerende Bemerkninger til sin tidligere meddeelte Afhandling om sphæriske Legemers Bevægelse i et Fluidum.

3. R. Collett paaviste en eiendommelig Asymmetrie hos os squamosum paa Kraniet af Strix Tengmalmi (Gmel.)

4. C. Boeck fortsatte sit i sidste almindelige Møde paabegyndte Foredrag om organiske Kræfter.

Den 15de September. Almindeligt Møde.

1. Holmboe holdt et Foredrag om det Vegtsystem, der kan antages at ligge til Grund for nogle Smykker i Fölhagen-Fundet paa Gotland. (S. 453.)

Monrad udtalte i Anledning af dette Foredrag Selskabets Glæde over at gjensee sin høiærværdige Præses restitueret efter hans svære Sygdom.

2. Bjerknes gav fortsatte Meddelelser angaaende et hydrodynamisk Arbeide: om Bevægelsen af foranderlige, kugleformige Legemer i et incompressibelt og ubegrændset Fluidum.

Ere de nævnte Legemer uforanderlige, saa vil det Potential, der udtrykker Tilstanden i et saadant Fluidum, være en lineær Funktion af Centrernes Hastighedskomponenter efter de tre Axer. Opfattes disse omvendt som Koefficienter, saa vil en Forandring af disse Koefficienter ikke forrykke Potentialets væsentligste Egenskaber som saadant; Betingelserne ved Overfladerne kunne imidlertid herved ikke længer opfyldes: de nye Ligninger blive uforenelige med Betingelsen om Legemernes Ugjennemtrængelighed for Fluidet. Der kan dog spørges, om ikke ogsaa de saaledes modificerte Ligninger ville kunne benyttes ved Behandlingen af noget mekanisk Problem.

Følgende Forudsætninger skulle exempelvis opstilles.

Man har kun et eneste Legeme, der bevæges: et uendelig tyndt og oprindelig ugjennemtrængeligt Kuglehylle, hvis indre Rum er opfyldt af det samme Fluidum. Et tilstrækkelig stærkt ydre Tryk skal forhindre Adskillelser af Masserne og Dannelsen af Tomrum. Som en Følge af de intense Trykforandringer, der gjennem et lille Tidsmoment vilde indtræde, om med stor Hurtighed en Standsning frembringes, tænker man sig, at det omgivende Fluidum, istedetfor at gaa over til Ro, paa Grund af Stødets Styrke maa fortsætte sin Bevægelse gjennem det hidtil ugjennemtrængelige Hylle. Og fra nu af, efterat Passagen er aabnet, skal for den efterfølgende Tid Gjennemgangen, for Simpelheds Skyld, betragtes som fuldstændig fri. I Sammenhæng hermed supponeres, at ved Indtrædelsen af den nye Periode, under hvilken Legemet skal forblive i Hvile, ingen væsentlig Forandring opstaar i Fluidets Bevægelse i det ydre Rum, og selv ikke — hvad der iøvrigt vil være mere tvivlsomt — i umiddelbar Nærhed af den kugleformige Envelop.

Dette forudsat, kan man bestemme en Potentialbevægelse i det ydre Rum og en tilhørende Hvirvelbevægelse i det indre. I det ydre Rum erholdes et System af Strømkurver analoge med de magnetiske Kurver; som Axe antages herunder en Linie gjennem Centret langs efter Bevægelsesretningen, saadan som denne var i det Øieblik, den pludselige Standsning indtraadte. Fluidet i det indre Rum opløser sig i Hvirveltraade, der danne Cirkler om den fælleds Axe; et ringformigt Parti, der tangerer Æqvatorlinien, hvirvler imidlertid stadig rundt om en cirkulær Ringaxe, en ubevægelig Cirkel, hvis Radius forholder sig til Hyllets Radius som $\sqrt{5}$ til $\sqrt{6}$.

Det var oprindelig antaget, at ingen ydre Kraft modsatte sig eller fremmede den frie Gjennemstrømning. Problemet kan imidlertid endnu behandles, naar man antager, at der paa ethvert Punkt af Fluidet i det indre Rum virker en Kraft proportional med den der existerende Hastighed. Selvfølgelig er Bevægelsen da ikke længer som i det foregaaende Tilfælde permanent.

Den 29de September. Philosophisk-historisk Classe.

1. Fritzner meddeelte Oplysninger til Forklaring af nogle Ord og Udtryk i det gamle norske Sprog. Dernæst fremsatte han en Bemerkning til Holmboes Foredrag om Barlaams og Josaphats Saga. (Se V.-S. Forhandlinger for 1870, S. 340 fgg.). (S. 422.)

2. S. Bugge forklarede nogle sjeldne latinske Ord af Festus's Lexicon og Paulus's Udtog af dette, og emenderede enkelte af dem.

Den 13de October. Mathematisk-naturvidenskabelig Classe.

1. A. Guldberg refererede en Afhandling af Observator Åstrand i Bergen: „Ny Interpolationsmaade etc.“ Det blev overdraget Fearnley og A. Guldberg at gjennemgaae Afhandlingen, førend den optoges i Selskabets Skrivter. (Optaget S. 493.)

2. Waage meddeelte et Arbeide om Bromets Opløselighed i Saltsyre, udført af Realcandidat S. Henrichsen. (S. 501.)

3. G. O. Sars indleverede en Afhandling: Diagnoser af nye Annelider fra Christianiafjorden efter Professor M. Sars's efterladte Manuscripter. (S. 406.)

Den 27de October. Almindeligt Møde.

1. Kjær holdt et Foredrag om Dødeligheden i det første Leveaar. (S. 438.)

Faye, der idethele ytrede sig udførligt i Anledning af dette Foredrag, meente i Særdeleshed, at den væsentligste Aarsag til den uforholdsmæssige Dødelighed hos spæde Børn i visse Lande laa i den slette Pleie, hvilket stod i Forbindelse med den større Mængde af uegte Børn. Naar Forholdet hos os er sammenligningsviis gunstigt, da kom dette for en stor Deel deraf, at hos vor Landbobefolkning er Pleien i Regelen omhyggelig, og der benyttes f. Ex. næsten udelukkende naturlig Modersmelk o. s. v.

2. Lochmann søgte at indlede en Discussion angaaende Darwinismen. Der blev ogsaa talt noget derom, f. Ex. af Faye og Esmark, uden at man dog kunde komme synderlig ind paa Sagen, idet man savnede en tilfredsstillende Fremstilling af Darwinismens System at lægge til Grund.

Monrad gjorde opmerksom paa dette Savn og opfordrede En eller Anden af dem, der havde studeret Darwins Skrivter, til i et følgende Møde at udfylde det.

3. C. M. Guldberg meddeelte fortsatte Bidrag til Legemernes Molecular-Theorie.

4. S. Bugge rettede et Spørgsmaal til Geologerne i Anledning af en Indskrivt paa en Klippe ved Veblungsnæs, indhugget sandsynligviis mellem Aarene 400 og 600. Hvad veed man angaaende Vandets Synkning eller Landjordens Stigning, som kan forklare denne Indskrivts nuværende Høide over Vandfladen?

Den 10de November. Philosophisk-historisk Classe.

1. Holmboe gav tvende Meddelelser: a) om nogle Mynter, fundne paa Stange Prestegaard, hvoraf udhævedes et Par hidtil ubekjendte, rimeligviis fra Olaf Kyrres Tid; b) om en formodet Vægt-Betegning paa gammelnorske Guldringe. (S. 453.)

2. L. Daae meddeelte Bidrag til den danske Konge Frederik den Andens Historie, navnlig med Hensyn til Forhandlingerne om hans Giftermaal.

Den 24de November. Mathematisk-naturvidenskabelig Classe.

1. Waage omtalte nogle af Pharmaceut Doxrud udførte

Forsøg med Niccinimid og Niccinimid-Kviksølv samt foreviste en krystallinisk Forbindelse af Niccinimid-Kviksølv med Sublimat. (S. 503.)

Den 8de December. Almindeligt Møde.

1. Til senere Votering anmeldtes to nye Medlemmer: Prof. theol. W. Bugge og Capitain D. Schnitler.

2. Fearnley holdt et Foredrag „om en dæmpende Indflydelse af Solformørkelser paa den magnetiske Declinations Variationer.“

3. Waage meddeelte Oplysninger om Vandets Saltgehalt paa forskjellige Steder i den indre Deel af Christiania-Fjorden.

4. Valg paa Embedsmænd foretoges:

Til Vice-Præses valgtes Caspari. (Holmboe havde frabedet sig at komme paa Valg.)

Til Secretair valgtes Monrad.

Til Formand i den philosophisk-historiske Classe (i Casparis Sted, der var valgt til Selskabets Vice-Præces): S. Bugge.

Til Vice-Formand i den philosophisk-historiske Classe: Rygh.

Til Secretair i samme Classe: J. P. Broch.

Til Vice-Formand i den mathematisk-naturvidenskabelige Classe: Esmark.

Til Secretair i samme Classe: Waage.

Gaver til Selskabets Bibliothek i 1871.

Archiv für die Naturkunde Liv-, Ehst- und Kurlands. Erste Serie, VI, 1. Zweite Serie, VII, 2.

Sitzungsberichte der Dorpater Naturforscher-Gesellschaft. III, 1.

P. Fr. da Costa Alvarenga, Précis de thermométrie clinique générale. Lisbonne 1871.

J. W. Müller, über die Spannung des Sauerstoffs der Blutscheiben.

J. J. Hjort, om Spedalskheden i Norge og Foranstaltninger mod samme.

Upsala Universitets årsskrift 1869. 1870.

Nova acta regiæ societatis scientiarum Upsaliensis. VII, 2.

Bulletin météorologique mensuel de l'observatoire de l'université d'Upsal. II, 1—6.

Lunds Universitets årsskrift. 1869. 1870.

Karl Pettersen, Geologiske Undersøgelser i Tromsø Amt. II.

Forhandlinger i det Norske medicinske Selskab i 1870.

R. Comitato geologico d'Italia. Bollettino no. 11—12, 1870; no. 3—8, 1871.

J. J. Åstrand, Indberetning om Bergens Observatorium i Aarene 1868, 1869 og 1870.

I. Aasen, Norsk Ordbog. Anden Udgave. 1ste og 2det Hefte.

Antiqvarisk Tidskrift för Sverige. I. II. III, 1.

Kongl. Vitterhets Historie och Antiqvitets Akademiens Handlingar. XXI—XXVI.

Kongl. Vitterhets Historie och Antiqvitets Akademiens sammankomst den 21 Mars 1853 hundrade årsdagen af Akademiens stiftelse.

Kgl. Svenska Vitterhets Akademiens samt Kgl. Vitterhets Historie och Antiqvitets Akademiens Ledamöter och Tjenstemän. Åren 1753—82, 1786—1867.

Hildebrand, minnespenningar öfver enskilda Svenska män och qvinnor.

—»—, Svenska Sigiller från medeltiden. Hft. 1. 2.

J. Lieblein, Dictionnaire de noms hiéroglyphiques en ordre généalogique et alphabétique. I.

Memorie della regia accademia di scienze, lettere ed arti in Modena. T. X. XI.

Nieuwe Verhandelingen van het Bataafsche Genootenschap der Wijsbegeerte to Rotterdam. Tweede Reeks II, 1.

Smithsonian report for 1869.

Transactions of the Connecticut academy of arts and sciences. I, 2. II, 1.

Proceedings of the academy of natural sciences of Philadelphia. 1870.

Report of the commissioner of agriculture for the year 1869. Washington.

Monthly reports of the department of agriculture for the year 1870. Washington.

Reports on the diseases of cattle in the United States. Washington 1869.

W. H. Dall, 7 Afhandlinger, Separataftryk af amerikanske Tidsskrifter.

Second annual report of the board of Indian commissioners for the year 1870. Washington.

Announcement of the Wagner free institute of science for the collegiate year 1870—71. Philadelphia.

Oversigt over det kgl. danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger. 1870, No. 2. 3. 1871, No. 1.

Det kgl. danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, femte Række. Naturvidenskabelig og mathematisk Afdeling. IX, 2—3.

—·— Historisk og philosophisk Afdeling. IV, 5—6.

E. Montegazza, l'articolo 53 del regolamento di disciplina, commedia in cinque atti. Modena 1870.

Le finanze dei comuni e delle provincie. Modena 1870.

Indbydelsesskrifter til den offentlige Examen ved Christiania Cathedralskole 1869, 1870 og 1871.

Indbydelsesskrift til den offentlige Examen 1871 ved Lærd- og Realskolen i Molde.

Indbydelsesskrift til Aarsexamen ved Fredrikshalds offentlige Skole 1871.

Settimanni, nouvelle théòrie des principaux éléments de la lune et du soleil. Florence 1871.

Bidrag till Sveriges officiela statistik. Helsa- och sjukvården. Öfverstyrelsens öfver hospitalen berättelse för år 1869.

P. W. Sheafer, progress of the Anthracite coal trade of Pensylvania.

Videnskabelige Meddelelser fra den naturhistoriske Forening i Kjøbenhavn for 1870, No. 12—28, og for 1871, No. 1—10.

Sitzungsberichte der kgl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. Jahrgang 1870.

Abhandlungen der kgl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag, v. J. 1870.

S. C. Snellen van Vollenhoven, laatste Lijst van Nederlandsche schildvleugelige Jnsecten. Haarlem 1870.

Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la société des sciences à Haarlem. T. V, 4—5. VI, 1—3.

Rendiconto delle sessioni dell' accademia delle scienze dell' istituto di Bologna anno accademico 1870—71.

Memorie dell' accademia delle scienze dell' istituto di Bologna. Serie II, T. X, fasc. 1—4.

Notulen von de algemeene en Bestuurs-Vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Deel VII, 2—4. VIII, 1—2.

Tijdschrift voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde, utg. door het Bat. Gen. v. K. en W. Deel XIX.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Bd. XX.

Videnskabs-Selskabets

Medlemmer

1871.

Selskabets Beskytter:

HANS MAJESTÆT KONGEN.

Æresmedlem: Hs. Kongl. Høihed Prinds Oscar.

Selskabets Embedsmænd i Aaret 1871.

Præses: Professor C. A. Holmboe.

Vice-Præces: Professor C. Boeck.

Secretair: Professor M. J. Monrad.

Embedsmænd i den philosophisk-historiske Classe.

Formand: Professor S. Bugge.
Vice-Formand: Professor Caspari.
Secretair: Professor O. Rygh.

Embedsmænd i den mathematisk-naturvidenskabelige Classe.

Formand: Professor Esmark.
Vice-Formand: Professor Faye.
Secretair: Professor Wange.

Selskabets Medlemmer ved Udgangen af Aaret 1871.

Arndtzen, A., Cand. med.
Aschehoug, T., Professor.
Aubert, L., Professor.
Aubert, L., jun., Professor.
Bachke, O. A., Assessor.
*Barth, J. B., Forstmester.
Birkeland, M., Rigsarchivar.
Bjerknes, C., Professor.
Blytt, A., Conservator.
Boeck, A., Stipendiat.
Boeck, C., Professor.
Boeck, W., Professor.
Brandt, F., Professor.
Broch, J. P., Professor.
Broch, O. J., Statsraad.
Bugge, S., Professor.
Caspari, C. P., Professor.
Christie, H., Professor.
Collett, Robert, Cand. philos.
Daa, L. K., Professor.
Daae, L., Bibliothekar.
*Dahl, L., Fængselslæge.

*Dahll, T., Geschworner.
*Danielssen, D., Overlæge.
*Egeberg, C., Esquadronslæge.
Esmark, L., Professor.
Faye, F., Professor.
Fearnley, C., Professor.
*Forbes, D., Geognost.
Friis, J., Professor.
*Friis, J., Rector.
*Fritzner, J., Provst.
Guldberg, A. S., Dr. philos.
Guldberg, C. M., Professor.
Hallager, F., Høiesteretsassessor.
Hansteen, C., Professor.
Heiberg, C., Professor.
Hiortdahl, Th., Amanuensis.
Hjort, J., Brigadelæge.
Holmboe, C. A., Professor.
Hvoslef, H., Dr., Apotheker.
*Hørbye, J., Forstmester.
Johnson, G., Professor.
Kiær, A., Bureauchef.
Kjerulf, Th., Professor.
*Koren, J., Conservator.
Lasson, P., Justitiarius.
Lieblein, J., Stipendiat.
Lochmann, F., Professor.
Lyng, G. V., Dr., Professor.
Løkke, J, Overlærer.
Meidel, N, Bergmester.
Mohn, H., Professor.
Monrad, M. J., Professor.
Munch, A., Professor.
*Munthe, G., Capitain.
Müller, J. W., Stipendiat.
Münster, B., Professor.
Nissen, R. T., Professor.
*Norman, J., Forstmester.
Odén, J., Adjunkt.
Pihl, O., Directeur.
*Platou, C., Sorenskriver.
Rasch, H., Professor.
Rygh, O., Professor.
Sandberg, O., Directeur.
Sars, G. O., Stipendiat.
Sars, J. E., Stipendiat.
*Schive, C., Toldinspecteur.
Schiøtt, P. O., Professor.
Schübeler, C., Professor.
Sexe, S, Professor.
Stang, F., Statsraad.
*Sundt, E., Sogneprest.
*Sylow, C., Overlærer.
Unger, C. R., Professor.
Vibe, F., Rector.
Voss, J., Professor.
Waage, P., Professor.
Welhaven, J. S., Professor.
Winge, E., Professor.

De med * betegnede ere udenbyesboende.

Rettelser.

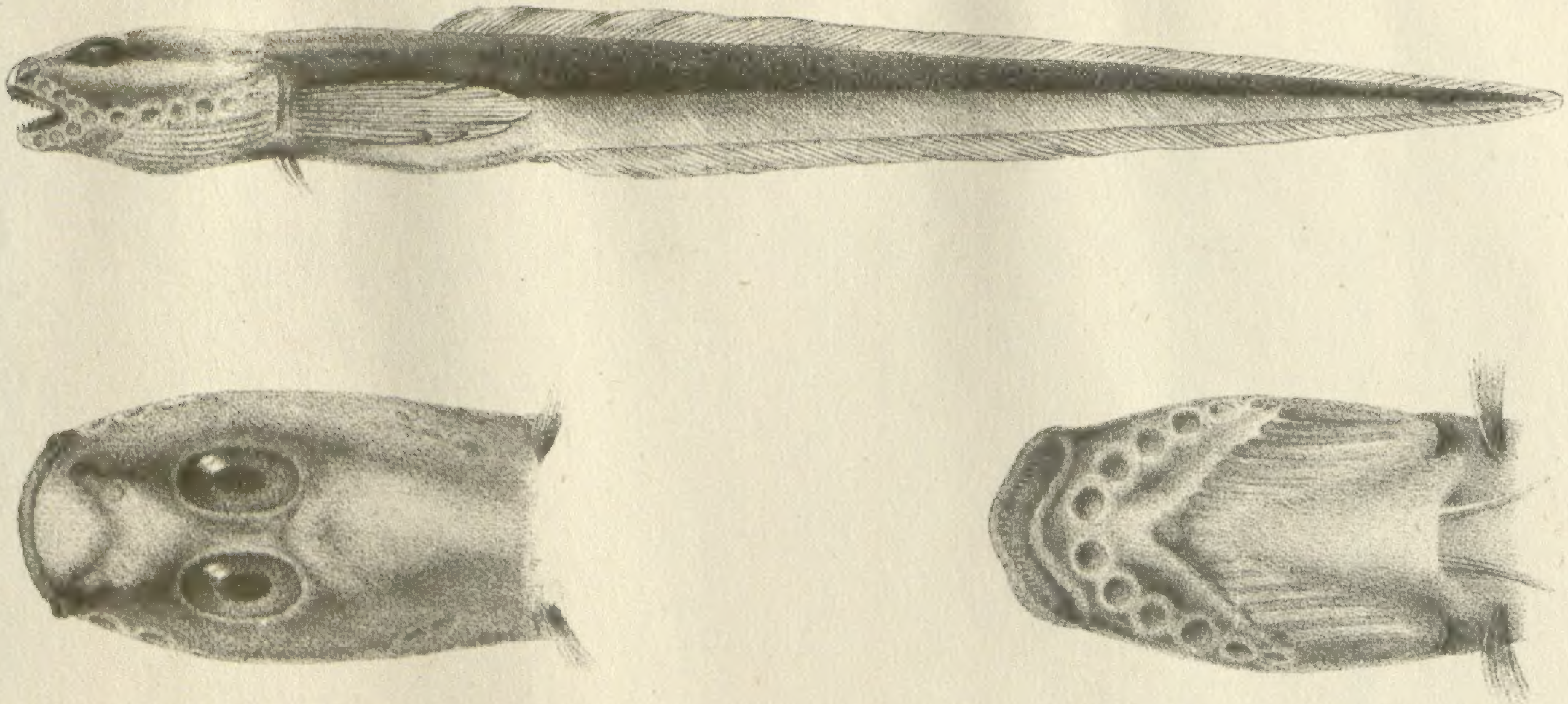
S. 352, L. 24, δ_p^{2n+1}, læs: d_p^{2n+1}.

S. 354, L. 7, $r_p^{(\pi)}$, læs: $r_p^{(\pi)}$ ou plus simplement ρ.

S. 354, L. 19, Θ, læs: Θ_p.

S. 355, L. 13, Θ, læs: Θ_p.

S. 377, L. 31, $n + 3$, læs: $n + 2$.



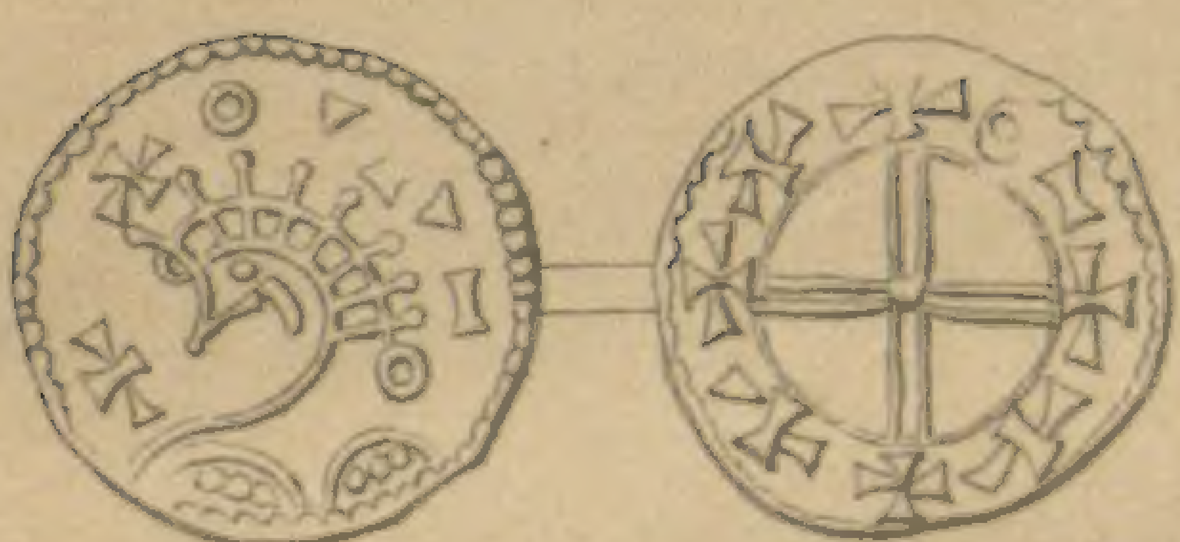
R. Collett del.

Holck's Atelier.

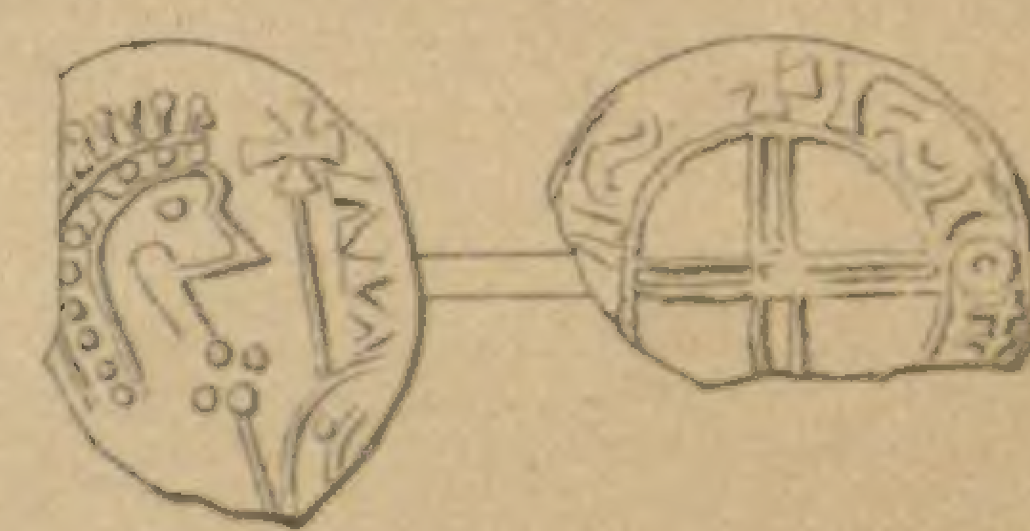
Lycodes Sarsii, n. sp.

1

2



3



4

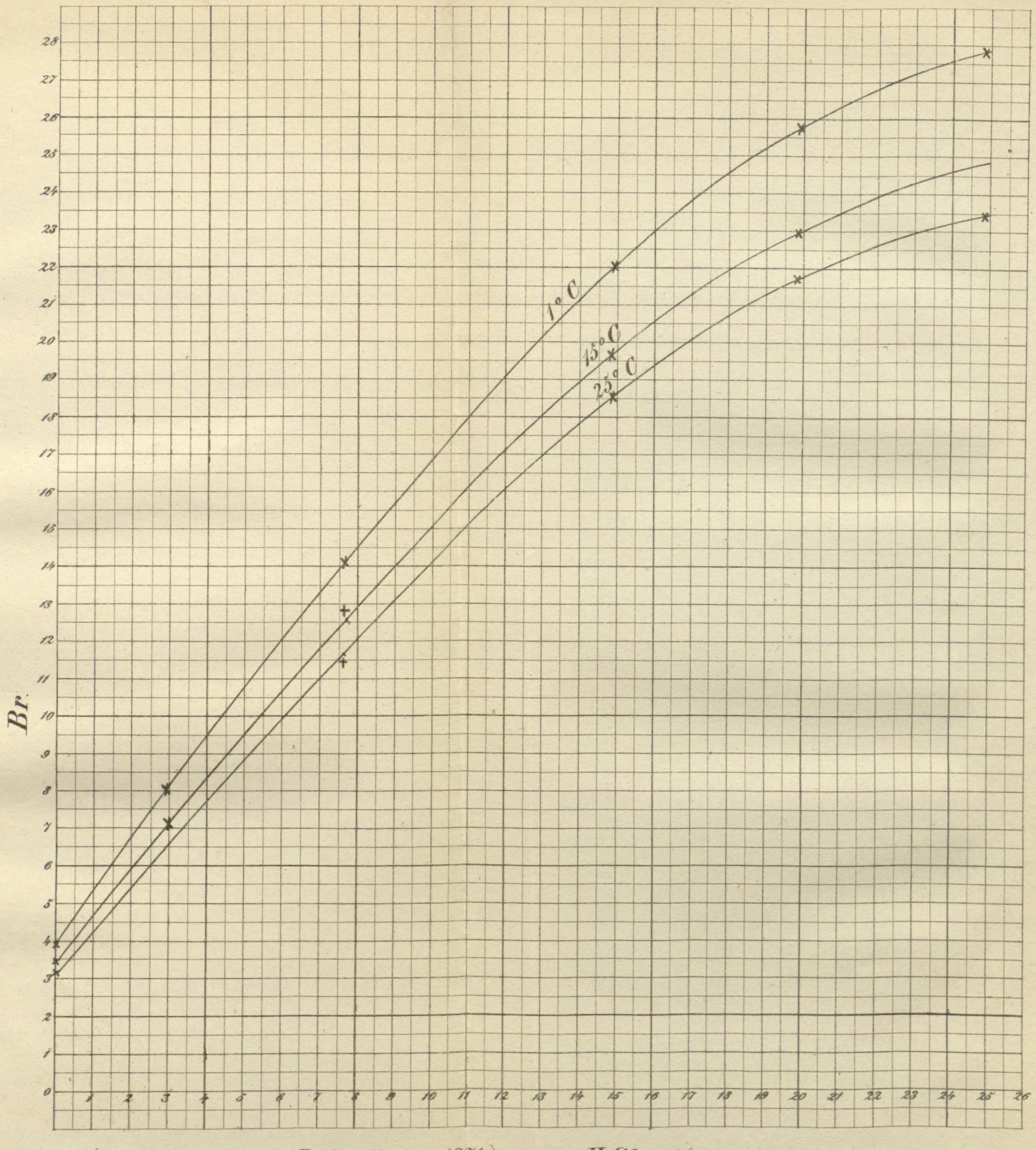
5

6

7

8

9



(Videnskabsselskabets Forhandlinger 1871.)